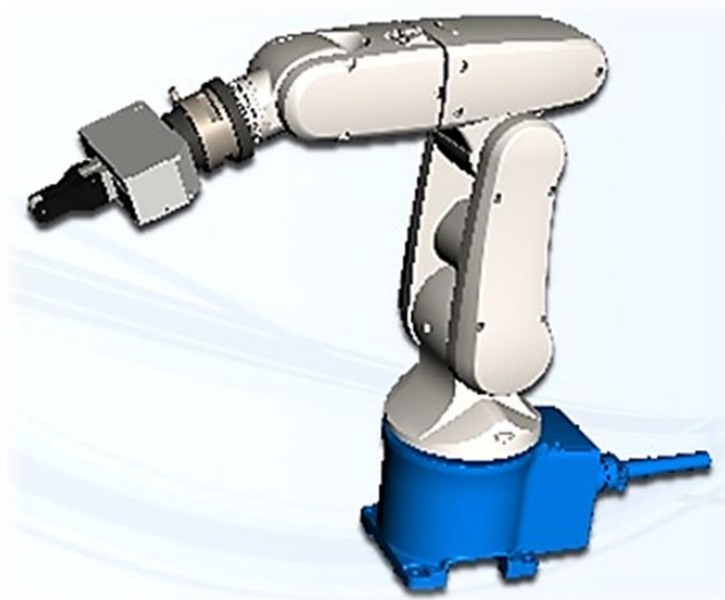




ISBN 978-605-84220-1-8

# ROBOT KİNEMATİĞİ

Seri ve Paralel Manipulatörlerin Analitik ve Yarı-Analitik Yöntemlerle Konum ve Hız Analizleri



*Teorik Konu Anlatımı*

**Prof. Dr. M. Kemal ÖZGÖREN**

Makina Teorisi Derneği ve Gaziantep Üniversitesi işbirliği ile Eylül 2015 tarihinde düzenlenen ROBOT KİNEMATİĞİ ÇALIŞTAYI (RKC 2015) ders notlarından derlenmiştir.



Makina Teorisi Derneği Yayınları  
Ders Notları Serisi No:1

**Prof. Dr. M. Kemal ÖZGÖREN**  
**Orta Doğu Teknik Üniversitesi**

# **ROBOT KİNEMATİĞİ**

**Seri ve Paralel Manipülatörlerin Analitik ve Yarı-Analitik  
Yöntemlerle  
Konum ve Hız Analizleri**

Eylül 2015 Gaziantep

## **Editör ve Dizin**

Recep HALICIOĞLU  
M. Erkan KÜTÜK

**Ders Notları Serisi No: 1**

ISBN 978-605-84220-1-8



**Makina Teorisi Derneği**

Bahçelievler Mahallesi 1. Cad. TRT Haber 1 Sitesi No: C8 Gölbaşı/ANKARA

Bu kitap 31.08.2015 ve 03.09.2015 tarihleri arasında düzenlenen Robot Kinematiki Çalıştayı' nın teorik konu anlatımı kısmında kullanılan Prof. Dr. M. Kemal ÖZGÖREN' in ders notlarından derlenmiştir.

# ***RKC-2015 ÇALIŞTAY BİLGİLERİ***

## **Düzenleme Kurulu**

**Prof.Dr. L.Canan DÜLGER**  
Gaziantep Üniversitesi

**Recep HALICIOĞLU**  
Gaziantep Üniversitesi –  
Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi

**M. Erkan KÜTÜK**  
Gaziantep Üniversitesi

**Ali KILIÇ**  
Gaziantep Üniversitesi

## **Bilim Kurulu**

**Prof.Dr. Eres SÖYLEMEZ**  
Ortadoğu Teknik Üniversitesi –  
MAKTED

**Prof.Dr. M. Kemal ÖZGÖREN**  
Ortadoğu Teknik Üniversitesi

**Prof. Dr. Mustafa BAYRAM**  
Gaziantep Üniversitesi

**Prof.Dr. Sedat BAYSEÇ**  
Gaziantep Üniversitesi

**Prof.Dr. Sadettin KAPUCU**  
Gaziantep Üniversitesi

## **EĞİTİM İÇERİĞİ**

### **Birinci Kısım**

**Seri ve Paralel Manipülatörlerin  
Analitik ve Yarı-Analitik Yöntemlerle  
Konum ve Hız Analizleri**

- Temel Kinematik
- Mekanik Bir Sistemde Uzuvar Arası Bağlantılar ve Denavit - Hartenberg Yöntemi
- Seri Manipülatörlerin Konum Analizi
- Seri Manipülatörlerin Hız Analizi
- Eksiksiz Seri Manipülatörlerin Konum ve Hız Analizi
- Artıksız Seri Manipülatörlerin Konum ve Hız Analizi
- Paralel Manipülatörlerin Konum ve Hız Analizi

**Prof.Dr. M. Kemal ÖZGÖREN**  
Ortadoğu Teknik Üniversitesi

### **İkinci Kısım**

**Sayısal Uygulamalar**

- Robotik Araç Kutusu
- Simulink/SimMechanics
- Sanal Gerçeklik Uygulamaları
- Haptik Robot Uygulamaları
- Yeniden Yapılandırılabilir Robotlar

**Prof.Dr. Sedat BAYSEÇ**  
Gaziantep Üniversitesi

**Prof.Dr. L.Canan DÜLGER**  
Gaziantep Üniversitesi

**Ahmed J.R. Almusawi**  
Mekatronik Y. Müh.

**Ali KILIÇ**  
Makine Y. Müh

**SERİ VE PARALEL MANİPÜLATÖRLERİN  
ANALİTİK VE YARI-ANALİTİK YÖNTEMLERLE  
KONUM VE HIZ ANALİZLERİ**

**Prof. Dr. M. Kemal ÖZGÖREN**

**Eylül 2015**

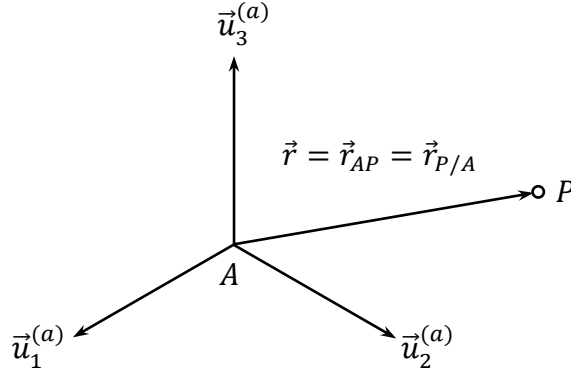
## İÇİNDEKİLER

BÖLÜM 1. TEMEL KİNEMATİK .....	1
1.1. Bir Noktanın Bir Eksen Takımına Göre Konumu.....	1
1.2. Bir Vektörün Bir Eksen Takımındaki Matris Gösterimi.....	2
1.3. Vektör İşlemleri ile Matris İşlemleri Arasındaki İlişkiler .....	2
1.4. Bir Vektörün Bir Eksen Etrafında Dönmesi .....	4
1.5. Bir Vektörün Değişik Eksen Takımlarındaki Matris Gösterimleri .....	9
1.6. Dönüşüm Matrisi İfadeleri .....	10
1.7. Bir Noktanın Farklı Eksen Takımlarına Göre Konumu ve Homojen Dönüşüm Matrisleri .....	13
1.8. Bir Vektörün Farklı Eksen Takımlarına Göre Türevleri.....	16
1.9. Bir Noktanın Farklı Eksen Takımlarına Göre Hızı ve İvmesi .....	19
BÖLÜM 2. MEKANİK BİR SİSTEMDE UZUVLARARASI BAĞLANTILAR VE DENAVIT-HARTENBERG (D-H) YÖNTEMİ.....	23
2.1. Katı Uzuvlardan ve Tek Eksenli Eklemlerden Oluşan Kinematik Zincirler.....	23
2.2. Kinematik Zincir Denklemleri .....	26
2.3. Özel Durumlar.....	30
BÖLÜM 3. SERİ MANİPÜLATÖRLERİN KONUM ANALİZİ.....	36
3.1. Uzuvların Konum ve Yönelimleri İçin İleri Kinematik Eşitlikleri .....	36
3.2. Eklem Değişkenlerini Belirlemek İçin Ters Kinematik Çözüm .....	41
BÖLÜM 4. SERİ MANİPÜLATÖRLERİN HIZ ANALİZİ .....	48
4.1. Uzuvların Ötelenme ve Dönme (Açısal) Hızları İçin İleri Kinematik Eşitlikleri .....	48
4.2. Eklem Değişkeni Türevlerini Belirlemek İçin Ters Kinematik Çözüm.....	51
BÖLÜM 5. EKSİKSİL SERİ MANİPÜLATÖRLERİN KONUM VE HIZ ANALİZİ.....	59
5.1. Eksiksilliğin Tanımı.....	59
5.2. Örnek Eksiksil Manipülatör ve İleri Kinematik Eşitlikleri .....	59
5.3. Eklem Değişkenlerini Belirlemek İçin Ters Kinematik Çözüm .....	60
5.4. Örnek Eksiksil Manipülatör İçin Hız İlişkileri.....	63
5.5. Eklem Değişkeni Türevlerini Belirlemek İçin Ters Kinematik Çözüm.....	63
5.6. Genel Bir Eksiksil Manipülatörün Jacobi Matrisi Aracılığıyla Ters Hız Çözümü .....	64
BÖLÜM 6. ARTIKSİL SERİ MANİPÜLATÖRLERİN KONUM VE HIZ ANALİZİ .....	66
6.1. Artıksilliğin Tanımı ve Artıksillliği Giderme Yöntemleri .....	66
6.2. Genel Bir Artıksil Manipülatörün Jacobi Matrisi Aracılığıyla Ters Hız Çözümü .....	66
6.3. Artıksil Olarak Kullanılan Beş Serbestlik Dereceli Bir Manipülatör.....	69

BÖLÜM 7. PARALEL MANİPÜLATÖRLERİN KİNEMATİK ANALİZİ.....	72
7.1. Paralel Manipülatörlerin Genel Tanımı .....	72
7.2. Paralel Manipülatörlere Ait Kinematik Eşitlikler .....	72
7.3. Örnek Paralel Manipülatör.....	76
7.4. Örnek Paralel Manipülatör İçin Ters Kinematik Çözüm .....	80
7.5. Örnek Paralel Manipülatör İçin İleri Kinematik Çözüm.....	84
7.6. Paralel Manipülatörlere Ait Genel Kinematik İlişkiler .....	88
EK A. KAYNAKLAR .....	91
EK B. KÜÇÜK SÖZLÜK.....	92

## BÖLÜM 1 TEMEL KİNEMATİK

### 1.1. Bir Noktanın Bir Eksen Takımına Göre Konumu



Şekil 1.1. Bir Noktanın Seçilen Bir Eksen Takımına Göre Konumu

Üç boyutlu uzayda gözlemlenen herhangi bir  $P$  noktasının konumu, geleneksel olarak, Şekil 1.1'de de görüldüğü gibi, uygunca seçilen bir  $\mathcal{F}_a$  eksen takımına göre ifade edilir.  $\mathcal{F}_a$  eksen takımının orijini  $A$  ya da  $O_a$  ile gösterilen noktayla temsil edilir.  $\mathcal{F}_a$  eksen takımının yönelimi ile eksenleri ise, aşağıda gösterilen "temel vektör üçlüsü" ile belirlenir.

$$\{\vec{u}_1^{(a)}, \vec{u}_2^{(a)}, \vec{u}_3^{(a)}\} \quad (1.1.1)$$

Genelde,  $\mathcal{F}_a$ , "ortonormal" ve "sağ el kuralına uyan" ya da kısaca "sağ eli" olan bir eksen takımı olarak seçilir. Bu özellikler aşağıda açıklanmıştır.

$\mathcal{F}_a$  eksen takımının ortonormal olabilmesi için temel vektörlerinin birbirine dik birim vektörler olması gerekir. Bu özellik, aşağıdaki skalar çarpım denklemiyle ifade edilir.

$$\vec{u}_i^{(a)} \cdot \vec{u}_j^{(a)} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \text{ ise} \\ 0, & i \neq j \text{ ise} \end{cases} \quad (1.1.2)$$

$\mathcal{F}_a$  eksen takımının sağ el kuralına uyabilmesi için de temel vektörlerinin aşağıdaki vektörel çarpım denklemlerini sağlaması gerekir.

$$\left. \begin{aligned} \vec{u}_1^{(a)} \times \vec{u}_2^{(a)} &= \vec{u}_3^{(a)} \\ \vec{u}_2^{(a)} \times \vec{u}_3^{(a)} &= \vec{u}_1^{(a)} \\ \vec{u}_3^{(a)} \times \vec{u}_1^{(a)} &= \vec{u}_2^{(a)} \end{aligned} \right\} \quad (1.1.3)$$

Gözlemlenen  $P$  noktasının konumu,  $\mathcal{F}_a$  eksen takımının orijinine göre  $\overline{AP}$  konum vektörüyle belirlenir. Bu vektör, aşağıdaki değişik biçimlerde gösterilebilir.



$$\vec{r} = \vec{r}_P = \vec{r}_{P/A} = \vec{r}_{AP} = \overline{AP} \quad (1.1.4)$$

(1.1.4) denklemindeki  $\vec{r}$  vektörü,  $\mathcal{F}_a$  eksen takımında şöyle çözüştürülür.

$$\vec{r} = \vec{u}_1^{(a)} r_1^{(a)} + \vec{u}_2^{(a)} r_2^{(a)} + \vec{u}_3^{(a)} r_3^{(a)} = \sum_{k=1}^3 \vec{u}_k^{(a)} r_k^{(a)} \quad (1.1.5)$$

(1.1.5) denkleminde,  $r_k^{(a)}$ ,  $\vec{r}$  vektörünün  $\mathcal{F}_a$  eksen takımındaki  $k$ -yinci bileşeni olarak şöyle tanımlanır.

$$r_k^{(a)} = \vec{r} \cdot \vec{u}_k^{(a)} \quad (1.1.6)$$

## 1.2. Bir Vektörün Bir Eksen Takımındaki Matris Gösterimi

Önceki kısımda olduğu gibi, herhangi bir  $\vec{r}$  vektörü, seçilen bir  $\mathcal{F}_a$  eksen takımında şöyle çözüştürülür.

$$\vec{r} = \vec{u}_1^{(a)} r_1^{(a)} + \vec{u}_2^{(a)} r_2^{(a)} + \vec{u}_3^{(a)} r_3^{(a)} \quad (1.2.1)$$

(1.2.1) denklemindeki bileşenler,  $k = 1, 2, 3$  için şöyle tanımlanmıştır.

$$r_k^{(a)} = \vec{r} \cdot \vec{u}_k^{(a)} \quad (1.2.2)$$

Söz konusu bileşenler kullanılarak aşağıdaki biçimlerde gösterilebilen bir "dikeysıra matrisi" oluşturulabilir.

$$\vec{r}^{(a)} = [\vec{r}]^{(a)} = [\vec{r}]|_{\mathcal{F}_a} = \begin{bmatrix} r_1^{(a)} \\ r_2^{(a)} \\ r_3^{(a)} \end{bmatrix} \quad (1.2.3)$$

Yukarıda oluşturulan  $\vec{r}^{(a)}$  dikeysıra matrisi,  $\vec{r}$  vektörünün  $\mathcal{F}_a$  eksen takımındaki matris gösterimi olarak tanımlanır.

Eğer ilgilenilen tüm vektörler için aynı eksen takımı, örneğin  $\mathcal{F}_a$ , kullanılıyorsa, gösterim kolaylığı olsun diye,  $(a)$  üstyazıtı gizlenebilir ve aşağıdaki basitleştirilmiş gösterimler kullanılabilir.

$$\vec{u}_k^{(a)} \rightarrow \vec{u}_k, r_k^{(a)} \rightarrow r_k, \vec{r}^{(a)} \rightarrow \vec{r}$$

## 1.3. Vektör İşlemleri ile Matris İşlemleri Arasındaki İlişkiler

Bu kısımda göz önüne alınan tüm vektörlerin matris gösterimlerinin aynı  $\mathcal{F}_a$  eksen takımında oluşturulduğu varsayılmıştır. Dolayısıyla, önceki kısımda bahsedilen üstyazıtsız basitleştirilmiş gösterim kullanılmıştır.

a) *Skalar Çarpım*

$\vec{p}$  ve  $\vec{q}$  gibi iki vektörün skalar çarpımı,  $\mathcal{F}_a$  eksen takımındaki bileşenleri cinsinden şöyle ifade edilir.

$$s = \vec{p} \cdot \vec{q} = p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3 \quad (1.3.1)$$

Aynı işlem, ilgili vektörlerin  $\mathcal{F}_a$  eksen takımındaki matris gösterimleriyle şöyle de ifade edilebilir.

$$s = [p_1 \ p_2 \ p_3] \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \vec{p}^t \vec{q} \quad (1.3.2)$$

Skalar çarpımda çarpanların yeri değiştirilebildiği için aynı sonuç aşağıdaki dört değişik biçimde ifade edilebilir.

$$s = \vec{p} \cdot \vec{q} = \vec{q} \cdot \vec{p} = \vec{p}^t \vec{q} = \vec{q}^t \vec{p} \quad (1.3.3)$$

Bu arada,  $\vec{p}^t = [p_1 \ p_2 \ p_3]$  ve  $\vec{q}^t = [q_1 \ q_2 \ q_3]$ ,  $\vec{p}$  ve  $\vec{q}$  vektörlerinin  $\mathcal{F}_a$  eksen takımındaki yataysıra matris gösterimleri olarak adlandırılır.

b) *Vektörel Çarpım*

$\vec{p}$  ve  $\vec{q}$  gibi iki vektörün vektörel çarpımı, yeni bir  $\vec{r}$  vektörü verir. Şöyle ki,

$$\vec{r} = \vec{p} \times \vec{q} \quad (1.3.4)$$

İlgili vektörlerin  $\mathcal{F}_a$  eksen takımındaki bileşenleri kullanılarak (1.3.4) vektör denkleminin karşılığı olarak aşağıdaki matris denklemi yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_2q_3 - p_3q_2 \\ p_3q_1 - p_1q_3 \\ p_1q_2 - p_2q_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -p_3 & p_2 \\ p_3 & 0 & -p_1 \\ -p_2 & p_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \quad (1.3.5)$$

(1.3.5) denklemi, derleşik olarak kısaca şöyle de yazılabilir.

$$\vec{r} = \tilde{p} \vec{q} \quad (1.3.6)$$

Yukarıda kullanılan  $\tilde{p}$  (*p-tilde*) simgesi,  $\vec{p}$  dikeysıra matrisinden türetilen "antisimetrik" kare matrisi göstermektedir. Bu matris, "vektörel çarpım matrisi" olarak da adlandırılır ve aşağıda gösterilen biçimde "asm" (antisimetrik matris türetme) işleci kullanılarak oluşturulur.

$$\vec{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \tilde{p} = \text{asm}(\vec{p}) = \begin{bmatrix} 0 & -p_3 & p_2 \\ p_3 & 0 & -p_1 \\ -p_2 & p_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.3.7)$$

## c) Vektörel Çarpım Matrislerinin Bazı Özellikleri

Vektörel çarpım matrislerinin bazı önde gelen özellikleri aşağıda gösterilmiştir.

$$\det(\tilde{p}) = 0 \quad (1.3.8)$$

$$\tilde{p}\bar{p} = \bar{0}, \quad \tilde{p}^t\tilde{p} = \bar{0}^t \quad (1.3.9)$$

$$\tilde{p}\tilde{q} = \bar{q}\tilde{p}^t - (\bar{q}^t\tilde{p})\hat{I} \quad (1.3.10)$$

$$\tilde{p}^2 = \bar{p}\tilde{p}^t - (\tilde{p}^t\bar{p})\hat{I} \quad (1.3.11)$$

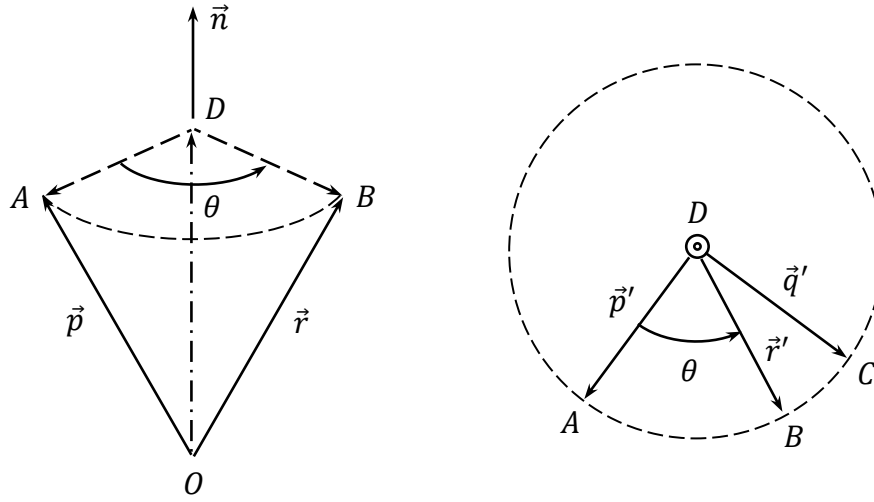
$$\text{asm}(\tilde{p}\tilde{q}) = \tilde{p}\tilde{q} - \tilde{q}\tilde{p} = \bar{q}\tilde{p}^t - \bar{p}\tilde{q}^t \quad (1.3.12)$$

$$\text{asm}(\hat{R}\tilde{p}) = \hat{R}\tilde{p}\hat{R}^t \quad (1.3.13)$$

Yukarıdaki denklemlerde,  $\hat{I}$  birim matrisi,  $\hat{R}$  ise ortonormal (determinantı bir olan) bir matrisi göstermektedir.

## 1.4. Bir Vektörün Bir Eksen Etrafında Dönmesi

## 1.4.1. Rodrigues Formülü ve Dönme Matrisi



Şekil 1.2. Bir vektörün bir eksen etrafında dönmesi

Şekil 1.2'de bir  $\vec{p}$  vektörünün bir  $\vec{r}$  vektörüne dönmesi görülmektedir. Dönme açısı  $\theta$  ile, dönme eksenini temsil eden birim vektör ise  $\vec{n}$  ile gösterilmiştir.  $\vec{p}$  vektörü,  $\vec{r}$  vektörüne dönerken konik bir yüzey üzerinde hareket eder. Bu dönmenin söz konusu koninin tabanındaki izdüşüm görüntüsü, Şekil 1.2'nin sağında gösterilmiştir. Bu dönmenin sonucu olan  $\vec{r}$  vektörü, Şekil 1.2 göz önüne alınarak aşağıda yazılan denklem dizisi sonunda ortaya çıkar.

$$\begin{aligned}\vec{p}' &= \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DA} = \vec{s} + \vec{p}' \Rightarrow \\ \vec{p}' &= \vec{p} - \vec{s}\end{aligned}\quad (1.4.1)$$

$$\begin{aligned}\vec{r}' &= \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DB} = \vec{s} + \vec{r}' \Rightarrow \\ \vec{r}' &= \vec{r} - \vec{s}\end{aligned}\quad (1.4.2)$$

$$\vec{s} = (\vec{p} \cdot \vec{n})\vec{n} = \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{p}) \quad (1.4.3)$$

$$\begin{aligned}\vec{q}' &= \overrightarrow{DC} = \vec{n} \times \overrightarrow{DA} = \vec{n} \times \vec{p}' \Rightarrow \\ \vec{q}' &= \vec{n} \times (\vec{p} - \vec{s}) = \vec{n} \times [\vec{p} - (\vec{p} \cdot \vec{n})\vec{n}] = \vec{n} \times \vec{p}\end{aligned}\quad (1.4.4)$$

Şekil 1.2'nin sağındaki görüntüye göre,  $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} \cos \theta + \overrightarrow{DC} \sin \theta$ . Yani,

$$\vec{r}' = \vec{p}' \cos \theta + \vec{q}' \sin \theta \quad (1.4.5)$$

(1.4.5) denklemini, (1.4.1) - (1.4.4) denklemleriyle birlikte aşağıdaki denklemlere yol açar.

$$\begin{aligned}\vec{r} - \vec{s} &= (\vec{p} - \vec{s}) \cos \theta + (\vec{n} \times \vec{p}) \sin \theta \Rightarrow \\ \vec{r} &= \vec{p} \cos \theta + (\vec{n} \times \vec{p}) \sin \theta + \vec{s}(1 - \cos \theta) \Rightarrow \\ \vec{r} &= \vec{p} \cos \theta + (\vec{n} \times \vec{p}) \sin \theta + \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{p})(1 - \cos \theta)\end{aligned}\quad (1.4.6)$$

(1.4.6) denklemini, dönme sonucunda ortaya çıkan  $\vec{r}$  vektörünü vermektedir. Bu denklem, *Rodrigues denklemi* olarak da bilinir. Rodrigues denklemi, seçilen bir  $\mathcal{F}_a$  eksen takımında, aşağıdaki matris denklemi biçiminde de yazılabilir.

$$\vec{r} = \vec{p} \cos \theta + (\vec{n} \times \vec{p}) \sin \theta + \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{p})(1 - \cos \theta) \quad (1.4.7)$$

(1.4.7) denklemini,  $\vec{p}$  bir çarpan olarak ayrılıp şöyle de yazılabilir.

$$\vec{r} = \hat{R} \vec{p} \quad (1.4.8)$$

(1.4.8) denklemindeki  $\hat{R}$  matrisi, "dönme matrisi" olarak şöyle tanımlanır.

$$\hat{R} = \hat{R}(\vec{n}, \theta) = \hat{I} \cos \theta + \vec{n} \sin \theta + \vec{n} \vec{n}^t (1 - \cos \theta) \quad (1.4.9)$$

Bu arada,  $\vec{n}$  bir birim vektör olduğu için, yani  $\vec{n}^t \vec{n} = 1$  olduğu için, (1.3.11) denklemini, şu şekli alır.

$$\vec{n}^2 = \vec{n} \vec{n}^t - \hat{I} \quad (1.4.10)$$

Böylece,  $\hat{R}$  matrisi şöyle de ifade edilebilir.

$$\hat{R} = \hat{R}(\vec{n}, \theta) = \hat{I} + \vec{n} \sin \theta + \vec{n}^2 (1 - \cos \theta) \quad (1.4.11)$$

$\hat{R}$  matrisi için Taylor serisi açılımlarından yararlanarak çok daha derleşik bir ifade elde edilebilir. Bu amaçla, (1.4.11) denklemini,  $\sin \theta$  ve  $\cos \theta$  işlevlerinin Taylor serisi açılımları kullanılarak şöyle yazılabilir.

$$\begin{aligned}\hat{R} &= \hat{I} + \tilde{n} \left( \theta - \frac{1}{3!} \theta^3 + \frac{1}{5!} \theta^5 - \frac{1}{7!} \theta^7 + \dots \right) \\ &\quad + \tilde{n}^2 \left( \frac{1}{2!} \theta^2 - \frac{1}{4!} \theta^4 + \frac{1}{6!} \theta^6 - \frac{1}{8!} \theta^8 + \dots \right)\end{aligned}\quad (1.4.12)$$

Öte yandan, (1.3.9) ve (1.4.10) denklemlerine göre,  $\tilde{n}$  matrisinin çeşitli dereceden kuvvetleri yalnızca  $\tilde{n}$  ya da  $\tilde{n}^2$  cinsinden ifade edilebilir. Şöyle ki,

$$\tilde{n}^3 = -\tilde{n}, \quad \tilde{n}^4 = -\tilde{n}^2, \quad \tilde{n}^5 = \tilde{n}, \quad \tilde{n}^6 = \tilde{n}^2, \quad \tilde{n}^7 = -\tilde{n}, \dots \quad (1.4.13)$$

(1.4.12) ve (1.4.13) denklemleri birleştirilince,  $\hat{R}$  için aşağıdaki Taylor serisi açılımı ortaya çıkar.

$$\hat{R} = \hat{I} + \tilde{n}\theta + \frac{1}{2!}(\tilde{n}\theta)^2 + \frac{1}{3!}(\tilde{n}\theta)^3 + \frac{1}{4!}(\tilde{n}\theta)^4 + \dots \quad (1.4.14)$$

Dikkat edilirse, (1.4.14) denklemindeki açılım, üstel işlevin Taylor serisi açılımıyla aynıdır. Böylece,  $\hat{R}$  için aşağıdaki son derece derleşik ifade elde edilmiş olur. Bu ifade yalnızca derleşik olmayıp aynı zamanda dönme eksenini de açık olarak göstermesi nedeniyle oldukça kullanışlıdır. Bu biçimde ifade edildiğinde,  $\hat{R}$  için kısaca "üstel dönme matrisi" deyiimi kullanılabilir.

$$\hat{R} = \hat{R}(\tilde{n}, \theta) = e^{\tilde{n}\theta} \quad (1.4.15)$$

#### 1.4.2. Temel Dikeysıra Matrisleri ve Temel Dönme Matrisleri

Temel dikeysıra matrisleri, bir üçlü grup oluşturmak üzere şöyle tanımlanırlar.

$$\bar{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.4.16)$$

Temel dikeysıra matrisleri, üç boyutlu dikeysıra matris uzayının temelini oluştururlar. Öyle ki,  $\bar{c}$  gibi herhangi bir dikeysıra matrisi, üç temel dikeysıra matrisinin doğrusal bileşimi olarak aşağıda gösterilen biçimde ifade edilebilir.

$$\bar{c} = c_1 \bar{u}_1 + c_2 \bar{u}_2 + c_3 \bar{u}_3 = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \quad (1.4.17)$$

Temel dikeysıra matrisleri, aynı zamanda,  $\mathcal{F}_a$  gibi bir eksen takımının temel birim vektörlerinin yine  $\mathcal{F}_a$  içinde ifade edilen matris gösterimleridir. Şöyle ki,  $k = 1, 2, 3$  için,

$$\bar{u}_k = \bar{u}_k^{(a/a)} = \left[ \vec{u}_k^{(a)} \right]^{(a)} = \left[ \vec{u}_k^{(a)} \right] \Big|_{\mathcal{F}_a} \quad (1.4.18)$$

Eğer dönme işlemi, seçilen bir  $\mathcal{F}_a$  eksen takımının eksenlerinden biri, örneğin  $\bar{u}_k^{(a)}$  eksenini, etrafında yapılıyorsa, dönme eksenini birim vektörü,  $\vec{n} = \vec{u}_k^{(a)}$  olur. Bu durumda,  $\vec{n}$  vektörünün  $\mathcal{F}_a$  eksen takımındaki matris gösterimi, aşağıda görüldüğü gibi,  $k$ -yinci temel dikeysıra matrisi olur.

$$\bar{n} = \bar{n}^{(a)} = \bar{u}_k^{(a/a)} = \bar{u}_k \quad (1.4.19)$$

Bu eksen etrafında belli bir  $\theta$  açısıyla dönmeyi sağlayan matris ise,  $k$ -yinci "temel dönme matrisi" olarak aşağıdaki denklemlerle tanımlanır.

$$\hat{R}_k = \hat{R}_k(\theta) = \hat{R}(\bar{u}_k, \theta) = e^{\bar{u}_k \theta} \quad (1.4.20)$$

Üç temel dönme matrisinin (1.4.9) denklemi kullanılarak elde edilen ayrıntılı ifadeleri aşağıda gösterilmiştir.

$$\hat{R}_1(\phi) = e^{\bar{u}_1 \phi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \quad (1.4.21)$$

$$\hat{R}_2(\theta) = e^{\bar{u}_2 \theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (1.4.22)$$

$$\hat{R}_3(\psi) = e^{\bar{u}_3 \psi} = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.4.23)$$

### 1.4.3. Dönme Matrislerinin Bazı Özellikleri

Dönme matrislerinin bazı önde gelen özelliklerini yansıtan formüller aşağıda gösterilmiştir.

$$\det(e^{\bar{n}\theta}) = 1 \quad (1.4.24)$$

$$(e^{\bar{n}\theta})^{-1} = (e^{\bar{n}\theta})^t = e^{-\bar{n}\theta} = e^{\bar{n}(-\theta)} = e^{(-\bar{n})\theta} \quad (1.4.25)$$

$$e^{\bar{n}\theta} \bar{n} = \bar{n}, \quad \bar{n}^t e^{\bar{n}\theta} = \bar{n}^t \quad (\text{işlevsizlik formülü}) \quad (1.4.26)$$

$$e^{\bar{n}\theta} \bar{n} = \bar{n} e^{\bar{n}\theta} \neq \bar{n} \quad (1.4.27)$$

$$e^{\bar{n}\theta} e^{\bar{n}\phi} = e^{\bar{n}\phi} e^{\bar{n}\theta} = e^{\bar{n}(\theta+\phi)} \quad (\text{paralel eksen formülü}) \quad (1.4.28)$$

$$e^{\bar{n}\theta} e^{\bar{m}\phi} \neq e^{\bar{m}\phi} e^{\bar{n}\theta} \neq e^{(\bar{n}\theta+\bar{m}\phi)} \quad (\bar{m} \neq \bar{n} \text{ ise}) \quad (1.4.29)$$

$$\partial(e^{\bar{n}\theta})/\partial\theta = e^{\bar{n}\theta} \bar{n} = \bar{n} e^{\bar{n}\theta} \quad (\text{türev formülü}) \quad (1.4.30)$$

Temel dönme ve temel dikeysıra matrisleri ise, aşağıdaki özellikleri paylaşırlar.

$$e^{\bar{u}_k \theta} \bar{u}_k = \bar{u}_k, \quad \bar{u}_k^t e^{\bar{u}_k \theta} = \bar{u}_k^t \quad (1.4.31)$$

$$e^{\bar{u}_i \theta} \bar{u}_j = \bar{u}_j \cos \theta + \sigma_{ijk} \bar{u}_k \sin \theta \quad (\text{açılım formülü}) \quad (1.4.32)$$

$$\bar{u}_i^t e^{\bar{u}_j \theta} = \bar{u}_i^t \cos \theta + \sigma_{ijk} \bar{u}_k^t \sin \theta \quad (\text{açılım formülü}) \quad (1.4.33)$$

$$e^{\bar{u}_i \pi/2} e^{\bar{u}_j \theta} = e^{\sigma_{ijk} \bar{u}_k \theta} e^{\bar{u}_i \pi/2} \quad (i \neq j \text{ için kaydırma formülü}) \quad (1.4.34)$$

$$e^{\bar{u}_i \pi} e^{\bar{u}_j \theta} = e^{-\bar{u}_j \theta} e^{\bar{u}_i \pi} \quad (i \neq j \text{ için kaydırma formülü}) \quad (1.4.35)$$

$$e^{\tilde{u}_k \pi/2} e^{\tilde{u}_k \theta} = e^{\tilde{u}_k \theta} e^{\tilde{u}_k \pi/2} = e^{\tilde{u}_k(\theta + \pi/2)} \quad (1.4.36)$$

$$e^{\tilde{u}_k \pi} e^{\tilde{u}_k \theta} = e^{\tilde{u}_k \theta} e^{\tilde{u}_k \pi} = e^{\tilde{u}_k(\theta + \pi)} \quad (1.4.37)$$

(1.4.32), (1.4.33), (1.4.34) denklemlerinde yer alan  $\sigma_{ijk}$  işaret simgesi,  $i \neq j \neq k$  için şöyle tanımlanmıştır.

$$\sigma_{ijk} = \begin{cases} +1, & ijk = 123, 231, 312 \text{ ise} \\ -1, & ijk = 321, 132, 213 \text{ ise} \end{cases} \quad (1.4.38)$$

#### 1.4.4. Örnek

Bu örnek,  $\mathcal{F}_a$  gibi bir eksen takımında gözlemlenen bir dönme işlemi hakkındadır. İki aşamalı bu dönme işlemi, şematik olarak aşağıda gösterilmiştir.

$$\vec{p} = b \vec{u}_1^{(a)} \xrightarrow{\text{dönme}[\vec{u}_2^{(a)}, \theta]} \vec{q} \xrightarrow{\text{dönme}[\vec{u}_3^{(a)}, \psi]} \vec{r} \quad (1.4.39)$$

Bu işlem sonucunda ortaya çıkan vektörleri belirlemek amacıyla, ilgili vektörlerin  $\mathcal{F}_a$  eksen takımındaki üstyazıtsız matris gösterimleri kullanılarak dönme işleminin iki aşaması için aşağıdaki denklemler yazılabilir.

$$\vec{q} = \hat{R}_2(\theta) \vec{p} = e^{\tilde{u}_2 \theta} (b \vec{u}_1) = b e^{\tilde{u}_2 \theta} \vec{u}_1 \quad (1.4.40)$$

$$\vec{r} = \hat{R}_3(\psi) \vec{q} = e^{\tilde{u}_3 \psi} (b e^{\tilde{u}_2 \theta} \vec{u}_1) = b e^{\tilde{u}_3 \psi} e^{\tilde{u}_2 \theta} \vec{u}_1 \quad (1.4.41)$$

Kısım 1.4.3'teki açılım formülleri kullanılarak (1.4.40) ve (1.4.41) denklemleri üzerinde aşağıdaki işlemler yapılabilir.

$$\vec{q} = b e^{\tilde{u}_2 \theta} \vec{u}_1 = b(\vec{u}_1 \cos \theta - \vec{u}_3 \sin \theta) = \vec{u}_1 (b \cos \theta) - \vec{u}_3 (b \sin \theta) \quad (1.4.42)$$

$$\vec{r} = b e^{\tilde{u}_3 \psi} (\vec{u}_1 \cos \theta - \vec{u}_3 \sin \theta) = b[(e^{\tilde{u}_3 \psi} \vec{u}_1) \cos \theta - (e^{\tilde{u}_3 \psi} \vec{u}_3) \sin \theta] \Rightarrow$$

$$\vec{r} = b[(\vec{u}_1 \cos \psi + \vec{u}_2 \sin \psi) \cos \theta - \vec{u}_3 \sin \theta] \Rightarrow$$

$$\vec{r} = \vec{u}_1 (b \cos \psi \cos \theta) + \vec{u}_2 (b \sin \psi \cos \theta) - \vec{u}_3 (b \sin \theta) \quad (1.4.43)$$

(1.4.42) ve (1.4.43) matris denklemlerinde,  $\vec{q} = \vec{q}^{(a)}$ ,  $\vec{r} = \vec{r}^{(a)}$ , ve  $k = 1, 2, 3$  için  $\vec{u}_k = \vec{u}_k^{(a/a)}$  olduğu göz önüne alınarak söz konusu denklemlerin vektör karşılıkları şöyle yazılabilir.

$$\vec{q} = \vec{u}_1^{(a)} (b \cos \theta) - \vec{u}_3^{(a)} (b \sin \theta) \quad (1.4.44)$$

$$\vec{r} = \vec{u}_1^{(a)} (b \cos \psi \cos \theta) + \vec{u}_2^{(a)} (b \sin \psi \cos \theta) - \vec{u}_3^{(a)} (b \sin \theta) \quad (1.4.45)$$

### 1.5. Bir Vektörün Değişik Eksen Takımlarındaki Matris Gösterimleri

Herhangi bir  $\vec{r}$  vektörü,  $\mathcal{F}_a$  ve  $\mathcal{F}_b$  gibi iki farklı eksen takımında çözüştürülebilir. Şöyle ki,

$$\vec{r} = \vec{u}_1^{(a)} r_1^{(a)} + \vec{u}_2^{(a)} r_2^{(a)} + \vec{u}_3^{(a)} r_3^{(a)} = \vec{u}_1^{(b)} r_1^{(b)} + \vec{u}_2^{(b)} r_2^{(b)} + \vec{u}_3^{(b)} r_3^{(b)} \quad (1.5.1)$$

(1.5.1) denklemindeki bileşenler, şöyle tanımlanmıştır.

$$r_k^{(a)} = \vec{r} \cdot \vec{u}_k^{(a)}, \quad r_k^{(b)} = \vec{r} \cdot \vec{u}_k^{(b)} \quad (1.5.2)$$

Söz konusu bileşenler kullanılarak aşağıdaki biçimlerde gösterilebilen dikeysıra matrisleri oluşturulabilir.

$$\bar{r}^{(a)} = [\vec{r}]^{(a)} = [\vec{r}]|_{\mathcal{F}_a} = \begin{bmatrix} r_1^{(a)} \\ r_2^{(a)} \\ r_3^{(a)} \end{bmatrix} \quad (1.5.3)$$

$$\bar{r}^{(b)} = [\vec{r}]^{(b)} = [\vec{r}]|_{\mathcal{F}_b} = \begin{bmatrix} r_1^{(b)} \\ r_2^{(b)} \\ r_3^{(b)} \end{bmatrix} \quad (1.5.4)$$

Yukarıdaki  $\bar{r}^{(a)}$  ve  $\bar{r}^{(b)}$  dikeysıra matrisleri, aynı  $\vec{r}$  vektörünün  $\mathcal{F}_a$  ve  $\mathcal{F}_b$  eksen takımlarındaki matris gösterimleri olarak adlandırılırlar. Eğer  $\mathcal{F}_a$  ve  $\mathcal{F}_b$  çakışık ya da eş yönlü paralel değillerse,  $\bar{r}^{(a)}$  ve  $\bar{r}^{(b)}$ , iki farklı matris olarak ortaya çıkar. Yani, genelde,

$$\bar{r}^{(a)} \neq \bar{r}^{(b)} \quad (1.5.5)$$

Bununla birlikte,  $\bar{r}^{(a)}$  ve  $\bar{r}^{(b)}$  arasında aynı  $\vec{r}$  vektörünü temsil ettikleri için bir ilinti vardır. Bu ilinti, şöyle ifade edilebilir.

$$\bar{r}^{(a)} = \hat{C}^{(a,b)} \bar{r}^{(b)} \quad (1.5.6)$$

(1.5.6) denkleminde görülen  $\hat{C}^{(a,b)}$ , "bileşen dönüşüm matrisi", ya da kısaca, "dönüşüm matrisi" olarak adlandırılır. Aynı denkleme göre,  $\hat{C}^{(a,b)}$  matrisi,  $\vec{r}$  vektörünün  $\mathcal{F}_b$  eksen takımındaki bileşenlerini  $\mathcal{F}_a$  eksen takımındaki bileşenlerine dönüştürmektedir.

Öte yandan, (1.5.6) denklemi şöyle de yazılabilir.

$$\bar{r}^{(b)} = \hat{C}^{(b,a)} \bar{r}^{(a)} \Rightarrow \bar{r}^{(a)} = [\hat{C}^{(b,a)}]^{-1} \bar{r}^{(b)} \quad (1.5.7)$$

(1.5.6) ve (1.5.7) denklemleri karşılaştırılınca, şu sonuca varılır.

$$[\hat{C}^{(b,a)}]^{-1} = \hat{C}^{(a,b)} \quad (1.5.8)$$

Dönüşüm matrisinin bir diğer önemli özelliği de aşağıda gösterilmiştir.

Normal olarak, belli bir kinematik inceleme sürecinde göz önüne alınan eksen takımlarının tümünün eksenlerinde aynı ölçek kullanılır. Böyle bir durumda, gözlemlenen  $\vec{r}$  vektörünün



büyüklüğü tüm eksen takımlarında aynı görünür. Bu olgu,  $\vec{r}$  vektörünün  $\mathcal{F}_a$  ve  $\mathcal{F}_b$  eksen takımlarındaki matris gösterimleri için şöyle ifade edilir.

$$r^2 = |\vec{r}|^2 = \vec{r} \cdot \vec{r} = \bar{r}^{(a)t} \bar{r}^{(a)} = \bar{r}^{(b)t} \bar{r}^{(b)} \quad (1.5.9)$$

(1.5.9) denklemi, (1.5.6) denklemi kullanılarak şöyle yazılabilir.

$$[\hat{C}^{(a,b)} \bar{r}^{(b)}]^t [\hat{C}^{(a,b)} \bar{r}^{(b)}] = \bar{r}^{(b)t} [\hat{C}^{(a,b)t} \hat{C}^{(a,b)}] \bar{r}^{(b)} = \bar{r}^{(b)t} \bar{r}^{(b)} \quad (1.5.10)$$

(1.5.10) denklemden şu sonuç çıkar.

$$\hat{C}^{(a,b)t} \hat{C}^{(a,b)} = \hat{I} \Rightarrow \hat{C}^{(a,b)t} = [\hat{C}^{(a,b)}]^{-1} \quad (1.5.11)$$

(1.5.11) ve (1.5.8) denklemlerinden çıkan sonuç ise aşağıdaki özelliştir.

$$\hat{C}^{(b,a)} = [\hat{C}^{(a,b)}]^{-1} = \hat{C}^{(a,b)t} \quad (1.5.12)$$

## 1.6. Dönüşüm Matrisi İfadeleri

### 1.6.1. Dönüşüm Matrisinin Temel Birim Vektörler Cinsinden İfade Edilmesi

$\mathcal{F}_b$  eksen takımının temel birim vektörleri,  $k = 1, 2, 3$  için,  $\mathcal{F}_a$  eksen takımında aşağıdaki dikeysıra matrisleri biçiminde gösterilebilir.

$$\bar{u}_k^{(b/a)} = [\bar{u}_k^{(b)}]^{(a)} = \hat{C}^{(a,b)} [\bar{u}_k^{(b)}]^{(b)} = \hat{C}^{(a,b)} \bar{u}_k^{(b/b)} = \hat{C}^{(a,b)} \bar{u}_k \quad (1.6.1)$$

(1.6.1) denklemindeki  $\bar{u}_k$  artçarpanı, çarpılan matrisin  $k$ -yinci dikeysirasını seçer. Buna göre,  $\bar{u}_k^{(b/a)}$  dikeysıra matrisi,  $\hat{C}^{(a,b)}$  kare matrisinin  $k$ -yinci dikeysirası olmaktadır. Dolayısıyla,  $\hat{C}^{(a,b)}$  matrisi, aşağıdaki ayrıntıyla ifade edilebilir.

$$\hat{C}^{(a,b)} = [\bar{u}_1^{(b/a)} \quad \bar{u}_2^{(b/a)} \quad \bar{u}_3^{(b/a)}] \quad (1.6.2)$$

Öte yandan, (1.6.1) denklemden,  $a$  ve  $b$  indislerinin yeri değiştirilerek ve (1.5.12) denklemi kullanılarak şu ilişkiler elde edilir.

$$\bar{u}_k^{(a/b)} = \hat{C}^{(b,a)} \bar{u}_k \Rightarrow \bar{u}_k^{(a/b)t} = \bar{u}_k^t \hat{C}^{(b,a)t} = \bar{u}_k^t \hat{C}^{(a,b)} \quad (1.6.3)$$

(1.6.3) denklemindeki  $\bar{u}_k^t$  önçarpanı ise, çarpılan matrisin  $k$ -yinci yataysirasını seçer. Buna göre, (1.6.3) denklemden şu sonuç çıkar.

$$\hat{C}^{(a,b)} = \begin{bmatrix} \bar{u}_1^{(a/b)t} \\ \bar{u}_2^{(a/b)t} \\ \bar{u}_3^{(a/b)t} \end{bmatrix} \quad (1.6.4)$$

Not: (1.6.4) denklemindeki yataysıra matrislerinin üstyazıtlarıyla (1.6.2) denklemindeki dikeysıra matrislerinin üstyazıtları arasındaki fark, gözden kaçırılmaması gereken bir husustur.

### 1.6.2. Dönüşüm Matrisinin Yönelim Kosinüsleri Cinsinden İfade Edilmesi

$\mathcal{F}_b$  ve  $\mathcal{F}_a$  eksen takımlarının temel birim vektörleri arasındaki açılar, "yönelim açıları" olarak tanımlanırlar. Bu açılar,  $\mathcal{F}_b$  eksen takımının  $\mathcal{F}_a$  eksen takımına göre yönelimini ifade etmek üzere şöyle gösterilirler.

$$\theta_{ij}^{(a,b)} = \sphericalangle[\vec{u}_i^{(a)} \rightarrow \vec{u}_j^{(b)}] \quad (1.6.5)$$

Yönelim açılarının kosinüsleri ise, "yönelim kosinüsleri" olarak tanımlanıp aşağıdaki gibi gösterilirler.

$$c_{ij}^{(a,b)} = \cos \theta_{ij}^{(a,b)} \quad (1.6.6)$$

Yönelim kosinüslerinden  $c_{ij}^{(a,b)}$ ,  $\vec{u}_i^{(a)}$  ile  $\vec{u}_j^{(b)}$  birim vektörleri cinsinden şöyle ifade edilir.

$$c_{ij}^{(a,b)} = \vec{u}_i^{(a)} \cdot \vec{u}_j^{(b)} \quad (1.6.7)$$

(1.6.7) denklemi, ilgili vektörlerin  $\mathcal{F}_a$  eksen takımındaki matris gösterimleri kullanılarak şöyle de yazılabilir.

$$c_{ij}^{(a,b)} = \vec{u}_i^{(a/a)t} \vec{u}_j^{(b/a)} = \vec{u}_i^t \vec{u}_j^{(b/a)} \quad (1.6.8)$$

(1.6.8) denklemi ise, (1.6.1) denklemi sayesinde şöyle yazılabilir.

$$c_{ij}^{(a,b)} = \vec{u}_i^t \hat{C}^{(a,b)} \vec{u}_j \quad (1.6.9)$$

(1.6.9) denkleminde,  $\vec{u}_i^t$  ile  $\vec{u}_j$  çarpanları,  $\hat{C}^{(a,b)}$  matrisinin  $i$ -yinci yataysırası ile  $j$ -yinci dikeysırasındaki elemanı seçerler. Dolayısıyla,  $\hat{C}^{(a,b)}$  matrisi, yönelim kosinüsleri cinsinden aşağıda gösterilen ayrıntıyla ifade edilebilir.

$$\hat{C}^{(a,b)} = \begin{bmatrix} c_{11}^{(a,b)} & c_{12}^{(a,b)} & c_{13}^{(a,b)} \\ c_{21}^{(a,b)} & c_{22}^{(a,b)} & c_{23}^{(a,b)} \\ c_{31}^{(a,b)} & c_{32}^{(a,b)} & c_{33}^{(a,b)} \end{bmatrix} \quad (1.6.10)$$

### 1.6.3. Dönüşüm Matrisinin Dönme Matrisi Olarak İfade Edilmesi

$\mathcal{F}_b$  eksen takımı,  $\mathcal{F}_a$  eksen takımının aynı orijine ötelenmesi ve daha sonra belli bir eksen etrafında döndürülmesiyle elde edilebilir. Bu durum, şematik olarak aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$\mathcal{F}_a \xrightarrow{\text{dönme}[\vec{n},\theta]} \mathcal{F}_b \quad (1.6.11)$$

Doğal olarak iki eksen takımının temel vektörleri de,  $k = 1, 2, 3$  için, aşağıda gösterildiği gibi aynı dönme ilişkisi içinde olurlar.

$$\vec{u}_k^{(a)} \xrightarrow{\text{dönme}[\vec{n},\theta]} \vec{u}_k^{(b)} \quad (1.6.12)$$

Yukarıdaki şematik gösterimi ifade etmek üzere, dönme işleminin  $\mathcal{F}_a$  eksen takımında gözlemlendiği varsayılarak, aşağıdaki matris denklemi yazılabilir.

$$\begin{aligned} [\vec{u}_k^{(b)}]^{(a)} &= \hat{R}(\vec{n}^{(a)}, \theta) [\vec{u}_k^{(a)}]^{(a)} \Rightarrow \\ \vec{u}_k^{(b/a)} &= e^{\vec{n}^{(a)}\theta} \vec{u}_k^{(a/a)} = e^{\vec{n}^{(a)}\theta} \vec{u}_k \end{aligned} \quad (1.6.13)$$

Öte yandan,  $\vec{u}_k^{(b/a)}$ , daha önceki (1.6.1) dönüşüm denklemi ile şöyle ifade edilmişti.

$$\vec{u}_k^{(b/a)} = \hat{C}^{(a,b)} \vec{u}_k^{(b/b)} = \hat{C}^{(a,b)} \vec{u}_k \quad (1.6.14)$$

(1.6.13) ve (1.6.14) denklemleri, dönüşüm ve dönme matrislerinin, aşağıda ayrıca yazıldığı gibi, eşit olduklarını göstermektedir.

$$\hat{C}^{(a,b)} = \hat{R}(\vec{n}^{(a)}, \theta) = e^{\vec{n}^{(a)}\theta} \quad (1.6.15)$$

Yukarıdaki denklemlerde,  $\vec{n}$  vektörünün  $\mathcal{F}_a$  eksen takımındaki matris gösterimi olan  $\vec{n}^{(a)}$  kullanılmıştır. Aslında,  $\vec{n}$  vektörünün  $\mathcal{F}_b$  eksen takımındaki matris gösterimi olan  $\vec{n}^{(b)}$  de kullanılabilirdi. Bunun nedeni,  $\vec{n}$  vektörünün dönme eksenini üzerinde olmasından dolayı, dönme işleminden etkilenmemesi ve  $\vec{n}^{(b)} = \vec{n}^{(a)}$  olmasıdır. Ancak, söz konusu dönme işlemi,  $\mathcal{F}_c$  gibi farklı bir üçüncü eksen takımında gözlemlenirse, bu eşitlik kaybolur. Yani,  $\vec{n}^{(c)} \neq \vec{n}^{(b)} = \vec{n}^{(a)}$ . Dolayısıyla, (1.6.9) denklemi kullanılırken,  $\vec{n}$  vektörünün ifade edildiği eksen takımının  $\mathcal{F}_a$  ya da  $\mathcal{F}_b$  eksen takımlarında biri olmasına dikkat etmek gerekir. Bu kritik husus, şöyle ifade edilebilir.

$$\hat{C}^{(a,b)} = e^{\vec{n}^{(a)}\theta} = e^{\vec{n}^{(b)}\theta} \neq e^{\vec{n}^{(c)}\theta} \quad (1.6.16)$$

#### 1.6.4. Dönüşüm Matrisinin Euler Açılı Cinsinden İfade Edilmesi

(1.5.12) denklemine göre,  $\hat{C}^{(a,b)}$  ortonormal bir matristir, yani tersi devriğine (transpozuna) eşittir. İşte bu nedenle,  $\hat{C}^{(a,b)}$  yalnızca üç bağımsız parametre cinsinden ifade edilebilir. Euler açıları kullanıldığında, bu üç bağımsız parametre, önceden belirlenmiş eksenler etrafındaki dönmeleri gösteren birer açı olarak seçilmiş olur. Söz konusu eksenlerden her biri, geleneksel olarak, bir eksen takımının eksenlerinden biri olarak belirlenir. Belirlenen eksenlere göre, çeşitli Euler açısı sıralamaları ortaya çıkar. Bu sıralamaları genel olarak temsil eden  $i$ - $j$ - $k$  sıralamasına göre,  $\mathcal{F}_a$  eksen takımının  $\mathcal{F}_b$  eksen takımına dönüşü, aşağıda şematik olarak gösterilen üç aşamalı ardışık dönme işlemiyle gerçekleştirilir.

$$\mathcal{F}_a \xrightarrow{\text{dönme}[\vec{u}_i^{(a)}, \phi]} \mathcal{F}_m \xrightarrow{\text{dönme}[\vec{u}_j^{(m)}, \theta]} \mathcal{F}_n \xrightarrow{\text{dönme}[\vec{u}_k^{(n)}, \psi]} \mathcal{F}_b \quad (1.6.17)$$

Yukarıdaki şemada,  $\mathcal{F}_m$  ve  $\mathcal{F}_n$ , ara eksen takımlarıdır. Bu şemaya göre,  $\hat{C}^{(a,b)}$  şöyle ifade edilir.

$$\hat{C}^{(a,b)} = \hat{C}^{(a,m)} \hat{C}^{(m,n)} \hat{C}^{(n,b)} \quad (1.6.18)$$

(1.6.18) denklemindeki dönüşüm matrisleri, (1.6.15) denklemi uyarınca, birer dönme matrisi olarak şöyle ifade edilirler.

$$\hat{C}^{(a,m)} = e^{\tilde{u}_i^{(a/a)}\phi} = e^{\tilde{u}_i\phi} = \hat{R}_i(\phi) \quad (1.6.19)$$

$$\hat{C}^{(m,n)} = e^{\tilde{u}_j^{(m/m)}\theta} = e^{\tilde{u}_j\theta} = \hat{R}_j(\theta) \quad (1.6.20)$$

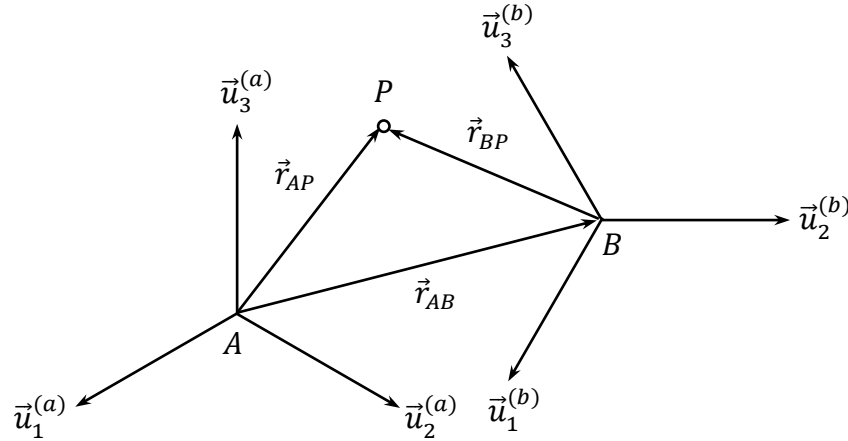
$$\hat{C}^{(n,b)} = e^{\tilde{u}_k^{(n/n)}\psi} = e^{\tilde{u}_k\psi} = \hat{R}_k(\psi) \quad (1.6.21)$$

Böylece,  $\hat{C}^{(a,b)}$ , aşağıda görülen biçimde elde edilmiş olur.

$$\hat{C}^{(a,b)} = e^{\tilde{u}_i\phi} e^{\tilde{u}_j\theta} e^{\tilde{u}_k\psi} = \hat{R}_i(\phi)\hat{R}_j(\theta)\hat{R}_k(\psi) \quad (1.6.22)$$

Robotik alanında genel olarak 1-2-3 ve 3-2-3 sıralamaları kullanılmaktadır. Araç dinamiği alanında ise, tüm kara, hava ve deniz araçlarını kapsamak üzere, neredeyse istisnasız, 3-2-1 sıralaması kullanılmaktadır. Ne var ki, Euler'in bizzat öne sürüp kullandığı sıralama, 3-1-3 sıralamasıdır. Bu sıralama, daha çok, jiroskop rotorları ve kendi etrafında dönen gök cisimleri gibi, simetrik olup simetri eksenini etrafında diğer eksenlere göre çok daha hızlı dönen cisimleri incelemek için kullanışlı olmaktadır.

### 1.7. Bir Noktanın Farklı Eksen Takımlarına Göre Konumu ve Homojen Dönüşüm Matrisleri



Şekil 1.3. Bir Noktanın Farklı Eksen Takımlarında Gözlemlenmesi

Şekil 1.3'te gösterildiği gibi, bir  $P$  noktası, birbirine göre ötelenmiş ( $A \rightarrow B$ ) ve dönmüş ( $a \rightarrow b$ ) olan  $\mathcal{F}_a(A)$  ve  $\mathcal{F}_b(B)$  gibi iki farklı eksen takımında gözlemlenmektedir.

$P$  noktasının  $\mathcal{F}_a(A)$  ve  $\mathcal{F}_b(B)$  eksen takımlarına göre konumunu gösteren  $\vec{r}_{AP}$  ve  $\vec{r}_{BP}$  vektörleri arasındaki ilişki, "ötelenme vektörü" olan  $\vec{r}_{AB}$  aracılığıyla şu şekilde sağlanır.

$$\vec{r}_{AP} = \vec{r}_{AB} + \vec{r}_{BP} \quad (1.7.1)$$

(1.7.1) vektör denklemi,  $\vec{r}_{AP}$  ve  $\vec{r}_{BP}$  vektörlerinin  $\mathcal{F}_a(A)$  ve  $\mathcal{F}_b(B)$  eksen takımlarındaki matris gösterimleri kullanılarak aşağıdaki matris denklemi biçiminde de yazılabilir.

$$\vec{r}_{AP}^{(a)} = \hat{C}^{(a,b)} \vec{r}_{BP}^{(b)} + \vec{r}_{AB}^{(a)} \quad (1.7.2)$$

(1.7.2) denklemi,  $P$  noktasının  $\mathcal{F}_a(A)$  ve  $\mathcal{F}_b(B)$  eksen takımlarındaki görünüşleri arasında ötelenme teriminin varlığı nedeniyle "homojen olmayan" ya da diğer bir deyişle "eklentili" (biased) bir ilişki teşkil etmektedir. Bu ilişkiyi homojenleştirmek için (1.7.2) denklemi,  $1 = 1$  denklemiyle genişletilerek şöyle yazılabilir.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{r}_{AP}^{(a)} = \hat{C}^{(a,b)} \vec{r}_{BP}^{(b)} + \vec{r}_{AB}^{(a)} \\ 1 = 1 \end{array} \right\} \quad (1.7.3)$$

(1.7.3) denklem çifti, tek ve homojen bir denklem biçiminde şöyle de yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} \vec{r}_{AP}^{(a)} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{C}^{(a,b)} & \vec{r}_{AB}^{(a)} \\ \vec{0}^t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{r}_{BP}^{(b)} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.7.4)$$

(1.7.4) denklemi, aşağıdaki tanımlara yol açar.

$$\bar{R}_{AP}^{(a)} = \begin{bmatrix} \vec{r}_{AP}^{(a)} \\ 1 \end{bmatrix} : P \text{ noktasının } \mathcal{F}_a(A) \text{'daki } 4 \times 1 \text{ boyutlu matris gösterimi} \quad (1.7.5)$$

$$\bar{R}_{BP}^{(b)} = \begin{bmatrix} \vec{r}_{BP}^{(b)} \\ 1 \end{bmatrix} : P \text{ noktasının } \mathcal{F}_b(B) \text{'deki } 4 \times 1 \text{ boyutlu matris gösterimi} \quad (1.7.6)$$

$$\hat{H}_{AB}^{(a,b)} = \begin{bmatrix} \hat{C}^{(a,b)} & \vec{r}_{AB}^{(a)} \\ \vec{0}^t & 1 \end{bmatrix} : 4 \times 4 \text{ boyutlu homojen dönüşüm matrisi} \quad (1.7.7)$$

Yukarıdaki tanımlar kullanılıncsa, (1.7.4) denklemi, kısaca aşağıdaki derleşik biçimde yazılabilir.

$$\bar{R}_{AP}^{(a)} = \hat{H}_{AB}^{(a,b)} \bar{R}_{BP}^{(b)} \quad (1.7.8)$$

Böylece, görüldüğü gibi, homojen olmayan (1.7.2) denklemi, denklem boyutunun üçten dörde çıkması pahasına, homojen olan (1.7.8) denkleme dönüştürülmüştür.

Dikkat edilirse,  $\hat{H}_{AB}^{(a,b)}$  matrisi iki temel öğeden oluşmaktadır. Birincisi,  $\hat{C}^{(a,b)}$  ile gösterilen "dönme" öğesidir. İkincisi ise,  $\vec{r}_{AB}^{(a)}$  ile gösterilen "ötelenme" öğesidir.

Eğer  $P$  noktası, üç farklı eksen takımında gözlemleniyorsa, o zaman şu denklemler yazılabilir.

Homojen olmayan denklem grubu:

$$\vec{r}_{AP}^{(a)} = \hat{C}^{(a,b)} \vec{r}_{BP}^{(b)} + \vec{r}_{AB}^{(a)} \quad (1.7.9)$$

$$\vec{r}_{BP}^{(b)} = \hat{C}^{(b,c)} \vec{r}_{CP}^{(c)} + \vec{r}_{BC}^{(b)} \quad (1.7.10)$$

$$\vec{r}_{AP}^{(a)} = \hat{C}^{(a,c)} \vec{r}_{CP}^{(c)} + \vec{r}_{AC}^{(a)} = [\hat{C}^{(a,b)} \hat{C}^{(b,c)}] \vec{r}_{CP}^{(c)} + [\hat{C}^{(a,b)} \vec{r}_{BC}^{(b)} + \vec{r}_{AB}^{(a)}] \quad (1.7.11)$$

Homojen denklem grubu:

$$\bar{R}_{AP}^{(a)} = \hat{H}_{AB}^{(a,b)} \bar{R}_{BP}^{(b)} \quad (1.7.12)$$

$$\bar{R}_{BP}^{(b)} = \hat{H}_{BC}^{(b,c)} \bar{R}_{CP}^{(c)} \quad (1.7.13)$$

$$\bar{R}_{AP}^{(a)} = \hat{H}_{AC}^{(a,c)} \bar{R}_{CP}^{(c)} = [\hat{H}_{AB}^{(a,b)} \hat{H}_{BC}^{(b,c)}] \bar{R}_{CP}^{(c)} \quad (1.7.14)$$

Özellikle, (1.7.11) ve (1.7.14) denklemlerinin karşılaştırılması, homojen dönüşüm denklemlerinin peşpeşe yapılan dönüşümlerdeki derleşiklik (kısa ve toplu ifade) avantajını ortaya koymaktadır.

Homojen olmayan dönüşümlerde, bileşke dönme ve bileşke ötelenme terimlerinin ayrı ayrı ifade edilmesi gerekmektedir. Şöyle ki,

$$\hat{C}^{(a,c)} = \hat{C}^{(a,b)} \hat{C}^{(b,c)} \quad (1.7.15)$$

$$\bar{r}_{AC}^{(a)} = \bar{r}_{AB}^{(a)} + \hat{C}^{(a,b)} \bar{r}_{BC}^{(b)} \quad (1.7.16)$$

Oysa, homojen dönüşümlerde, bileşke homojen dönüşüm matrisi, tek bir yalın çarpım denklemiyle ifade edilebilmektedir. Şöyle ki,

$$\hat{H}_{AC}^{(a,c)} = \hat{H}_{AB}^{(a,b)} \hat{H}_{BC}^{(b,c)} \quad (1.7.17)$$

Homojen dönüşüm matrislerine ait bazı özellikler aşağıda belirtilmiştir.

(1.7.7) denkleminden yararlanarak gösterilebilir ki,

$$\det[\hat{H}_{AB}^{(a,b)}] = \det[\hat{C}^{(a,b)}] = 1 \quad (1.7.18)$$

(1.7.8) denklemi,  $\mathcal{F}_a(A)$  ile  $\mathcal{F}_b(B)$ 'nin yeri değiştirilerek ve  $\hat{H}_{AB}^{(a,b)}$  matrisinin tersi alınarak aşağıdaki iki biçimde yazılabilir

$$\bar{R}_{BP}^{(b)} = \hat{H}_{BA}^{(b,a)} \bar{R}_{AP}^{(a)} \quad (1.7.19)$$

$$\bar{R}_{BP}^{(b)} = [\hat{H}_{AB}^{(a,b)}]^{-1} \bar{R}_{AP}^{(a)} \quad (1.7.20)$$

(1.7.19) ve (1.7.20) denklemlerine göre,  $\hat{H}_{AB}^{(a,b)}$  matrisinin tersi şöyle bulunur.

$$[\hat{H}_{AB}^{(a,b)}]^{-1} = \hat{H}_{BA}^{(b,a)} = \begin{bmatrix} \hat{C}^{(b,a)} & \bar{r}_{BA}^{(b)} \\ \bar{0}^t & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{C}^{(a,b)t} & -\hat{C}^{(a,b)t} \bar{r}_{AB}^{(a)} \\ \bar{0}^t & 1 \end{bmatrix} \quad (1.7.21)$$

$\mathcal{F}_a(A)$  ile  $\mathcal{F}_b(B)$  arasındaki ötelenme ve dönme ilişkisi aşağıda gösterilen iki biçimde ifade edilebilir.

$$\mathcal{F}_a(A) \xrightarrow{\text{ötelenme}(A \rightarrow B)} \mathcal{F}_a(B) \xrightarrow{\text{dönme}(a \rightarrow b)} \mathcal{F}_b(B) \quad (1.7.22)$$

$$\mathcal{F}_a(A) \xrightarrow{\text{dönme}(a \rightarrow b)} \mathcal{F}_b(A) \xrightarrow{\text{ötelenme}(A \rightarrow B)} \mathcal{F}_b(B) \quad (1.7.23)$$

Yukarıdaki şemalara göre,  $\hat{H}_{AB}^{(a,b)}$  matrisi şu iki biçimde ayrıştırılabilir.

$$\hat{H}_{AB}^{(a,b)} = \hat{H}_{AB}^{(a,a)} \hat{H}_{BB}^{(a,b)} \quad (\text{önce ötelenme, sonra dönme}) \quad (1.7.24)$$

$$\hat{H}_{AB}^{(a,b)} = \hat{H}_{AA}^{(a,b)} \hat{H}_{AB}^{(b,b)} \quad (\text{önce dönme, sonra ötelenme}) \quad (1.7.25)$$

Yukarıdaki ayrıştırmalarda yer alan  $\hat{H}_{AB}^{(a,a)}$  ve  $\hat{H}_{AB}^{(b,b)}$  matrislerine "yalın ötelenme matrisleri";  $\hat{H}_{AA}^{(a,b)}$  ve  $\hat{H}_{BB}^{(a,b)}$  matrislerine ise "yalın dönme matrisleri" denir. Bu matrislerin ayrıntılı ifadeleri aşağıda gösterilmiştir.

$$\hat{H}_{AB}^{(a,a)} = \begin{bmatrix} \hat{I} & \bar{r}_{AB}^{(a)} \\ \bar{0}^t & 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{H}_{AB}^{(b,b)} = \begin{bmatrix} \hat{I} & \bar{r}_{AB}^{(b)} \\ \bar{0}^t & 1 \end{bmatrix} \quad (1.7.26)$$

$$\hat{H}_{AA}^{(a,b)} = \hat{H}_{BB}^{(a,b)} = \begin{bmatrix} \hat{C}^{(a,b)} & \bar{0} \\ \bar{0}^t & 1 \end{bmatrix} \quad (1.7.27)$$

## 1.8. Bir Vektörün Farklı Eksen Takımlarına Göre Türevleri

### 1.8.1. Bir Vektörün Belli Bir Eksen Takımına Göre Türevi

Bir vektörün türevinin alınması, seçilen eksen takımına göre bağlı bir işlemdir. Örneğin, bir  $\vec{r}$  vektörünün  $\mathcal{F}_a(A)$  ve  $\mathcal{F}_b(B)$  gibi iki farklı eksen takımına göre alınan türevleri aşağıdaki biçimlerde gösterilebilir.

$$D_a \vec{r} = d_a \vec{r} / dt = [d\vec{r}/dt]|_{\mathcal{F}_a} \quad (1.8.1)$$

$$D_b \vec{r} = d_b \vec{r} / dt = [d\vec{r}/dt]|_{\mathcal{F}_b} \quad (1.8.2)$$

Söz konusu vektörün türevi, (1.8.1) denklemine göre alınırken  $\mathcal{F}_a$  eksen takımının yönelimi; (1.8.2) denklemine göre alınırken de  $\mathcal{F}_b$  eksen takımının yönelimi sabit kabul edilir. Türevi alınacak vektör,  $\mathcal{F}_a(A)$  ve  $\mathcal{F}_b(B)$  eksen takımlarında şöyle çözüştürülebilir.

$$\vec{r} = \vec{u}_1^{(a)} r_1^{(a)} + \vec{u}_2^{(a)} r_2^{(a)} + \vec{u}_3^{(a)} r_3^{(a)} = \vec{u}_1^{(b)} r_1^{(b)} + \vec{u}_2^{(b)} r_2^{(b)} + \vec{u}_3^{(b)} r_3^{(b)} \quad (1.8.3)$$

Bu çözüştürmelere göre,  $D_a \vec{r}$  ve  $D_b \vec{r}$  türevleri şöyle ifade edilir.

$$D_a \vec{r} = \vec{u}_1^{(a)} \dot{r}_1^{(a)} + \vec{u}_2^{(a)} \dot{r}_2^{(a)} + \vec{u}_3^{(a)} \dot{r}_3^{(a)} \quad (1.8.4)$$

$$D_b \vec{r} = \vec{u}_1^{(b)} \dot{r}_1^{(b)} + \vec{u}_2^{(b)} \dot{r}_2^{(b)} + \vec{u}_3^{(b)} \dot{r}_3^{(b)} \quad (1.8.5)$$

(1.8.4) ve (1.8.5) denklemlerine göre,  $\vec{r}$  vektörünün ve türevlerinin  $\mathcal{F}_a(A)$  ve  $\mathcal{F}_b(B)$  eksen takımlarındaki matris gösterimleri şöyle ilişkilendirilir.

$$[\vec{r}]^{(a)} = \bar{r}^{(a)} = \begin{bmatrix} r_1^{(a)} \\ r_2^{(a)} \\ r_3^{(a)} \end{bmatrix} \Rightarrow [D_a \vec{r}]^{(a)} = \dot{\bar{r}}^{(a)} = \begin{bmatrix} \dot{r}_1^{(a)} \\ \dot{r}_2^{(a)} \\ \dot{r}_3^{(a)} \end{bmatrix} \quad (1.8.6)$$

$$[\vec{r}]^{(b)} = \vec{r}^{(b)} = \begin{bmatrix} r_1^{(b)} \\ r_2^{(b)} \\ r_3^{(b)} \end{bmatrix} \Rightarrow [D_b \vec{r}]^{(b)} = \dot{\vec{r}}^{(b)} = \begin{bmatrix} \dot{r}_1^{(b)} \\ \dot{r}_2^{(b)} \\ \dot{r}_3^{(b)} \end{bmatrix} \quad (1.8.7)$$

Dikkat edilirse, (1.8.6) ve (1.8.7) denklemleri, çözüştürme ve türev alma eksen takımları aynı ise geçerlidir.

Ne var ki, çözüştürme ve türev alma eksen takımlarının her zaman aynı olmaları gerekmez. Böyle bir durumda, aşağıdaki denklemler yazılabilir.

$$[D_b \vec{r}]^{(a)} = C^{(a,b)} [D_b \vec{r}]^{(b)} = C^{(a,b)} \dot{\vec{r}}^{(b)} \quad (1.8.8)$$

$$[D_a \vec{r}]^{(b)} = C^{(b,a)} [D_a \vec{r}]^{(a)} = C^{(b,a)} \dot{\vec{r}}^{(a)} \quad (1.8.9)$$

(1.8.8) ve (1.8.9) denklemlerinin herbirinde, türev alma eksen takımı aynıdır. Bununla birlikte, türev alındıktan sonra ortaya çıkan vektörün farklı iki eksen takımındaki matris gösterimleri ilişkilendirilmiştir.

### 1.8.2. Bir Vektörün Farklı Eksen Takımlarına Göre Türevlerinin Arasındaki İlişki ve Bağlı Açısız Hız Tanımı

Bir  $\vec{r}$  vektörünün  $\mathcal{F}_a(A)$  ve  $\mathcal{F}_b(B)$  gibi birbirlerine göre açısız olarak farklı hareket eden iki eksen takımına göre alınan türevleri, "Coriolis Teoremi" ya da "Transport Teoremi" olarak bilinen teorem sayesinde ilişkilendirilir. Bu teorem şöyle ifade edilir.

$$D_a \vec{r} = D_b \vec{r} + \vec{\omega}_{b/a} \times \vec{r} \quad (1.8.10)$$

(1.8.10) denklemindeki  $\vec{\omega}_{b/a}$  vektörü,  $\mathcal{F}_b(B)$ 'nin  $\mathcal{F}_a(A)$ 'ya göre "bağlı açısız hızı" olarak tanımlanır. Aynı denklemden, sol tarafın  $\mathcal{F}_a(A)$ 'daki, sağ tarafın ise  $\mathcal{F}_b(B)$ 'deki matris gösterimleri kullanılarak aşağıdaki matris denklemi elde edilir.

$$\dot{\vec{r}}^{(a)} = \hat{C}^{(a,b)} [\dot{\vec{r}}^{(b)} + \vec{\omega}_{b/a}^{(b)} \vec{r}^{(b)}] \quad (1.8.11)$$

(1.8.11) denklemi, türev almadan önce yazılan aşağıdaki dönüşüm denkleminde yola çıkılarak da elde edilebilir.

$$\vec{r}^{(a)} = \hat{C}^{(a,b)} \vec{r}^{(b)} \quad (1.8.12)$$

(1.8.12) denklemin taraf tarafa alınan türevi, aşağıdaki denklemi verir.

$$\dot{\vec{r}}^{(a)} = \hat{C}^{(a,b)} \dot{\vec{r}}^{(b)} + \dot{\hat{C}}^{(a,b)} \vec{r}^{(b)} = \hat{C}^{(a,b)} [\dot{\vec{r}}^{(b)} + \dot{\hat{C}}^{(b,a)} \hat{C}^{(a,b)} \vec{r}^{(b)}] \quad (1.8.13)$$

(1.8.11) ve (1.8.13) denklemleri karşılaştırılınca, iki eksen arasındaki bağlı açısız hızı, iki eksen arasındaki bağlı yönelim matrisiyle (yani dönüşüm matrisiyle) ilişkilendiren aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\vec{\omega}_{b/a}^{(b)} = \dot{\hat{C}}^{(b,a)} \hat{C}^{(a,b)} \Rightarrow \vec{\omega}_{b/a}^{(b)} = \text{asm}^{-1} [\dot{\hat{C}}^{(b,a)} \hat{C}^{(a,b)}] \quad (1.8.14)$$



(1.8.14) denkleminde de aşağıdaki denklem elde edilebilir.

$$\vec{\omega}_{b/a}^{(a)} = \hat{C}^{(a,b)} \hat{C}^{(b,a)} \Rightarrow \vec{\omega}_{b/a}^{(a)} = \text{asm}^{-1}[\hat{C}^{(a,b)} \hat{C}^{(b,a)}] \quad (1.8.15)$$

(1.8.14) ve (1.8.15) denklemlerinde kullanılmış olan  $\text{asm}^{-1}$  işleci, daha önce Kısım 1.3'te tanıtılan "asm" (antisimetrik matris türetme) işlecinin tersidir. Buradan çıkartılan sonuca göre de,  $\hat{C}^{(b,a)} \hat{C}^{(a,b)}$  ve  $\hat{C}^{(a,b)} \hat{C}^{(b,a)}$  matrisleri, birer antisimetrik matris olmaktadır.

Eğer  $\vec{r}$  vektörünün türevleri, birbirlerinden farklı açısız hareketleri olan üç eksen takımına göre alınırsa, (1.8.10) denklemi, şu üç şekilde yazılabilir.

$$D_a \vec{r} = D_b \vec{r} + \vec{\omega}_{b/a} \times \vec{r} \quad (1.8.16)$$

$$D_b \vec{r} = D_c \vec{r} + \vec{\omega}_{c/b} \times \vec{r} \quad (1.8.17)$$

$$D_a \vec{r} = D_c \vec{r} + \vec{\omega}_{c/a} \times \vec{r} \quad (1.8.18)$$

Yukarıdaki üç denklemden şu sonuç çıkar.

$$\vec{\omega}_{c/a} = \vec{\omega}_{c/b} + \vec{\omega}_{b/a} \quad (1.8.19)$$

(1.8.19) denklemi, bağıl açısız hızların bileşkesinin yalnızca toplama yoluyla elde edilebileceğini göstermektedir. Oysa, daha önce de görüldüğü gibi, bağıl yönelim matrislerinin bileşkesi, yalnızca çarpım yoluyla elde edilmektedir. Şöyle ki,

$$\hat{C}^{(a,c)} = \hat{C}^{(a,b)} \hat{C}^{(b,c)} \quad (1.8.20)$$

### 1.8.3. Bir Vektörün Farklı Eksen Takımlarına Göre İkinci Türevlerinin Arasındaki İlişki ve Bağıl Açısız İvme Tanımı

Coriolis/Transport teoremi uygulanarak (1.8.10) denkleminin taraf tarafa bir kez daha türevi, aşağıdaki gösterildiği gibi alınabilir.

$$\begin{aligned} D_a^2 \vec{r} &= D_a(D_a \vec{r}) = D_a(D_b \vec{r} + \vec{\omega}_{b/a} \times \vec{r}) \Rightarrow \\ D_a^2 \vec{r} &= D_b(D_b \vec{r} + \vec{\omega}_{b/a} \times \vec{r}) + \vec{\omega}_{b/a} \times (D_b \vec{r} + \vec{\omega}_{b/a} \times \vec{r}) \Rightarrow \\ D_a^2 \vec{r} &= D_b^2 \vec{r} + \vec{\omega}_{b/a} \times (D_b \vec{r}) + \vec{\alpha}_{b/a} \times \vec{r} \\ &\quad + \vec{\omega}_{b/a} \times (D_b \vec{r} + \vec{\omega}_{b/a} \times \vec{r}) \Rightarrow \\ D_a^2 \vec{r} &= D_b^2 \vec{r} + 2\vec{\omega}_{b/a} \times (D_b \vec{r}) \\ &\quad + \vec{\alpha}_{b/a} \times \vec{r} + \vec{\omega}_{b/a} \times (\vec{\omega}_{b/a} \times \vec{r}) \end{aligned} \quad (1.8.21)$$

(1.8.21) denklemindeki  $\vec{\alpha}_{b/a}$  vektörü,  $\mathcal{F}_b(B)$ 'nin  $\mathcal{F}_a(A)$ 'ya göre "bağıl açısız ivmesi" olarak tanımlanır ve iki eksen takımı arasındaki bağıl açısız hız vektöründen aşağıdaki türev alma işlemiyle elde edilir.

$$\vec{\alpha}_{b/a} = D_b \vec{\omega}_{b/a} \quad (1.8.22)$$

Bununla birlikte, Coriolis/Transport teoremi uyarınca ve  $\vec{\omega}_{b/a} \times \vec{\omega}_{b/a} = \vec{0}$  olduğu için  $\vec{\alpha}_{b/a}$  aşağıdaki türev alma işlemiyle de elde edilebilir.

$$\vec{\alpha}_{b/a} = D_a \vec{\omega}_{b/a} \quad (1.8.23)$$

Ancak, dikkat etmek gerekir ki, (1.8.22) ve (1.8.23) denklemleri, yalnızca  $\mathcal{F}_a(A)$  ile  $\mathcal{F}_b(B)$  eksen takımları için geçerlidir. Bir başka deyişle,  $\vec{\omega}_{b/a}$  vektörünün üçüncü bir  $\mathcal{F}_c(C)$  eksen takımına göre alınan türevi,  $\vec{\alpha}_{b/a}$  vektörünü vermez. Bu durum kısaca şöyle ifade edilebilir.

$$\vec{\alpha}_{b/a} = D_a \vec{\omega}_{b/a} = D_b \vec{\omega}_{b/a} \neq D_c \vec{\omega}_{b/a} \quad (1.8.24)$$

Yine Coriolis/Transport teoremine göre,  $D_c \vec{\omega}_{b/a}$  türevi doğrudan  $\vec{\alpha}_{b/a}$  vektörünü vermese de,  $\vec{\alpha}_{b/a}$  vektörüyle aşağıda gösterilen biçimlerde ilişkilidir.

$$D_c \vec{\omega}_{b/a} = \vec{\alpha}_{b/a} + \vec{\omega}_{a/c} \times \vec{\omega}_{b/a} = \vec{\alpha}_{b/a} + \vec{\omega}_{b/c} \times \vec{\omega}_{b/a} \quad (1.8.25)$$

Öte yandan, daha önce, üç farklı eksen takımı söz konusu olduğunda, bağıl açısal hızların bileşkesinin yalnızca toplama yoluyla elde edilebileceği görülmüştü. Bu durum, (1.8.19) denklemiyle şöyle ifade edilmişti.

$$\vec{\omega}_{c/a} = \vec{\omega}_{c/b} + \vec{\omega}_{b/a} \quad (1.8.26)$$

(1.8.26) denkleminin türevi taraf tarafa  $\mathcal{F}_a(A)$  eksen takımına göre alınır, bağıl açısal ivmelerin bileşkesi, aşağıda gösterilen biçimde elde edilir.

$$\begin{aligned} D_a \vec{\omega}_{c/a} &= D_a \vec{\omega}_{c/b} + D_a \vec{\omega}_{b/a} \Rightarrow \\ \vec{\alpha}_{c/a} &= (D_b \vec{\omega}_{c/b} + \vec{\omega}_{b/a} \times \vec{\omega}_{c/b}) + \vec{\alpha}_{b/a} \Rightarrow \\ \vec{\alpha}_{c/a} &= \vec{\alpha}_{c/b} + \vec{\alpha}_{b/a} + \vec{\omega}_{b/a} \times \vec{\omega}_{c/b} \end{aligned} \quad (1.8.27)$$

Görüldüğü gibi, bağıl açısal ivmelerin bileşkesi yalnızca toplama yoluyla elde edilememektedir. Bileşkeye ilgili bağıl açısal hızların vektörel çarpımından oluşan bir terim daha eklenmektedir.

## 1.9. Bir Noktanın Farklı Eksen Takımlarına Göre Hızı ve İvmesi

### 1.9.1. Bir Noktanın Farklı Eksen Takımlarına Göre Hızı

Şekil 1.2'ye tekrar bakıldığında, bir  $P$  noktasının birbirine göre farklı hareket eden (ötelenen ve dönen)  $\mathcal{F}_a(A)$  ve  $\mathcal{F}_b(B)$  gibi iki eksen takımında gözlemlenen bağıl konum vektörleri arasında aşağıdaki ilişkinin olduğu görülmektedir.

$$\vec{r}_{AP} = \vec{r}_{AB} + \vec{r}_{BP} \quad (1.9.1)$$

Eşdeğerli fakat farklı bir notasyonla (1.9.1) denklemi, şöyle de yazılabilir.

$$\vec{r}_{P/A} = \vec{r}_{P/B} + \vec{r}_{B/A} \quad (1.9.2)$$

(1.9.1) ve (1.9.2) denklemlerindeki farklı notasyonlar, matematiksel olarak eşdeğerli olmakla birlikte, sözel olarak farklı birer yorumla şöyle ifade edilirler.

$\vec{r}_{AB}$  :  $A$  noktasından  $B$  noktasına doğru yöneltilmiş konum vektörü.

$\vec{r}_{B/A}$  :  $B$  noktasının  $A$  noktasına göre bağıl konum vektörü.

$P$  noktasının  $\mathcal{F}_a(A)$  ve  $\mathcal{F}_b(B)$  eksen takımlarında gözlemlenen bağıl hızları arasındaki ilişkiyi elde etmek üzere, (1.9.2) denkleminin eksen takımlarından birine göre, örneğin  $\mathcal{F}_a(A)$ 'ya göre, taraf tarafa türevi alınırsa, aşağıdaki denklem ortaya çıkar.

$$D_a \vec{r}_{P/A} = D_a \vec{r}_{P/B} + D_a \vec{r}_{B/A} \quad (1.9.3)$$

(1.9.3) denklemindeki terimler, aşağıdaki gibi gösterilebilen genel bir hız tanımına yol açar.

$$\vec{v}_{P/B/\mathcal{F}_a} = D_a \vec{r}_{P/B} \quad (1.9.4)$$

(1.9.4) denklemini ile tanımlanan hız vektörü, şöyle adlandırılır:  $P$  noktasının  $B$  noktasına göre  $\mathcal{F}_a(A)$  eksen takımına göre türev alınarak elde edilen bağıl hız vektörü.

Dikkat edilirse, genel hız tanımı, aşağıda belirtilen üç temel unsura dayanmaktadır.

1. Hızı istenen nokta:  $P$
2. Referans noktası:  $B$
3. Türev alma eksen takımı:  $\mathcal{F}_a(A)$

(1.9.4) denklemindeki gösterim kullanılarak (1.9.3) denklemini şöyle yazılabilir.

$$\vec{v}_{P/A/\mathcal{F}_a} = \vec{v}_{P/B/\mathcal{F}_a} + \vec{v}_{B/A/\mathcal{F}_a} \quad (1.9.5)$$

Ne var ki,  $\mathcal{F}_b(B)$  eksen takımını kullanan gözlemci, gözlemlediği noktaların hız vektörlerini de aynı eksen takımına göre oluşturmak ister. Bu isteği karşılamak üzere, (1.9.5) denklemini, Coriolis/Transport teoremi kullanılarak şöyle de yazılabilir.

$$\vec{v}_{P/A/\mathcal{F}_a} = \vec{v}_{P/B/\mathcal{F}_b} + \vec{\omega}_{b/a} \times \vec{r}_{P/B} + \vec{v}_{B/A/\mathcal{F}_a} \quad (1.9.6)$$

### 1.9.2. Bir Noktanın Farklı Eksen Takımlarına Göre İvmesi

(1.9.4) denklemindeki genel hız tanımına benzer bir biçimde genel ivme tanımı da aşağıdaki gibi yapılabilir.

$$\vec{a}_{P/B/\mathcal{F}_a} = D_a^2 \vec{r}_{P/B} \quad (1.9.7)$$

Görüldüğü gibi, genel ivme tanımı da, aşağıda belirtilen üç temel unsura dayanmaktadır.

1. İvmesi istenen nokta:  $P$
2. Referans noktası:  $B$
3. Türev alma eksen takımı:  $\mathcal{F}_a(A)$

(1.9.7) denklemindeki gösterim kullanılarak (1.9.3) denklemi, bir kez daha türevi alınarak şöyle yazılabilir.

$$\vec{a}_{P/A/\mathcal{F}_a} = \vec{a}_{P/B/\mathcal{F}_a} + \vec{a}_{B/A/\mathcal{F}_a} \quad (1.9.8)$$

Hız denkleminde olduğu gibi,  $\mathcal{F}_b(B)$  eksen takımını kullanan gözlemci, gözlemlediği noktaların ivme vektörlerini de yine aynı eksen takımına göre oluşturmak ister. Bu isteği karşılamak üzere, (1.9.8) denklemi, Coriolis/Transport teoremi kullanılarak şöyle de yazılabilir.

$$\begin{aligned} \vec{a}_{P/A/\mathcal{F}_a} = & \vec{a}_{P/B/\mathcal{F}_b} + 2\vec{\omega}_{b/a} \times \vec{v}_{P/B/\mathcal{F}_b} + \vec{\alpha}_{b/a} \times \vec{r}_{P/B} \\ & + \vec{\omega}_{b/a} \times (\vec{\omega}_{b/a} \times \vec{r}_{P/B}) + \vec{a}_{B/A/\mathcal{F}_a} \end{aligned} \quad (1.9.9)$$

(1.9.9) denklemindeki terimlerden ikisi, birinci türevlerden oluşmuştur. Bu terimler, aşağıdaki özel adlarla anılırlar.

$$\text{Coriolis İvmesi: } 2\vec{\omega}_{b/a} \times \vec{v}_{P/B/\mathcal{F}_b} \quad (1.9.10)$$

$$\text{Merkezcil İvme: } \vec{\omega}_{b/a} \times (\vec{\omega}_{b/a} \times \vec{r}_{P/B}) \quad (1.9.11)$$

### 1.9.3. Notasyonu Basitleştirilmiş Bağlı Hız ve İvme İfadeleri

Eğer kinematik inceleme süresince yalnızca  $\mathcal{F}_a(A)$  ve  $\mathcal{F}_b(B)$  gibi iki eksen takımı kullanılıyorsa, yukarıdaki ayrıntılı notasyon yerine, aşağıdaki basitleştirilmiş notasyon da kullanılabilir.

$$\vec{r}_{P/A} = \vec{r}, \quad \vec{r}_{P/B} = \vec{r}', \quad \vec{r}_{B/A} = \vec{r}^\circ \quad (1.9.12)$$

$$\vec{v}_{P/A/\mathcal{F}_a} = \vec{v}, \quad \vec{v}_{P/B/\mathcal{F}_b} = \vec{v}', \quad \vec{v}_{B/A/\mathcal{F}_a} = \vec{v}^\circ \quad (1.9.13)$$

$$\vec{a}_{P/A/\mathcal{F}_a} = \vec{a}, \quad \vec{a}_{P/B/\mathcal{F}_b} = \vec{a}', \quad \vec{a}_{B/A/\mathcal{F}_a} = \vec{a}^\circ \quad (1.9.14)$$

$$\vec{\omega}_{b/a} = \vec{\omega}, \quad \vec{\alpha}_{b/a} = \vec{\alpha} \quad (1.9.15)$$

Yukarıdaki basitleştirilmiş notasyon kullanılarak konum, hız, ve ivme denklemleri, aşağıdaki sade görünümüleriyle yazılabilir.

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{r}^\circ \quad (1.9.16)$$

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}' + \vec{v}^\circ \quad (1.9.17)$$

$$\vec{a} = \vec{a}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\alpha} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + \vec{a}^\circ \quad (1.9.18)$$

(1.9.16,17,18) denklemlerini, terimlerin yerine göre  $\mathcal{F}_a(A)$  ve  $\mathcal{F}_b(B)$  eksen takımlarındaki matris gösterimlerini kullanarak da yazmak mümkündür. Bu amaçla,  $\{\vec{r}, \vec{v}, \vec{a}\}$  ve  $\{\vec{r}^\circ, \vec{v}^\circ, \vec{a}^\circ\}$  üçlülerinin  $\mathcal{F}_a(A)$ 'daki üstyazıtsız matris gösterimleri ile  $\{\vec{r}, \vec{v}, \vec{a}, \vec{\omega}, \vec{\alpha}\}$  beşlisinin  $\mathcal{F}_b(B)$ 'deki üstyazıtsız matris gösterimleri,  $\hat{C} = \hat{C}^{(a,b)}$  dönüşüm matrisi eşliğinde kullanılabilir. Bu şekilde yazılan denklemler, aşağıda gösterilmiştir.

$$\bar{r} = \hat{C}\bar{r}' + \bar{r}^\circ \quad (1.9.19)$$

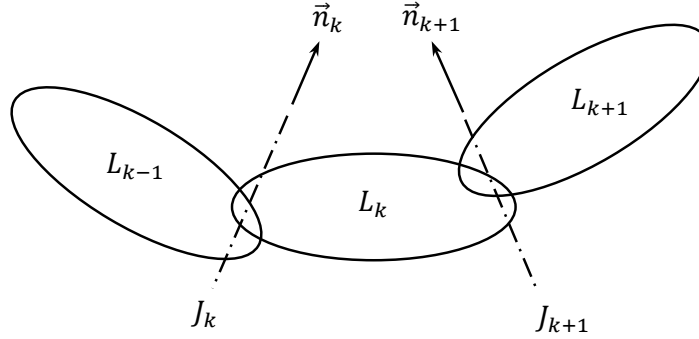
$$\bar{v} = \hat{C}(\bar{v}' + \tilde{\omega}\bar{r}') + \bar{v}^\circ \quad (1.9.20)$$

$$\bar{a} = \hat{C}[\bar{a}' + 2\tilde{\omega}\bar{v}' + (\tilde{\alpha} + \tilde{\omega}^2)\bar{r}'] + \bar{a}^\circ \quad (1.9.21)$$

## BÖLÜM 2

### MEKANİK BİR SİSTEMDE UZUVLARARASI BAĞLANTILAR VE DENAİT-HARTENBERG (D-H) YÖNTEMİ

#### 2.1. Katı Uzuvlardan ve Tek Eksenli Eklemlerden Oluşan Kinematik Zincirler



Şekil 2.1. Katı Uzuvlardan ve Tek Eksenli Eklemlerden Oluşan Bir Kinematik Zincir

##### 2.1.1. Genel Yapısal Betimleme

Şekil 2.1'de katı oldukları varsayılan uzuvlardan ve tek eksenli eklemlerden oluşan bir kinematik zincir görülmektedir. Burada, özellikle tek eksenli eklemlerden oluşan sistemler göz önüne alınmaktadır. Çünkü, seri manipülatörler, istisnasız tek eksenli eklemlerden (döner ve/veya kayar eklemlerden) oluşur ve bu eklemlerin tümü eyletilir. Paralel manipülatörlerin ise, çok eksenli eklemleri olsa bile, eyletilen eklemleri yalnızca tek eksenliler arasında yer alır. Öte yandan, paralel manipülatörlerde kullanılan çok eksenli eklemler, ya küresel ya da üniversal olur. Bu tip çok eksenli eklemleri ise, eğer istenirse, her zaman tek eksenli eklemlere ayrıştırmak mümkündür. Kaldı ki, manipülatörlerin kinematik betimlenmesi amacıyla genel olarak kullanılan D-H (Denavit-Hartenberg) yöntemi de zaten tek eksenli eklemler için geliştirilmiştir.

Şekil 2.1'de,  $L_k$  simgesi, zincirdeki  $k$ -yinci uzvu;  $J_k$  simgesi,  $L_{k-1}$  ile  $L_k$  arasındaki eklemi;  $\vec{n}_k$  simgesi ise,  $J_k$  eklemi için eksenini belirleyen birim vektörü göstermektedir.

Tek eksenli  $J_k$  eklemi, aşağıdaki eklemlerden biri olabilir.

##### 1. Silindirik Eklem (Silindiresel Eklem):

Serbestlik Derecesi:  $SD = 2$

Bağımsız Eklem Değişkenleri:  $\theta_k$  ( $\vec{n}_k$  etrafında dönme açısı)

$s_k$  ( $\vec{n}_k$  boyunca kayma mesafesi)

## 2. Vidasal Eklem (Vidalı Eklem, Helisel Eklem):

Serbestlik Derecesi:  $SD = 1$ Bağımlı Eklem Değişkenleri:  $\theta_k$  ile  $s_k$ Bağımlılık Denklemi:  $s_k = d_k + \lambda_k \theta_k$ Sabit Eklem Parametreleri:  $\lambda_k$  (vidanın hatvesi ya da adımı) ve  $d_k$  (başlangıç mesafesi)

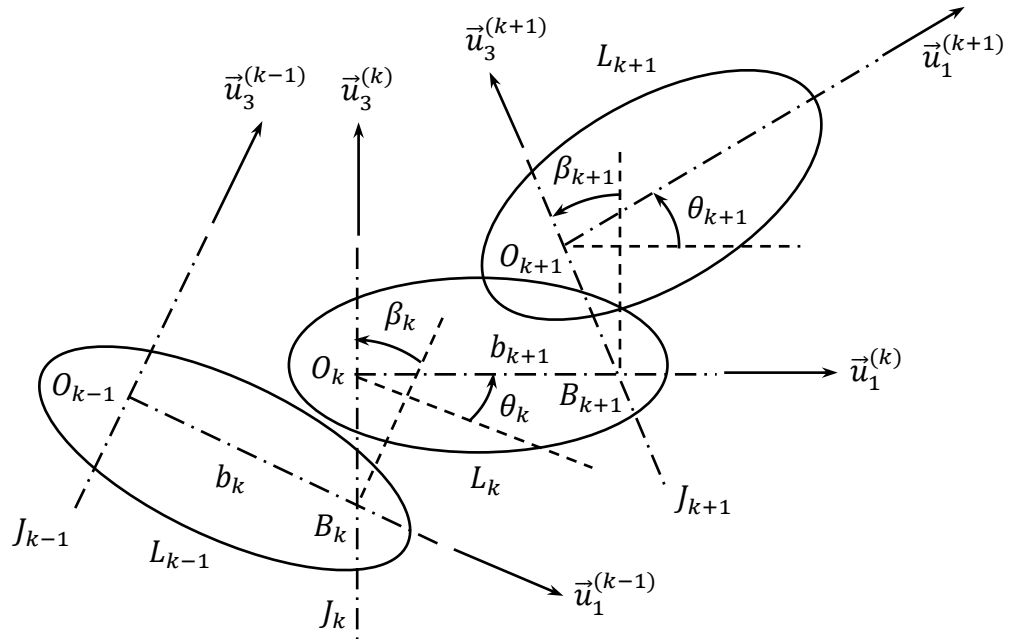
## 3. Döner Eklem (Dönel Eklem, Dönsel Eklem, Revolüt Eklem, Menteşeli Eklem):

Serbestlik Derecesi:  $SD = 1$  ( $s_k = d_k = \text{sabit}$ )Eklem Değişkeni:  $\theta_k$ Sabit Eklem Parametresi:  $d_k$  (kaçıklık)

## 3. Kayar Eklem (Kaysal Eklem, Prizmatik Eklem, Kızaklı Eklem):

Serbestlik Derecesi:  $SD = 1$  ( $\theta_k = \delta_k = \text{sabit}$ )Eklem Değişkeni:  $s_k$ Sabit Eklem Parametresi:  $\delta_k$  (sapma açısı, açısal sapma)

## 2.1.2. D-H (Denavit-Hartenberg) Yöntemi



Şekil 2.2. Kinematik Bir Zincirde D-H Yöntemine Özgü Ayrıntılar

Şekil 2.2'de, bir kinematik zincirde yer alan ve komşularına tek eksenli eklemlerle bağlanmış üç ardışık uzuv görülmektedir. Bu uzuvlar arasındaki kinematik ilişkiler, D-H yöntemi kullanılarak ifade edilebilir. D-H yöntemi, burada, Bölüm 1'de tanımlanan genel notasyona uyarlanarak kullanılmıştır. D-H yöntemine ait kinematik betimleme ve parametreler aşağıda açıklanmıştır.

a) Eklem Eksenleri:

$L_{k-1}$  ile  $L_k$  uzuvları arasındaki  $J_k$  eklemine ait eksen,  $\vec{u}_3^{(k)}$  birim vektörü ile temsil edilir. Bu vektörün eksen üzerindeki yönelimi, kinematik çalışmayı yapan kişinin seçimine bağlıdır.

b) Ardışık Eklem Eksenleri Arasındaki Ortak Dikmeler:

$J_k$  ile  $J_{k+1}$  eklemlerinin eksenleri arasındaki "ortak dikme" ( $J_k$ - $J_{k+1}$  ortak dikmesi),  $\vec{u}_1^{(k)}$  birim vektörü ile temsil edilir. Eğer ilgili eklemlerin eksenleri kesişmiyorsa,  $\vec{u}_1^{(k)}$  vektörü,  $J_k$  ekleminden  $J_{k+1}$  eklemine doğru yöneltilir. Eğer ilgili eklemlerin eksenleri kesişiyorsa,  $\vec{u}_1^{(k)}$  vektörünün yönelimi, kinematik çalışmayı yapan kişinin seçimine bağlıdır.

c)  $L_k$  uzvuna bağlanan  $\mathcal{F}_k$  eksen takımı:

$\mathcal{F}_k$  eksen takımı, aşağıdaki temel birim vektörler tarafından oluşturulur.

$$\vec{u}_3^{(k)}, \vec{u}_1^{(k)}, \vec{u}_2^{(k)} = \vec{u}_3^{(k)} \times \vec{u}_1^{(k)}$$

$\mathcal{F}_k$  eksen takımının orijini olan  $O_k$  noktası,  $J_k$  eklemine ait eksen ile  $J_k$ - $J_{k+1}$  ortak dikmesinin kesiştiği nokta olarak belirlenir.

$J_k$  eklemine ait eksen ile bir önceki  $J_{k-1}$ - $J_k$  ortak dikmesinin kesiştiği yerdeki  $B_k$  noktası ise,  $L_{k-1}$  ile  $L_k$  uzuvları arasındaki "kayma başı" ya da "kaçıklık başı" noktası olarak tanımlanır.

d) Ardışık Uzuvlar Arasındaki Dönme Açısı:

$$\theta_k = \angle[\vec{u}_1^{(k-1)} \rightarrow \vec{u}_1^{(k)}]; \vec{u}_3^{(k)} \text{ etrafında} \quad (2.1.1)$$

Bu açı,  $L_k$  uzvunun  $L_{k-1}$  uzvuna göre,  $\vec{u}_3^{(k)}$  etrafında ne kadar döndüğünü gösterir.

Eğer  $J_k$  eklemi döner eklemse,  $\theta_k$  eklem değişkeni olur.

Eğer,  $J_k$  eklemi kayar eklemse,  $\theta_k = \delta_k = \text{sabit}$  olur. Bu durumda,  $\delta_k$  "sapma açısı" ya da "açısal sapma" olarak adlandırılır.

e) Ardışık Uzuvlar Arasındaki Kayma Mesafesi:

$$s_k = B_k O_k; \vec{u}_3^{(k)} \text{ boyunca} \quad (2.1.2)$$

Bu mesafe,  $L_k$  uzvunun  $L_{k-1}$  uzvuna göre,  $\vec{u}_3^{(k)}$  boyunca ne kadar kaydığını gösterir.

Eğer  $J_k$  eklemi kayar eklemse,  $s_k$  eklem değişkeni olur.



Eğer  $J_k$  eklemi döner eklemse,  $s_k = d_k = \text{sabit}$  olur. Bu durumda,  $d_k$  "kaçıklık" olarak adlandırılır.

f) Ardışık Eklem Eksenleri Arasındaki Burulma Açısı:

$$\beta_k = \angle[\vec{u}_3^{(k-1)} \rightarrow \vec{u}_3^{(k)}]; \vec{u}_1^{(k-1)} \text{ etrafında} \quad (2.1.1)$$

Bu açı,  $J_k$  eklemının ekseninin  $J_{k-1}$  eklemının eksenine göre,  $\vec{u}_1^{(k-1)}$  etrafında ne kadar döndüğünü gösterir. Bu dönmenin sanki  $\vec{u}_1^{(k-1)}$  etrafındaki bir burulmayla oluştuğu düşünülerek  $\beta_k$  açısına  $J_k$  eklemının  $J_{k-1}$  eklemine göre "burulma açısı" denir. Sözü edilen eksenler paralel ya da çakışıkça  $0^\circ$  ya da  $180^\circ$  olan bu açı her zaman sabittir.

g) Ardışık Eklem Eksenleri Arasındaki Mesafe:

$$b_k = O_{k-1}B_k; \vec{u}_1^{(k-1)} \text{ boyunca} \quad (2.1.2)$$

Bu mesafe,  $J_{k-1}$  ve  $J_k$  eklemlerinin eksenleri arasındaki uzaklığı gösterir. Bu mesafe tümüyle söz konusu eksenlerin birbirine göre duruşuyla ilintilidir ve  $L_{k-1}$  uzvunun gerçek boyunu yansıtmaz. Söz konusu eksenler kesişiyorsa sıfır olan bu mesafe, her zaman sabittir.

Yukarıda tanımlanan dört parametre ( $\theta_k, s_k, \beta_k, b_k$ ), D-H parametreleri olarak adlandırılır. Eyletilen eklemlerde, bu dört parametreden yalnızca biri ( $\theta_k$  ya da  $s_k$ ) değişken olup diğer üçü sabittir.

## 2.2. Kinematik Zincir Denklemleri

### 2.2.1. Ardışık Uzuvlar Arasındaki Duruş (Konum ve Yönelim) Denklemleri

Kinematik zincirdeki  $L_k$  uzvunun kendisinden bir önceki  $L_{k-1}$  uzvuna göre duruşu (konumu ve yönelimi), D-H parametreleri kullanılarak aşağıda olduğu gibi ifade edilebilir.

a)  $L_k$  uzvunun  $L_{k-1}$  uzvuna göre yönelim denklemi:

Bu denklem, aşağıda gösterilen biçimlerde yazılabilir.

$$\begin{aligned} \hat{C}^{(k-1,k)} &= \hat{R}(\vec{u}_1^{(k-1/k-1)}, \beta_k) \hat{R}(\vec{u}_3^{(k/k)}, \theta_k) = \hat{R}(\vec{u}_1, \beta_k) \hat{R}(\vec{u}_3, \theta_k) \Rightarrow \\ \hat{C}^{(k-1,k)} &= e^{\vec{u}_1 \beta_k} e^{\vec{u}_3 \theta_k} \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

$$\hat{C}^{(k-1,k)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\beta_k & -s\beta_k \\ 0 & s\beta_k & c\beta_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta_k & -s\theta_k & 0 \\ s\theta_k & c\theta_k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\hat{C}^{(k-1,k)} = \begin{bmatrix} c\theta_k & -s\theta_k & 0 \\ c\beta_k s\theta_k & c\beta_k c\theta_k & -s\beta_k \\ s\beta_k s\theta_k & s\beta_k c\theta_k & c\beta_k \end{bmatrix} \quad (2.2.2)$$

Yukarıdaki ifadelerde,  $\sin \theta$  ve  $\cos \theta$  yerine  $s\theta$  ve  $c\theta$  kısaltmaları kullanılmıştır. Bu tip kısaltmalar, gerek duyulduğunda, bundan sonra da kullanılacaktır.

b)  $L_k$  uzvunun  $L_{k-1}$  uzvuna göre konum denklemi:

Bu denklem,  $L_k$  uzvunun  $O_k$  notasının  $L_{k-1}$  uzvunun  $O_{k-1}$  noktasına göre konumunu ifade etmek üzere şöyle yazılır.

$$\begin{aligned}\vec{r}_{k-1,k} &= \vec{r}_{O_{k-1}O_k} = \vec{r}_{O_{k-1}B_k} + \vec{r}_{B_kO_k} \Rightarrow \\ \vec{r}_{k-1,k} &= \vec{u}_1^{(k-1)} b_k + \vec{u}_3^{(k)} s_k\end{aligned}\quad (2.2.3)$$

(2.2.3) vektör denklemi yerine,  $\mathcal{F}_{k-1}$  eksen takımında ifade edilen aşağıdaki matris denklemleri yazılabilir.

$$\begin{aligned}\vec{r}_{k-1,k}^{(k-1)} &= \bar{u}_1^{(k-1/k-1)} b_k + \bar{u}_3^{(k/k-1)} s_k = \bar{u}_1 b_{k-1} + \hat{C}^{(k-1,k)} \bar{u}_3 s_k \Rightarrow \\ \vec{r}_{k-1,k}^{(k-1)} &= \bar{u}_1 b_k + e^{\tilde{u}_1 \beta_k} e^{\tilde{u}_3 \theta_k} \bar{u}_3 s_k \Rightarrow \\ \vec{r}_{k-1,k}^{(k-1)} &= \bar{u}_1 b_k + e^{\tilde{u}_1 \beta_k} \bar{u}_3 s_k\end{aligned}\quad (2.2.4)$$

(2.2.4) denklemi, daha ayrıntılı olarak aşağıdaki biçimlerde de yazılabilir.

$$\begin{aligned}\vec{r}_{k-1,k}^{(k-1)} &= \bar{u}_1 b_k + (\bar{u}_3 c \beta_k - \bar{u}_2 s \beta_k) s_k \Rightarrow \\ \vec{r}_{k-1,k}^{(k-1)} &= \bar{u}_1 b_k - \bar{u}_2 s_k s \beta_k + \bar{u}_3 s_k c \beta_k\end{aligned}\quad (2.2.5)$$

$$\vec{r}_{k-1,k}^{(k-1)} = \begin{bmatrix} b_k \\ -s_k s \beta_k \\ s_k c \beta_k \end{bmatrix}\quad (2.2.6)$$

c)  $L_k$  uzvunun  $L_{k-1}$  uzvuna göre homojen duruş denklemi:

Bu denklem, aşağıda gösterilen biçimlerde yazılabilir.

$$\begin{aligned}\hat{H}^{(k-1,k)} &= \hat{H}_{O_{k-1}O_k}^{(k-1,k)} = \begin{bmatrix} \hat{C}^{(k-1,k)} & \vec{r}_{O_{k-1}O_k}^{(k-1)} \\ \bar{0}^t & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{C}^{(k-1,k)} & \vec{r}_{k-1,k}^{(k-1)} \\ \bar{0}^t & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \\ \hat{H}^{(k-1,k)} &= \begin{bmatrix} e^{\tilde{u}_1 \beta_k} e^{\tilde{u}_3 \theta_k} & (\bar{u}_1 b_k - \bar{u}_2 s_k s \beta_k + \bar{u}_3 s_k c \beta_k) \\ \bar{0}^t & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \\ \hat{H}^{(k-1,k)} &= \begin{bmatrix} c\theta_k & -s\theta_k & 0 & b_k \\ c\beta_k s\theta_k & c\beta_k c\theta_k & -s\beta_k & -s_k s \beta_k \\ s\beta_k s\theta_k & s\beta_k c\theta_k & c\beta_k & s_k c \beta_k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (2.2.7)$$

### 2.2.2. Zincirdeki Bir Uzun Zincirin Referans Uzvuna Göre Duruş Denklemleri

a)  $L_m$  uzvunun  $L_0$  uzvuna göre homojen duruş denklemi:

Kinematik zincirdeki bir  $L_m$  uzvunun zincirin "referans uzvu" olarak seçilen  $L_0$  uzvuna göre duruşu, kısaca ve derleşik olarak aşağıdaki "homojen duruş denklemi" ile ifade edilebilir.

$$\hat{H}^{(0,m)} = \hat{H}^{(0,1)} \hat{H}^{(1,2)} \hat{H}^{(2,3)} \dots \hat{H}^{(m-1,m)} \quad (2.2.8)$$

Eğer kinematik çalışmada sayısal yöntemler kullanılacaksa, (2.2.8) denklemi, gerekli sayısal işlemler için son derece elverişlidir. Çünkü,  $L_m$  uzvunun  $L_0$  uzvuna göre duruşu, yalnızca  $m$  adet matrisin çarpımıyla elde edilebilmektedir. Her ne kadar matrisler  $4 \times 4$  boyutlu olsalar bile, birbirleriyle çarpımları uygun bir bilgisayarla hızlıca yapılabilmektedir.

Öte yandan, eğer kinematik çalışmada analitik yöntemler kullanılacaksa, (2.2.8) denklemi, analitik yöntemlerin gerektirdiği simgesel işlemler için pek elverişli değildir. Çünkü, bu denklem üzerinde herhangi bir simgesel işlem yapabilmek için  $\hat{H}^{(0,m)}$  matrisinin tüm elemanları, elle (ya da uygun bir simgesel işlem yazılımı kullanılarak) yapılacak matris çarpımlarıyla ayrı ayrı oluşturulmalıdır. Daha sonra da, istenen simgesel işlem,  $(0, 0, 0, 1)$  biçimindeki değişmez dördüncü yataysıra dışındaki 12 eleman üzerinde ayrı ayrı yapılmalıdır. Taktir edilebileceği üzere, bu yaklaşımın bilgisayarla otomatize edilse bile uygulanması pek kolay değildir.

Yukarıda bahsedilen zorluk, yönelim ve konum denklemleri ayrı ayrı yazılarak aşılabilir. Çünkü, Kısım 1.4.3'teki formüller sayesinde, ilgili matrisler üzerinde yapılması gereken simgesel işlemler, matrisleri eleman ayrıntısıyla yazmadan derleşik olarak yapılabilir. Ayrı ayrı yazılan yönelim ve konum denklemleri, aşağıda gösterilmiştir.

b)  $L_m$  uzvunun  $L_0$  uzvuna göre yönelim denklemi:

Bu denklem,  $L_m$  uzvunun  $L_0$  uzvuna göre yönelimini ifade etmek üzere şöyle yazılır.

$$\hat{C}^{(0,m)} = \hat{C}^{(0,1)} \hat{C}^{(1,2)} \hat{C}^{(2,3)} \dots \hat{C}^{(m-1,m)} \quad (2.2.9)$$

(2.2.1) denklemi kullanılıncaya, (2.2.9) denklemi şu şekli alır.

$$\hat{C}^{(0,m)} = (e^{\tilde{u}_1 \beta_1} e^{\tilde{u}_3 \theta_1}) (e^{\tilde{u}_1 \beta_2} e^{\tilde{u}_3 \theta_2}) (e^{\tilde{u}_1 \beta_3} e^{\tilde{u}_3 \theta_3}) \dots (e^{\tilde{u}_1 \beta_m} e^{\tilde{u}_3 \theta_m}) \quad (2.2.10)$$

(2.2.10) denklemi, aşağıdaki tanımlar yapılarak önemli ölçüde sadeleştirilebilir.

*Tanım 1:*  $J_k$  eklemının  $\mathcal{F}_0$  eksen takımına göre "toplam burulma açısı" ( $\gamma_k$ ).

Bu açı, tüm açısal eklem değişkenleri sıfır iken,  $\vec{u}_3^{(k)}$  vektörü ile  $\vec{u}_3^{(0)}$  vektörü arasındaki açıyı gösterir ve şöyle tanımlanır.

$$\left. \begin{array}{l} \gamma_k = \gamma_{k-1} + \beta_k \\ \gamma_0 = 0 \\ k = 1, 2, \dots, m \end{array} \right\} \quad (2.2.11)$$

*Tanım 2:*  $J_k$  eklemine ait  $\vec{n}_k$  birim vektörünün  $\mathcal{F}_0$  eksen takımındaki matris gösterimi ( $\bar{n}_k$ ).

Bu birim vektörün, tüm açısal eklem değişkenleri sıfır iken,  $\mathcal{F}_0$  eksen takımındaki matris gösterimi, yani  $\bar{n}_k = \bar{n}_k^{(0)}$ , şöyle ifade edilir.

$$\bar{n}_k = e^{\tilde{u}_1 \gamma_k} \bar{u}_3 \quad (2.2.12)$$

(2.2.12) denkleminden aşağıdaki denklemler elde edilebilir.

$$\tilde{n}_k = e^{\tilde{u}_1 \gamma_k} \tilde{u}_3 e^{-\tilde{u}_1 \gamma_k} \quad (2.2.13)$$

$$e^{\tilde{n}_k \theta_k} = e^{\tilde{u}_1 \gamma_1} e^{\tilde{u}_3 \theta_k} e^{-\tilde{u}_1 \gamma_1} \Rightarrow$$

$$e^{\tilde{u}_1 \gamma_1} e^{\tilde{u}_3 \theta_k} = e^{\tilde{n}_k \theta_k} e^{\tilde{u}_1 \gamma_1} \quad (2.2.14)$$

(2.2.14) denklemi sayesinde (2.2.10) denklemi aşağıdaki sadeleşmiş biçime dönüştürülebilir.

$$\hat{C}^{(0,m)} = e^{\tilde{n}_1 \theta_1} e^{\tilde{n}_2 \theta_2} e^{\tilde{n}_3 \theta_3} \dots e^{\tilde{n}_m \theta_m} e^{\tilde{u}_1 \gamma_m} \quad (2.2.15)$$

c)  $L_m$  uzvunun  $L_0$  uzvuna göre konum denklemi:

Bu denklem,  $L_m$  uzvunun  $O_m$  noktasının  $L_0$  uzvunun  $O_0$  noktasına göre konumunu ifade etmek üzere şöyle yazılır.

$$\vec{r}_{0,m} = \vec{r}_{0,1} + \vec{r}_{1,2} + \vec{r}_{2,3} + \dots + \vec{r}_{m-1,m} \quad (2.2.16)$$

(2.2.16) denkleminin  $\mathcal{F}_0$  eksen takımındaki matris ifadesi şöyledir.

$$\bar{r}_{0,m}^{(0)} = \bar{r}_{0,1}^{(0)} + \bar{r}_{1,2}^{(0)} + \bar{r}_{2,3}^{(0)} + \dots + \bar{r}_{m-1,m}^{(0)} \quad (2.2.17)$$

(2.2.4) denkleminden yararlanabilmek için (2.2.17) denklemi şöyle yazılabilir.

$$\bar{r}_{0,m}^{(0)} = \bar{r}_{0,1}^{(0)} + \hat{C}^{(0,1)} \bar{r}_{1,2}^{(1)} + \hat{C}^{(0,2)} \bar{r}_{2,3}^{(2)} + \dots + \hat{C}^{(0,m-1)} \bar{r}_{m-1,m}^{(m-1)} \quad (2.2.18)$$

(2.2.4) ve (2.2.15) denklemleri yerlerine konunca, (2.2.18) denklemi şu şekli alır.

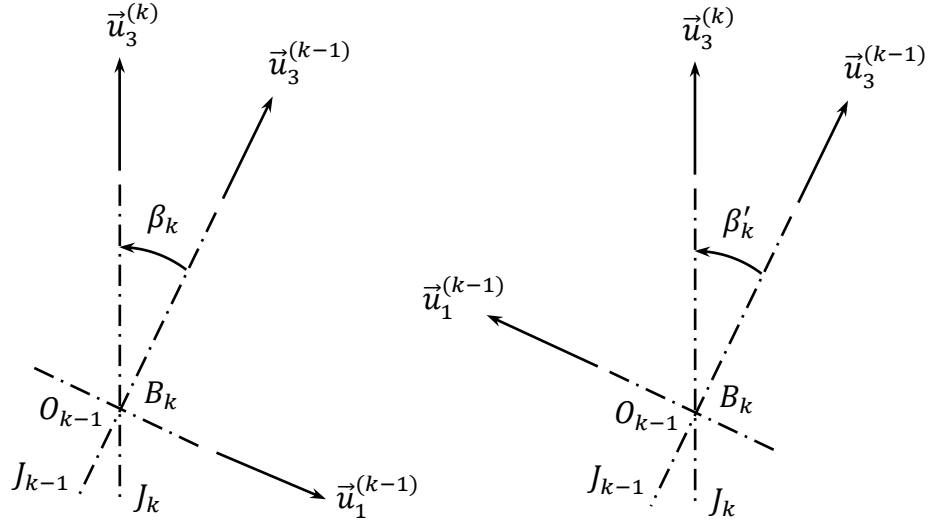
$$\begin{aligned} \bar{r}_{0,m}^{(0)} &= (\bar{u}_1 b_1 + e^{\tilde{u}_1 \beta_1} \bar{u}_3 s_1) \\ &+ e^{\tilde{n}_1 \theta_1} e^{\tilde{u}_1 \gamma_1} (\bar{u}_1 b_2 + e^{\tilde{u}_1 \beta_2} \bar{u}_3 s_2) \\ &+ e^{\tilde{n}_1 \theta_1} e^{\tilde{n}_2 \theta_2} e^{\tilde{u}_1 \gamma_2} (\bar{u}_1 b_3 + e^{\tilde{u}_1 \beta_3} \bar{u}_3 s_3) + \dots \\ &+ e^{\tilde{n}_1 \theta_1} e^{\tilde{n}_2 \theta_2} \dots e^{\tilde{n}_{m-1} \theta_{m-1}} e^{\tilde{u}_1 \gamma_{m-1}} (\bar{u}_1 b_m + e^{\tilde{u}_1 \beta_m} \bar{u}_3 s_m) \end{aligned} \quad (2.2.19)$$

Daha önce yapılan tanımlar kullanılarak (2.2.19) denklemi, aşağıda görülen biçime kadar sadeleştirilebilir.

$$\begin{aligned} \bar{r}_{0,m}^{(0)} &= (\bar{u}_1 b_1 + \bar{n}_1 s_1) + e^{\tilde{n}_1 \theta_1} (\bar{u}_1 b_2 + \bar{n}_2 s_2) \\ &+ e^{\tilde{n}_1 \theta_1} e^{\tilde{n}_2 \theta_2} (\bar{u}_1 b_3 + \bar{n}_3 s_3) + \dots \\ &+ e^{\tilde{n}_1 \theta_1} e^{\tilde{n}_2 \theta_2} \dots e^{\tilde{n}_{m-1} \theta_{m-1}} (\bar{u}_1 b_m + \bar{n}_m s_m) \end{aligned} \quad (2.2.20)$$

## 2.3. Özel Durumlar

### 2.3.1. Kesişen Eklem Eksenleri

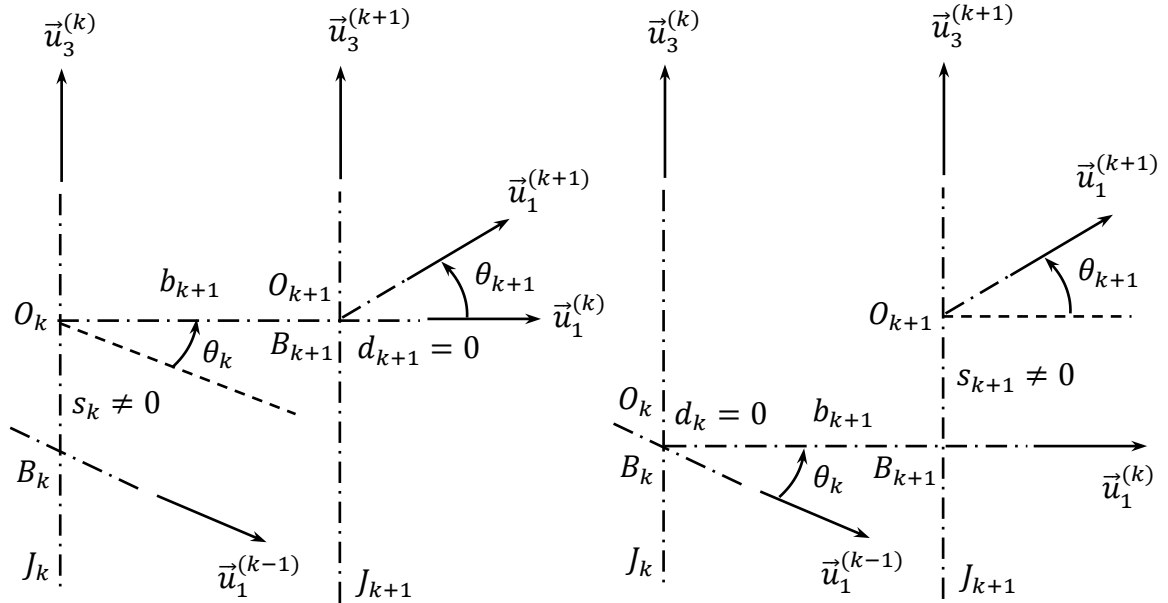


Şekil 2.3. Kesişen Eklem Eksenleri

Eğer, Şekil 2.3'te görüldüğü gibi,  $J_{k-1}$  ile  $J_k$  eklemlerinin eksenleri kesişiyorsa,  $B_k = O_{k-1}$  ve  $b_k = 0$  olur. Bu durumda, ortak dikme üzerindeki  $\vec{u}_1^{(k-1)}$  birim vektörünün yönelimi, iki seçenekli bir belirsizlik kazanır ve dolayısıyla isteğe göre seçilebilir. Ancak, yapılan seçime göre, burulma açısının değeri farklı bir cebirsel işarete sahip olur.

Örneğin,  $\vec{u}_1^{(k-1)}$  vektörü, Şekil 2.3'ün sol tarafında olduğu gibi yöneltildiğinde burulma açısı  $\beta_k$  oluyorsa,  $\vec{u}_1^{(k-1)}$  vektörü, Şekil 2.3'ün sağ tarafında olduğu gibi tersine doğru yöneltildiğinde burulma açısı  $\beta'_k = -\beta_k$  olur.

### 2.3.2. Paralel Eklem Eksenleri



Şekil 2.4. Paralel Eklem Eksenleri

Eğer, Şekil 2.4'te görüldüğü gibi,  $J_k$  ile  $J_{k+1}$  eklemlerinin eksenleri paralelse,  $\beta_{k+1} = 0$  olur. Bu durumda, iki eklem arasında sonsuz sayıda ortak dikme ortaya çıkar ve dolayısıyla bunlardan biri isteğe göre seçilebilir. Bununla birlikte, sistemin kinematik betimlemesini basitleştirmek için, sonsuz sayıdaki seçenektan yalnızca özel olan ikisi tercih edilir. Şekil 2.4'ün sol tarafında gösterilen birinci özel seçeneğe göre, ortak dikme,  $B_{k+1} = O_{k+1}$  ya da  $d_{k+1} = 0$  olacak biçimde seçilir. Şekil 2.4'ün sağ tarafında gösterilen ikinci özel seçeneğe göre ise, ortak dikme,  $B_k = O_k$  ya da  $d_k = 0$  olacak biçimde seçilir.

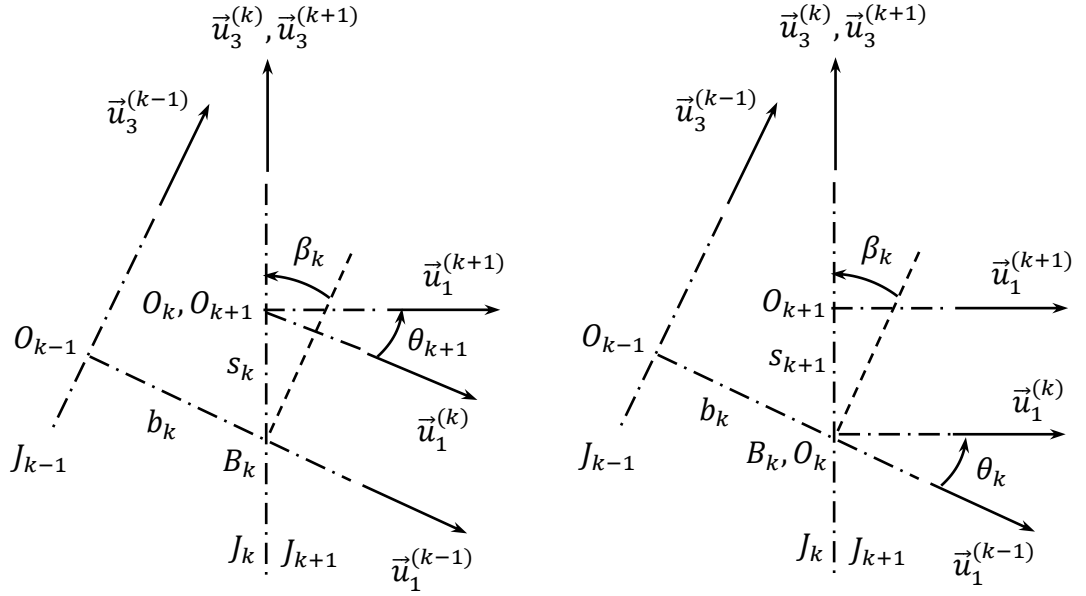
Eğer  $J_k$  ile  $J_{k+1}$  eklemlerinden her ikisi de döner eklemse, yani birinci özel seçeneğe göre  $s_k = d_k = \text{sabit}$  ve ikinci özel seçeneğe göre  $s_{k+1} = d_{k+1} = \text{sabit}$  ise, bu iki seçenektan herhangi biri isteğe göre seçilebilir.

Eğer  $J_k$  ve  $J_{k+1}$  eklemleri, sırasıyla kayar ve döner eklemlerse, birinci özel seçenek zorunlu hale gelir, çünkü  $s_k$  genelde sıfır olmayan eklem değişkenidir. Buna karşılık,  $d_{k+1}$  sabit olduğundan sıfır olarak alınabilir.

Eğer  $J_k$  ve  $J_{k+1}$  eklemleri, sırasıyla döner ve kayar eklemlerse, bu kez de ikinci özel seçenek zorunlu hale gelir, çünkü  $s_{k+1}$  genelde sıfır olmayan eklem değişkenidir. Buna karşılık,  $d_k$  sabit olduğundan sıfır olarak alınabilir.

Öteyandan, geçerli bir manipülatör tasarımında,  $J_k$  ile  $J_{k+1}$  eklemlerinin her ikisi birden kayar eklem olamaz. Bunun nedeni, ardışık ve paralel olan iki kayar eklem sisteme birlikte verebileceği hareketin bu eklemlerden yalnızca biri tarafından da verilebilir olmasıdır.

### 2.3.3. Çakışık Eklem Eksenleri



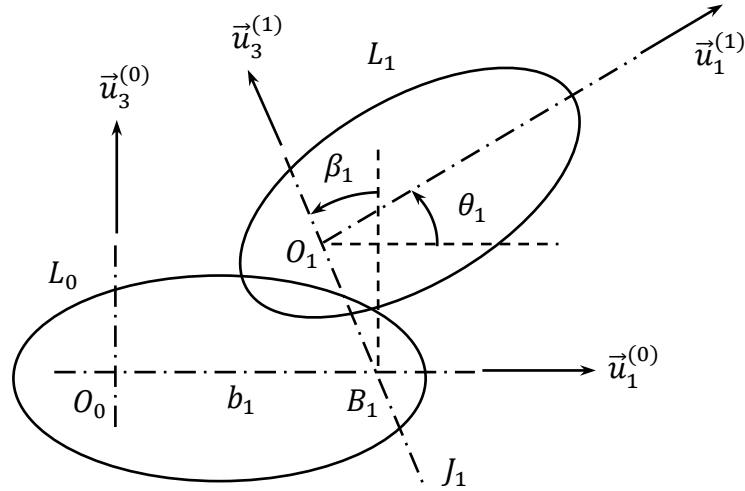
Şekil 2.5. Çakışık Eklem Eksenleri

Şekil 2.5'te,  $J_k$  ile  $J_{k+1}$  eklemlerinin eksenlerinin çakışık olduğu bir eklem düzenlemesi görülmektedir. Böyle bir eklem düzenlemesi, ancak, eklemlerden biri döner eklem, diğeri ise kayar eklem olursa geçerli bir manipülötör tasarımında yer alabilir. Aksi halde, eklemlerden her ikisi de döner ya da kayar eklem olursa, bu eklemlerden biri artıksıl hale gelir ve iptal edilse bile, manipülötörün hareket yeteneği değişmez. Çakışık eklem düzenlemesinde,  $b_{k+1} = 0$  ve  $\beta_{k+1} = 0$  olur. Bu düzenleme, kayar-döner ya da döner-kayar olmak üzere iki biçimde gerçekleştirilebilir.

Şekil 2.5'in sol tarafında, kayar-döner düzenlemesi görülmektedir. Eklem değişkenleri,  $s_k$  kayma mesafesi ile  $\theta_{k+1}$  dönme açısıdır. Bu düzenlemede, genelliği bozmaksızın,  $\theta_k = \delta_k = 0$  ve  $s_{k+1} = d_{k+1} = 0$  olarak alınmıştır.

Şekil 2.5'in sağ tarafında, döner-kayar düzenlemesi görülmektedir. Eklem değişkenleri,  $\theta_k$  dönme açısı ile  $s_{k+1}$  kayma mesafesidir. Bu düzenlemede, yine genelliği bozmaksızın,  $s_k = d_k = 0$  ve  $\theta_{k+1} = \delta_{k+1} = 0$  olarak alınmıştır.

### 2.3.4. D-H Yönteminin Açık Bir Zincirin Referans Uzvuna Uygulanması



Şekil 2.6. Açık Bir Kinematik Zincirin Referans Uzvu ve İlk Uzvu

Şekil 2.6'da, bir kinematik zincirin referans uzvu ( $L_0$ ) ve ilk uzvu ( $L_1$ ) görülmektedir. Eğer referans uzvu sabitse, "zemin uzvu" ya da kısaca "zemin" olarak da adlandırılabilir. Özel olarak, seri manipülatörlerde olduğu gibi, eğer kinematik zincir açıksa,  $L_0$  üzerinde bir  $J_0$  eklemi bulunmaz. Bu nedenle,  $\vec{u}_3^{(0)}$  ile temsil edilen eksen, tümüyle isteğe göre seçilebilir. Bu eksen seçildikten sonra,  $O_0$  ve  $B_1$  noktaları,  $\vec{u}_1^{(0)}$  ile temsil edilen ortak dikme, ve dört D-H parametresi ( $\theta_1, s_1, \beta_1, b_1$ ), Kısım 2.1.2'de açıklandığı gibi belirlenir.

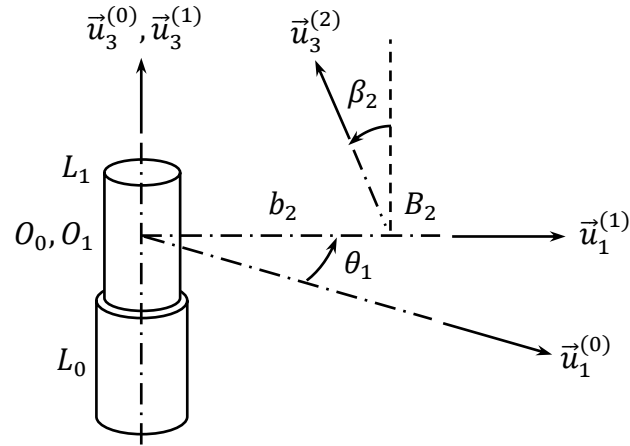
Daha özel fakat oldukça sık kullanılan bir durum olarak,  $\vec{u}_3^{(0)}$  eksenini,  $J_1$  eklemi eksenineyle çakıştırılabilir. Bu özel durumda,  $\vec{u}_1^{(0)}$  vektörü isteğe göre yöneltilir ve aşağıdaki eşitlikler ortaya çıkar.

$$B_1 = O_0 ; b_1 = 0 , \beta_1 = 0$$

Ayrıca, daha da özel bir durum olarak, eğer  $J_1$  eklemi döner ekleme, Şekil 2.7'de gösterildiği ve aşağıdaki eşitliklerle ifade edildiği gibi, kinematik betimleme daha da basitleştirilebilir.

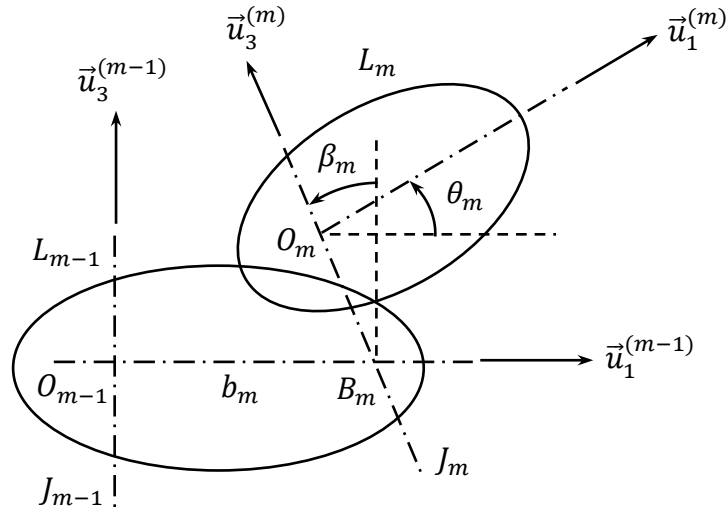
$$s_1 = d_1 = 0 ; O_1 = O_0$$





Şekil 2.7. Referans Uzvuyla İlk Uzun Arasında Döner Eklem Olan Özel Durum

### 2.3.5. D-H Yönteminin Açık Bir Zincirin Son Uzvuna Uygulanması



Şekil 2.8. Açık Bir Kinematik Zincirin Son İki Uzu

Şekil 2.8'de, açık bir kinematik zincirin son iki uzvu ( $L_{m-1}$  ve  $L_m$ ) görülmektedir. Belli olan  $J_{m-1}$  ve  $J_m$  eklemleri sayesinde,  $\vec{u}_1^{(m-1)}$  birim vektörü,  $B_m$  noktası, ve  $b_m$  ile  $\beta_m$  parametreleri belirlenir. Ancak, son uzuvda  $J_{m+1}$  gibi bir başka eklem bulunmadığı için,  $O_m$  noktası,  $\mathcal{F}_m$  eksen takımının orijini olarak  $J_m$  ekleminin eksenini üzerinde isteğe göre seçilebilir.

Eğer açık kinematik zincir bir seri manipülatör ise, son uzuv ( $L_m$ ) genellikle "el" olarak adlandırılır.

Genel olarak,  $L_m$  bir işlem aygıtı barındırır ya da kendisi bir işlem aygıtıdır. Böyle bir durumda,  $O_m$  noktası, geleneksel olarak işlem aygıtının uç noktası olarak seçilir.  $J_m$  eklemının eksenine dik olan  $\vec{u}_1^{(m)}$  birim vektörü ise,  $J_m$  eklemının tipine bağlı olarak şöyle belirlenir.

Neredeyse hiç rastlanılmayan bir durum olarak, eğer  $J_m$  eklemi kayar eklemse, genelliği bozmaksızın  $\theta_m = \delta_m = 0$  yani  $\vec{u}_1^{(m)} // \vec{u}_1^{(m-1)}$  olarak alınabilir. Bu durumda,  $B_m O_m = s_m$  eklem değişkeni olur.

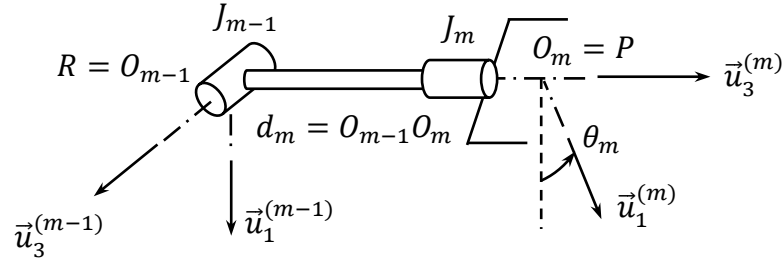
Hemen hemen her zaman rastlanılan bir durum olarak, eğer  $J_m$  eklemi döner eklemse,  $B_m O_m = d_m$  sabit bir kaçıklık,  $\theta_m = \angle[\vec{u}_1^{(m-1)} \rightarrow \vec{u}_1^{(m)}]$  ise eklem değişkeni olur.

Son eklemın döner eklem olduğu ve oldukça sık rastlanılan bir son uzuv düzenlemesi, Şekil 2.9'da gösterilmiştir. Son uzuv, "tutucu" biçiminde bir işlem aygıtı taşımaktadır.  $O_m$  noktası, manipülâtörün "uç noktası" olan  $P$  noktası ile çakıştırılmıştır. Bir önceki orijin ( $O_{m-1}$ ) ise, manipülâtörün "bilek noktası" olarak adlandırılan  $R$  noktası ile çakışık durumdadır. Bu düzenlemede, son uzva ait birim vektörler, aşağıda belirtildiği gibi, özel simgelerle gösterilir ve özel isimlerle adlandırılır.

$$\vec{u}_3^{(m)} = \vec{u}_a : \text{yaklaşım vektörü}$$

$$\vec{u}_1^{(m)} = \vec{u}_n : \text{normal vektör (tutucu düzlemine dik vektör)}$$

$$\vec{u}_2^{(m)} = \vec{u}_s : \text{yanal vektör } (\vec{u}_s = \vec{u}_a \times \vec{u}_n)$$



Şekil 2.9. İşlem Aygıtı Tutucu Olan Bir Son Uzuv Düzenlemesi

## BÖLÜM 3

### SERİ MANİPÜLATÖRLERİN KONUM ANALİZİ

#### 3.1. Uzuvarın Konum ve Yönelimleri İçin İleri Kinematik Eşitlikleri

Buradaki incelemenin konusu, hareketli uzuv sayısı  $m$  olan seri manipülatörlerdir. Bir seri manipülatörün "işlem aygıtı", sonuncu uzuv olan  $L_m$  ile bütünleşiktir. İleri kinematik eşitlikleriyle, göz önüne alınan manipülatörün uzuvlarının, özellikle de işlem aygıtının, zemine bağlı ve orijini  $O = O_0$  olan  $\mathcal{F}_0$  eksen takımına göre konum ve yönelimleri, eklem değişkenleri cinsinden ifade edilir. Bir seri manipülatör açık bir kinematik zincir teşkil ettiği için, Bölüm 2'de oluşturulan kinematik zincir denklemleri, bu bölümde doğrudan doğruya kullanılabilir.

##### 3.1.1. Uzuvarın Zemine Göre Konum ve Yönelimleri

a) Uzuvarın zemine ( $\mathcal{F}_0$  eksen takımına) göre homojen duruş matrisleri:

$$\left. \begin{aligned} \hat{H}^{(0,k)} &= \hat{H}^{(0,k-1)} \hat{H}^{(k-1,k)} \\ \hat{H}^{(0,0)} &= \hat{I} \\ k &= 1, 2, 3, \dots, m \end{aligned} \right\} \quad (3.1.1)$$

Bölüm 2'den hatırlanacağı üzere,

$$\hat{H}^{(k-1,k)} = \begin{bmatrix} c\theta_k & -s\theta_k & 0 & b_k \\ c\beta_k s\theta_k & c\beta_k c\theta_k & -s\beta_k & -s_k s\beta_k \\ s\beta_k s\theta_k & s\beta_k c\theta_k & c\beta_k & s_k c\beta_k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.1.2)$$

En çok kullanılan matris olması nedeniyle, işlem aygıtının (son uzvun) homojen duruş matrisi, üstyazıtsız ve altıyazıtsız olarak kısaca  $\hat{H}$  simgesiyle gösterilebilir. Yani,

$$\hat{H} = \hat{H}^{(0,m)} \quad (3.1.3)$$

b) Uzuvarın zemine ( $\mathcal{F}_0$  eksen takımına) göre yönelim matrisleri:

$$\left. \begin{aligned} \hat{C}^{(0,k)} &= \hat{C}^{(0,k-1)} \hat{C}^{(k-1,k)} \\ \hat{C}^{(0,0)} &= \hat{I} \\ k &= 1, 2, 3, \dots, m \end{aligned} \right\} \quad (3.1.4)$$

Bölüm 2'den hatırlanacağı üzere,

$$\hat{C}^{(k-1,k)} = e^{\tilde{u}_1 \beta_k} e^{\tilde{u}_3 \theta_k} \quad (3.1.5)$$

En çok kullanılan matris olması nedeniyle, işlem aygıtının (son uzvun) yönelim matrisi de, üstyazıtsız ve altıyazıtsız olarak kısaca  $\hat{C}$  simgesiyle gösterilebilir. Yani,

$$\hat{C} = \hat{C}^{(0,m)} \quad (3.1.6)$$

c) Uzuvarın zemine ( $\mathcal{F}_0$  eksen takımına) göre konum vektörleri:

Bölüm 2'den hatırlanacağı üzere,  $L_k$  uzvuna ait  $O_k$  orijin noktasının zeminin orijini olan  $O = O_0$  noktasına göre konumunu ifade etmek üzere aşağıdaki vektörel denklem takımı yazılabilir.

$$\left. \begin{aligned} \vec{r}_{0,k} &= \vec{r}_{0,k-1} + \vec{r}_{k-1,k} \\ \vec{r}_{0,0} &= \vec{0} \\ k &= 1, 2, 3, \dots, m \end{aligned} \right\} \quad (3.1.7)$$

(3.1.7) denkleminin zemine bağlı  $\mathcal{F}_0$  eksen takımındaki matris ifadesi şöyle yazılabilir.

$$\left. \begin{aligned} \vec{r}_{0,k}^{(0)} &= \vec{r}_{0,k-1}^{(0)} + \hat{C}^{(0,k-1)} \vec{r}_{k-1,k}^{(k-1)} \\ \vec{r}_{0,0}^{(0)} &= \vec{0} \\ k &= 1, 2, 3, \dots, m \end{aligned} \right\} \quad (3.1.8)$$

İfade kolaylığı amacıyla,  $\vec{r}_{0,k}^{(0)}$  için  $\vec{r}_{0,k}$  simgesi ve  $\vec{r}_{k-1,k}^{(k-1)}$  için de Bölüm 2'deki (2.2.4) denklemleri kullanılarak (3.1.8) denklemleri şöyle de yazılabilir.

$$\left. \begin{aligned} \vec{r}_{0,k} &= \vec{r}_{0,k-1} + \hat{C}^{(0,k-1)} (b_k \vec{u}_1 + s_k e^{\tilde{u}_1 \beta_k} \vec{u}_3) \\ \vec{r}_{0,0} &= \vec{0} \\ k &= 1, 2, 3, \dots, m \end{aligned} \right\} \quad (3.1.9)$$

İşlem aygıtının (son uzvun) zemine göre konumunu ifade etmek üzere, genellikle, uç noktası ( $P = O_m$ ) kullanılır. Bununla birlikte, ifade kolaylığı sağladığı için, yerine göre, bilek noktası ( $R = O_{m-1}$ ) da kullanılabilir.

Bilek ve uç noktalarının zemine göre ( $R$  ve  $P$  noktalarının  $O$  noktasına göre) konumları, aşağıdaki vektör denklemleriyle ifade edilebilir.

$$\vec{r} = \vec{r}_{OR} = \vec{r}_{0,m-1} \quad (3.1.10)$$

$$\vec{p} = \vec{r}_{OP} = \vec{r}_{0,m} = \vec{r}_{0,m-1} + \vec{r}_{m-1,m} \Rightarrow$$

$$\vec{p} = \vec{r} + \vec{z} \quad (3.1.11)$$

$$\vec{z} = \vec{r}_{RP} = \vec{r}_{m-1,m} \quad (3.1.12)$$

Yukarıdaki denklemlerin  $\mathcal{F}_0$  eksen takımındaki matris karşılıkları şöyle yazılabilir.

$$\vec{r} = \vec{r}^{(0)} = \vec{r}_{0,m-1}^{(0)} = \vec{r}_{0,m-1} \quad (3.1.13)$$

$$\vec{p} = \vec{p}^{(0)} = \vec{p} + \vec{z} \quad (3.1.14)$$

$$\vec{z} = \vec{z}^{(0)} = \hat{C}^{(0,m-1)} (b_m \vec{u}_1 + s_m e^{\tilde{u}_1 \beta_m} \vec{u}_3) \quad (3.1.15)$$

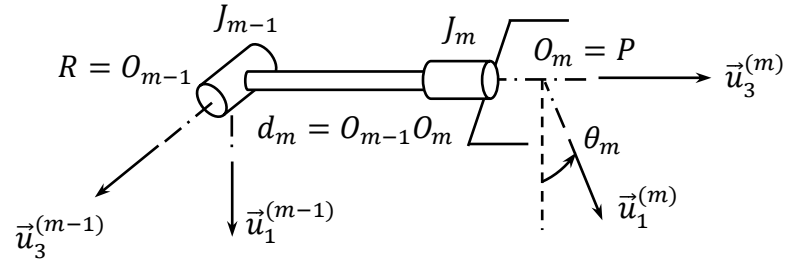
Tipik bir manipülatörün tutucu biçimindeki işlem aygıtı, Şekil 3.1'de gösterilmiştir. Böyle bir manipülatörde  $b_m = 0$  ve  $s_m = d_m = \text{sabit}$  olduğu için, (3.1.14) ve (3.1.15) denklemleri,

$e^{\tilde{u}_3 \theta_m} \bar{u}_3 = \bar{u}_3$  eşitliği ile (3.1.4) ve (3.1.5) denklemlerinden yararlanılarak şöyle de yazılabilir.

$$\bar{z} = d_m \hat{C}^{(0,m-1)}(e^{\tilde{u}_1 \beta_m} \bar{u}_3) = d_m \hat{C}^{(0,m-1)}(e^{\tilde{u}_1 \beta_m} e^{\tilde{u}_3 \theta_m} \bar{u}_3) \Rightarrow$$

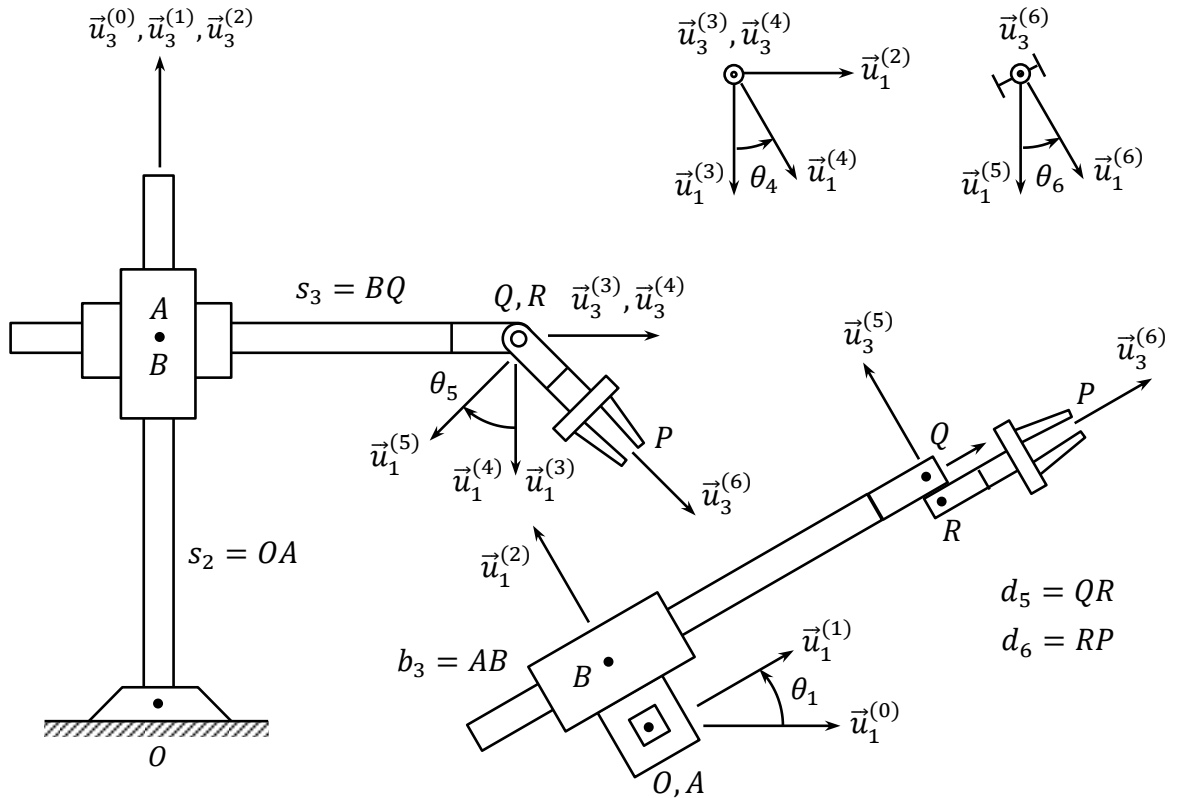
$$\bar{z} = d_m \hat{C}^{(0,m)} \bar{u}_3 = d_m \hat{C} \bar{u}_3 \quad (3.1.16)$$

$$\bar{p} = \bar{r} + d_m \hat{C} \bar{u}_3 \quad (3.1.17)$$



Şekil 3.1. Tipik Seri Bir Manipülörün İşlem Ayağı

### 3.1.2. Örnek Manipülör



Şekil 3.2. Eklem Düzeni  $RP^2R^3$  Olan Bir Seri Manipülör

Şekil 3.2'de,  $RP^2R^3$  eklem düzenine sahip bir seri manipülatör görülmektedir. Bu manipülatöre ait D-H parametreleri ve uzuvlara ait orijin noktaları, Çizelge 3.1'de gösterilmiştir.

Çizelge 3.1. Örnek Manipülatöre Ait D-H Çizelgesi

Özellikler	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$
$\beta_k$	$\beta_1 = 0$	$\beta_2 = 0$	$\beta_3 = \pi/2$	$\beta_4 = 0$	$\beta_5 = -\pi/2$	$\beta_6 = \pi/2$
$b_k$	$b_1 = 0$	$b_2 = 0$	$b_3 = AB$	$b_4 = 0$	$b_5 = 0$	$b_6 = 0$
$\theta_k$ ya da $\delta_k$	$\theta_1$	$\delta_2 = \pi/2$	$\delta_3 = -\pi/2$	$\theta_4$	$\theta_5$	$\theta_6$
$s_k$ ya da $d_k$	$d_1 = 0$	$s_2 = OA$	$s_3 = BQ$	$d_4 = 0$	$-d_5 = -QR$	$d_6 = RP$
$O_k$	$O_1 = O_0 = O$	$O_2 = B$	$O_3 = Q$	$O_4 = Q$	$O_5 = R$	$O_6 = P$

a) Uzuvların zemine göre yönelimi:

Çizelge 3.1'deki kinematik özellikler ve Bölüm 1'deki "dönme matrisi formülleri" kullanılıncı, (3.1.5) ve (3.1.4) denklemlerinden uzuvlara ait yönelim matrisleri, aşağıda görüldüğü gibi elde edilir.

$$\hat{C}^{(0,1)} = e^{\tilde{u}_3\theta_1} \quad (3.1.18)$$

$$\hat{C}^{(0,2)} = \hat{C}^{(0,1)}\hat{C}^{(1,2)} = (e^{\tilde{u}_3\theta_1})(e^{\tilde{u}_3\pi/2}) \Rightarrow$$

$$\hat{C}^{(0,2)} = e^{\tilde{u}_3\theta_1}e^{\tilde{u}_3\pi/2} \quad (3.1.19)$$

$$\hat{C}^{(0,3)} = \hat{C}^{(0,2)}\hat{C}^{(2,3)} = (e^{\tilde{u}_3\theta_1}e^{\tilde{u}_3\pi/2})(e^{\tilde{u}_1\pi/2}e^{-\tilde{u}_3\pi/2}) \Rightarrow$$

$$\hat{C}^{(0,3)} = e^{\tilde{u}_3\theta_1}e^{\tilde{u}_2\pi/2} \quad (3.1.20)$$

$$\hat{C}^{(0,4)} = \hat{C}^{(0,3)}\hat{C}^{(3,4)} = (e^{\tilde{u}_3\theta_1}e^{\tilde{u}_2\pi/2})(e^{\tilde{u}_3\theta_4}) \Rightarrow$$

$$\hat{C}^{(0,4)} = e^{\tilde{u}_3\theta_1}e^{\tilde{u}_1\theta_4}e^{\tilde{u}_2\pi/2} \quad (3.1.21)$$

$$\hat{C}^{(0,5)} = \hat{C}^{(0,4)}\hat{C}^{(4,5)} = (e^{\tilde{u}_3\theta_1}e^{\tilde{u}_1\theta_4}e^{\tilde{u}_2\pi/2})(e^{-\tilde{u}_1\pi/2}e^{\tilde{u}_3\theta_5}) \Rightarrow$$

$$\hat{C}^{(0,5)} = e^{\tilde{u}_3\theta_1}e^{\tilde{u}_1\theta_4}e^{\tilde{u}_2\pi/2}e^{\tilde{u}_2\theta_5}e^{-\tilde{u}_1\pi/2} \Rightarrow$$

$$\hat{C}^{(0,5)} = e^{\tilde{u}_3\theta_1}e^{\tilde{u}_1\theta_4}e^{\tilde{u}_2\theta_5}e^{\tilde{u}_2\pi/2}e^{-\tilde{u}_1\pi/2} \quad (3.1.22)$$

$$\hat{C}^{(0,6)} = \hat{C}^{(0,5)}\hat{C}^{(5,6)} = (e^{\tilde{u}_3\theta_1}e^{\tilde{u}_1\theta_4}e^{\tilde{u}_2\theta_5}e^{\tilde{u}_2\pi/2}e^{-\tilde{u}_1\pi/2})(e^{\tilde{u}_1\pi/2}e^{\tilde{u}_3\theta_6}) \Rightarrow$$

$$\hat{C}^{(0,6)} = \hat{C}^{(0,5)}\hat{C}^{(5,6)} = e^{\tilde{u}_3\theta_1}e^{\tilde{u}_1\theta_4}e^{\tilde{u}_2\theta_5}e^{\tilde{u}_2\pi/2}e^{\tilde{u}_3\theta_6} \Rightarrow$$

$$\hat{C}^{(0,6)} = \hat{C} = e^{\tilde{u}_3\theta_1}e^{\tilde{u}_1\theta_4}e^{\tilde{u}_2\theta_5}e^{\tilde{u}_1\theta_6}e^{\tilde{u}_2\pi/2} \quad (3.1.23)$$

Eğer istenirse, (3.1.22) ve (3.1.23) denklemleri, daha kısa olarak şöyle de düzenlenebilir.

$$\hat{C}^{(0,5)} = e^{\tilde{u}_3\theta_1}e^{\tilde{u}_1\theta_4}e^{\tilde{u}_2\theta_5'}e^{-\tilde{u}_1\pi/2} \quad (3.1.24)$$

$$\hat{C}^{(0,6)} = \hat{C} = e^{\tilde{u}_3\theta_1} e^{\tilde{u}_1\theta_4} e^{\tilde{u}_2\theta'_5} e^{\tilde{u}_3\theta_6} \quad (3.1.25)$$

Yukarıdaki denklemlerde yer alan  $\theta'_5$ , "modifiye eklem açısı" adıyla şöyle tanımlanmıştır.

$$\theta'_5 = \theta_5 + \pi/2 \quad (3.1.26)$$

b) Bilek ve uç noktalarının zemine göre konumları:

Şekil 3.2'ye göre, bilek ve uç noktalarının zemine göre konum vektörleri şöyle ifade edilebilir.

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{r}_{OR} = \vec{r}_{OA} + \vec{r}_{AB} + \vec{r}_{BQ} + \vec{r}_{QR} \Rightarrow \\ \vec{r} &= s_2 \vec{u}_3^{(0)} + b_3 \vec{u}_1^{(2)} + s_3 \vec{u}_3^{(3)} - d_5 \vec{u}_3^{(5)} \end{aligned} \quad (3.1.27)$$

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \vec{r}_{OP} = \vec{r}_{OR} + \vec{r}_{RP} \Rightarrow \\ \vec{p} &= \vec{r} + d_6 \vec{u}_3^{(6)} \end{aligned} \quad (3.1.28)$$

(3.1.27) ve (3.1.28) denklemlerine  $\mathcal{F}_0$  eksen takımında karşılık gelen matris denklemleri şöyle yazılabilir.

$$\begin{aligned} \vec{r} &= s_2 \vec{u}_3^{(0/0)} + b_3 \vec{u}_1^{(2/0)} + s_3 \vec{u}_3^{(3/0)} - d_5 \vec{u}_3^{(5/0)} \Rightarrow \\ \vec{r} &= s_2 \vec{u}_3 + b_3 \hat{C}^{(0,2)} \vec{u}_1 + s_3 \hat{C}^{(0,3)} \vec{u}_3 - d_5 \hat{C}^{(0,5)} \vec{u}_3 \end{aligned} \quad (3.1.29)$$

Daha önce elde edilen yönelim matrisleri yerlerine konduktan sonra, (3.1.29) denklemi üzerinde aşağıdaki sadeleştirme işlemleri yapılabilir.

$$\begin{aligned} \vec{r} &= s_2 \vec{u}_3 + b_3 e^{\tilde{u}_3\theta_1} e^{\tilde{u}_3\pi/2} \vec{u}_1 + s_3 e^{\tilde{u}_3\theta_1} e^{\tilde{u}_2\pi/2} \vec{u}_3 \\ &\quad - d_5 e^{\tilde{u}_3\theta_1} e^{\tilde{u}_1\theta_4} e^{\tilde{u}_2\theta'_5} e^{-\tilde{u}_1\pi/2} \vec{u}_3 \Rightarrow \\ \vec{r} &= s_2 \vec{u}_3 + b_3 e^{\tilde{u}_3\theta_1} \vec{u}_2 + s_3 e^{\tilde{u}_3\theta_1} \vec{u}_1 - d_5 e^{\tilde{u}_3\theta_1} e^{\tilde{u}_1\theta_4} e^{\tilde{u}_2\theta'_5} \vec{u}_2 \Rightarrow \\ \vec{r} &= s_2 \vec{u}_3 + b_3 e^{\tilde{u}_3\theta_1} \vec{u}_2 + s_3 e^{\tilde{u}_3\theta_1} \vec{u}_1 - d_5 e^{\tilde{u}_3\theta_1} e^{\tilde{u}_1\theta_4} \vec{u}_2 \end{aligned} \quad (3.1.30)$$

(3.1.30) denklemi,  $e^{\tilde{u}_3\theta_1} \vec{u}_3 = \vec{u}_3$  eşitliğinden yararlanılarak şöyle de yazılabilir.

$$\vec{r} = e^{\tilde{u}_3\theta_1} (s_2 \vec{u}_3 + b_3 \vec{u}_2 + s_3 \vec{u}_1 - d_5 e^{\tilde{u}_1\theta_4} \vec{u}_2) \quad (3.1.31)$$

Parantez içindeki işlemler yapıldıktan sonra, (3.1.31) denklemi şu şekli alır.

$$\vec{r} = e^{\tilde{u}_3\theta_1} [\vec{u}_1 s_3 + \vec{u}_2 (b_3 - d_5 c \theta_4) + \vec{u}_3 (s_2 - d_5 s \theta_4)] \quad (3.1.32)$$

Uç noktasının konumunu  $\mathcal{F}_0$  eksen takımında ifade etmek üzere, (3.1.28) denklemi şöyle yazılır.

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \vec{r} + d_6 \vec{u}_3^{(6/0)} = \vec{r} + d_6 \hat{C}^{(0,6)} \vec{u}_3^{(6/6)} \Rightarrow \\ \vec{p} &= \vec{r} + d_6 \hat{C} \vec{u}_3 \end{aligned} \quad (3.1.33)$$

(3.1.23) denkleminle ifade edilen  $\hat{C}$  matrisi yerine konup gerekli sadeleştirmeler yapılnca, aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\begin{aligned}\bar{p} &= \bar{r} + d_6 e^{\tilde{u}_3 \theta_1} e^{\tilde{u}_1 \theta_4} e^{\tilde{u}_2 \theta_5} e^{\tilde{u}_1 \theta_6} e^{\tilde{u}_2 \pi/2} \bar{u}_3 \Rightarrow \\ \bar{p} &= \bar{r} + d_6 e^{\tilde{u}_3 \theta_1} e^{\tilde{u}_1 \theta_4} e^{\tilde{u}_2 \theta_5} e^{\tilde{u}_1 \theta_6} \bar{u}_1 \Rightarrow \\ \bar{p} &= \bar{r} + d_6 e^{\tilde{u}_3 \theta_1} e^{\tilde{u}_1 \theta_4} e^{\tilde{u}_2 \theta_5} \bar{u}_1\end{aligned}\quad (3.1.34)$$

### 3.2. Eklem Değişkenlerini Belirlemek İçin Ters Kinematik Çözüm

Ters kinematik çözümün amacı, işlem aygıtının zemine göre ( $\mathcal{F}_0$  eksen takımına göre) belirtilen konumunu ve yönelimini sağlayacak eklem değişkenlerinin belirlenmesidir. Bu kısımda, ters kinematik çözümün elde edilmesi, Kısım 3.1.2'deki örnek manipülatör kullanılarak gösterilecektir.

#### 3.2.1. İşlem Aygıtının Konumunun Belirtilmesi

İşlem aygıtının zemine göre konumu, genellikle, uç noktasının koordinatları  $(p_1, p_2, p_3)$  verilerek belirtilir. Böylece,  $\bar{p}$  dikeysıra matrisi, aşağıdaki gibi belirtilmiş olur.

$$\bar{p} = \bar{u}_1 p_1 + \bar{u}_2 p_2 + \bar{u}_3 p_3 \quad (3.2.1)$$

#### 3.2.2. İşlem Aygıtının Yöneliminin Belirtilmesi

İşlem aygıtının zemine göre yönelimi, genellikle, isteğe göre seçilen uygun bir  $i$ - $j$ - $k$  sıralamasına göre tanımlanan Euler açıları  $(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$  verilerek belirtilir. Böylece,  $\hat{C}$  yönelim matrisi, aşağıdaki gibi belirtilmiş olur.

$$\hat{C} = e^{\tilde{u}_i \phi_1} e^{\tilde{u}_j \phi_2} e^{\tilde{u}_k \phi_3} \quad (3.2.2)$$

Robotik uygulamalarında, genel olarak, 1-2-3 ve 3-2-3 sıralamalarından biri tercih edilir.

#### 3.2.3. Bilek Noktasının Konumunun Belirlenmesi

(3.1.32) ve (3.1.34) denklemlerinden görüldüğü gibi, bilek noktasına ait konum ifadesi, uç noktasına ait konum ifadesine göre oldukça basittir. Dolayısıyla, hem  $\bar{p}$  hem de  $\hat{C}$  matrisleri belirtilmişlerse, ters kinematik çözüme,  $\bar{p}$  ve  $\hat{C}$  çifti yerine  $\bar{r}$  ve  $\hat{C}$  çifti ile başlamak daha uygun olur. Bu amaçla, belirtilmiş olan  $\bar{p}$  ve  $\hat{C}$  çifti kullanılarak bilek noktasının konumu, (3.1.33) denkleminde şöyle belirlenir.

$$\bar{r} = \bar{p} - d_6 \hat{C} \bar{u}_3 \quad (3.2.3)$$

#### 3.2.4. Eklem Değişkenlerinin Belirlenmesi

Yukarıda bahsedildiği gibi, eklem değişkenlerini bilinen  $\bar{r}$  ve  $\hat{C}$  matrislerine bağlı olarak belirlemek üzere çözülecek denklemler, örnek manipülatör için aşağıda birarada tekrar yazılmıştır.



$$e^{\tilde{u}_3\theta_1}[\bar{u}_1s_3 + \bar{u}_2(b_3 - d_5c\theta_4) + \bar{u}_3(s_2 - d_5s\theta_4)] = \bar{r} \quad (3.2.4)$$

$$e^{\tilde{u}_3\theta_1}e^{\tilde{u}_1\theta_4}e^{\tilde{u}_2\theta_5}e^{\tilde{u}_1\theta_6}e^{\tilde{u}_2\pi/2} = \hat{C} \quad (3.2.5)$$

(3.2.4) ve (3.2.5) denklemlerinde altı adet bilinmeyen eklem değişkeni  $(\theta_1, s_2, s_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6)$  bulunmaktadır. Aynı denklemlerin barındırdığı "bağımsız skalar denklem" sayısı da altıdır.

Burada belirtmek gerekir ki, her ne kadar (3.2.5) denklemi, dokuz adet skalar denklemden oluşuyor olsa da, bu denklemlerden yalnızca üçü bağımsızdır. Çünkü, Bölüm 1'de de belirtildiği gibi,  $\hat{C}$  matrisi ortonormal olduğu için elemanları arasında altı adet ortonormalite ilişkisi vardır. Yani,  $\hat{C}$  matrisinin dikey sıraları, birbirine *dik* olan üç adet *birim* vektörü temsil eder.

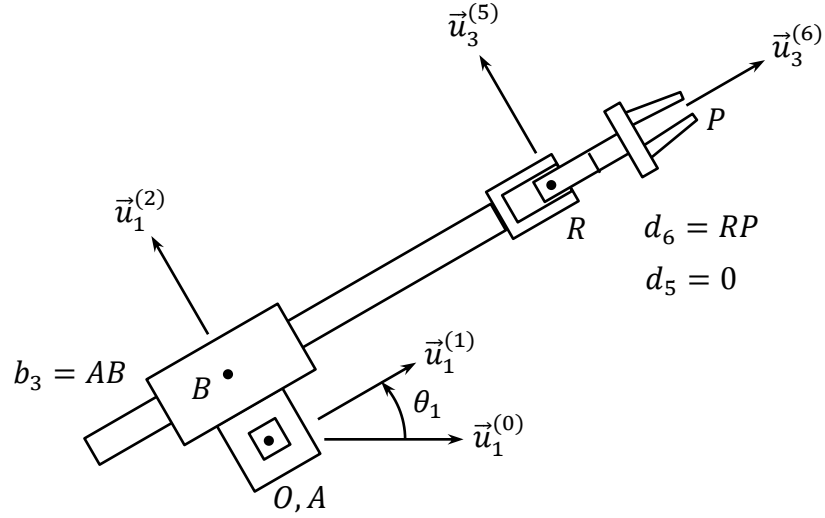
Yeniden (3.2.4) ve (3.2.5) denklemlerine dönülecek olursa, ilkesel olarak, bu denklemler hep birlikte altı değişken için çözülebilirler. Ancak, böyle bir çözüm analitik olarak elde edilemez. Eğer çözümün analitik ya da hiç değilse yarı analitik olarak elde edilmesi isteniyorsa, söz konusu denklemlerin ayrı ayrı üçlü bilinmeyen grupları için çözülmesi gerekir. Bu bölüm, analitik ve yarı analitik çözüm yöntemlerine tahsis edildiği için, söz konusu denklemlerin çözümü ayrı ayrı ele alınacaktır.

Eğer  $\hat{C}$  matrisine ait denklem, örnek manipülatörde olduğu gibi, üçten fazla bilinmeyen içeriyorsa, ters kinematik çözüme zorunlu olarak  $\bar{r}$  dikeysıra matrisine ait denklemden başlanır.

Ne var ki, örnek manipülatör için,  $\bar{r}$  dikeysıra matrisine ait olan (3.2.4) denklemi, görüldüğü gibi, üç skalar denklemden oluşmakta fakat dört bilinmeyen  $(\theta_1, s_2, s_3, \theta_4)$  içermektedir. Dolayısıyla, örnek manipülatör için, Şekil 3.2'de gösterilen biçimiyle, analitik çözüm elde edilemez. Bununla birlikte, yarı analitik bir çözüm elde edilebilir. Böyle bir çözüm, ileride, Kısım 3.2.6'da gösterilecektir.

### 3.2.5. Eklem Değişkenlerinin Analitik Olarak Belirlenmesi

Eğer analitik çözüm isteniyorsa, örnek manipülatörün yapısında,  $d_5 = 0$  olacak biçimde ufak bir değişiklik yapılması gerekir. Bu biçimde değiştirilmiş "modifiye örnek manipülatör", üstten görünümüyle Şekil 3.3'te gösterilmiştir.



Şekil 3.3. Modifiye Örnek Manipülatör

Modifiye örnek manipülatörün ters kinematik çözümüne başlamak üzere, (3.2.4) denklemi,  $d_5 = 0$  basitleştirmesiyle ve sol tarafındaki ön çarpan sağ tarafına alınarak aşağıdaki gibi yazılabilir. Böylece, analitik çözümü kolaylaştırmak amacıyla bilinmeyenler denklemin iki tarafına yayılmış olur.

$$\bar{u}_1 s_3 + \bar{u}_2 b_3 + \bar{u}_3 s_2 = e^{-\bar{u}_3 \theta_1} \bar{r} \quad (3.2.6)$$

(3.2.6) denkleminin iki tarafı, sırayla,  $\bar{u}_1^t$ ,  $\bar{u}_2^t$ , ve  $\bar{u}_3^t$  ile önden çarpılırsa, aşağıdaki skalar denklemler elde edilir.

$$s_3 = \bar{u}_1^t e^{-\bar{u}_3 \theta_1} \bar{r} = (\bar{u}_1^t c \theta_1 + \bar{u}_2^t s \theta_1) \bar{r} = r_1 c \theta_1 + r_2 s \theta_1 \quad (3.2.7)$$

$$b_3 = \bar{u}_2^t e^{-\bar{u}_3 \theta_1} \bar{r} = (\bar{u}_2^t c \theta_1 - \bar{u}_1^t s \theta_1) \bar{r} = r_2 c \theta_1 - r_1 s \theta_1 \quad (3.2.8)$$

$$s_2 = \bar{u}_3^t e^{-\bar{u}_3 \theta_1} \bar{r} = \bar{u}_3^t \bar{r} = r_3 \quad (3.2.9)$$

(3.2.9) denklemi,  $s_2$  eklem değişkenini zaten  $s_2 = r_3$  olarak vermiş durumdadır.

(3.2.8) denklemi ise, yalnızca  $\theta_1$  eklem değişkenini içermektedir. Bu denklem,  $\theta_1$  için çeşitli yöntemlerle çözülebilir. Bu yöntemlerden birinde, ilk aşamada,  $c \theta_1$  ile  $s \theta_1$ , ayrı ayrı aşağıda olduğu gibi,  $\sigma_1$  simgesi ile temsil edilen bir "işaret belirsizliği" eşliğinde elde edilirler.

$$c \theta_1 = \frac{b_3 r_2 + \sigma_1 r_1 \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - b_3^2}}{r_1^2 + r_2^2} = \frac{x_1}{r_1^2 + r_2^2} \quad (3.2.10)$$

$$s \theta_1 = \frac{-b_3 r_1 + \sigma_1 r_2 \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - b_3^2}}{r_1^2 + r_2^2} = \frac{y_1}{r_1^2 + r_2^2} \quad (3.2.11)$$

$$\sigma_1 = \pm 1 \quad (3.2.13)$$

İkinci aşamada ise, (3.2.10) ve (3.2.11) denklemleri,  $\theta_1$  açısını şöyle verir.

$$\theta_1 = \text{atan}_2(s\theta_1, c\theta_1) = \text{atan}_2(y_1, x_1) \quad (3.2.14)$$

$\theta_1$  açısı bulunduğundan sonra,  $s_3$  değişkeni de, (3.2.7) denkleminde aşağıda gösterilen biçimde elde edilir.

$$s_3 = r_1 c\theta_1 + r_2 s\theta_1 = \sigma_1 \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - b_3^2} \quad (3.2.15)$$

Analitik çözümün avantajları olarak, yukarıdaki çözüm ifadeleri, aşağıda belirtilen iki husus hakkında da doğrudan bilgi vermektedir.

(i) Çalışma hacmi sınırlamaları:

$$0 < s_2^\circ \leq s_2 \leq s_2^* \Rightarrow s_2^\circ \leq r_3 \leq s_2^* \quad (3.2.17)$$

$$0 < s_3^\circ \leq s_3 \leq s_3^* \Rightarrow (s_2^\circ)^2 + b_3^2 \leq r_1^2 + r_2^2 \leq (s_2^*)^2 + b_3^2 \quad (3.2.18)$$

(ii) İşaret belirlemesi:

$$0 < s_3^\circ \leq s_3 \leq s_3^* \Rightarrow \sigma_1 = +1 \quad (3.2.19)$$

İlk üç eklem değişkeni belirlendikten sonra, geri kalan üç eklem değişkenini belirlemek üzere, (3.2.5) denklemi şöyle yazılabilir.

$$e^{\tilde{u}_1 \theta_4} e^{\tilde{u}_2 \theta_5} e^{\tilde{u}_1 \theta_6} = \hat{D} \quad (3.2.20)$$

$$\hat{D} = e^{-\tilde{u}_3 \theta_1} \hat{C} e^{-\tilde{u}_2 \pi/2} \quad (3.2.21)$$

(3.2.21) denklemiyle tanımlanan  $\hat{D}$  matrisi, verilmiş olan  $\hat{C}$  matrisi ve belirlenmiş olan  $\theta_1$  açısına bağlı olarak bilinen bir matristir.

(3.2.20) denklemi, görüldüğü gibi, bilinmeyen açıları 1-2-1 sıralamasıyla içermektedir. Bu denklemi çözmek amacıyla, önce, üzerinde Bölüm 1'deki formüller aracılığıyla gerekli işlemler yapılarak aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\begin{aligned} \bar{u}_1^t e^{\tilde{u}_1 \theta_4} e^{\tilde{u}_2 \theta_5} e^{\tilde{u}_1 \theta_6} \bar{u}_1 &= \bar{u}_1^t e^{\tilde{u}_2 \theta_5} \bar{u}_1 = \bar{u}_1^t (\bar{u}_1 c\theta_5 - \bar{u}_3 s\theta_5) = \bar{u}_1^t \hat{D} \bar{u}_1 = d_{11} \Rightarrow \\ c\theta_5 &= d_{11} \end{aligned} \quad (3.2.22)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_2^t e^{\tilde{u}_1 \theta_4} e^{\tilde{u}_2 \theta_5} e^{\tilde{u}_1 \theta_6} \bar{u}_1 &= \bar{u}_2^t e^{\tilde{u}_1 \theta_4} e^{\tilde{u}_2 \theta_5} \bar{u}_1 = \bar{u}_2^t \hat{D} \bar{u}_1 = d_{21} \Rightarrow \\ s\theta_4 s\theta_5 &= d_{21} \end{aligned} \quad (3.2.23)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_3^t e^{\tilde{u}_1 \theta_4} e^{\tilde{u}_2 \theta_5} e^{\tilde{u}_1 \theta_6} \bar{u}_1 &= \bar{u}_3^t e^{\tilde{u}_1 \theta_4} e^{\tilde{u}_2 \theta_5} \bar{u}_1 = \bar{u}_3^t \hat{D} \bar{u}_1 = d_{31} \Rightarrow \\ c\theta_4 s\theta_5 &= -d_{31} \end{aligned} \quad (3.2.24)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_1^t e^{\tilde{u}_1 \theta_4} e^{\tilde{u}_2 \theta_5} e^{\tilde{u}_1 \theta_6} \bar{u}_2 &= \bar{u}_1^t e^{\tilde{u}_2 \theta_5} e^{\tilde{u}_1 \theta_6} \bar{u}_2 = \bar{u}_1^t \hat{D} \bar{u}_2 = d_{12} \Rightarrow \\ s\theta_5 s\theta_6 &= d_{12} \end{aligned} \quad (3.2.25)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_1^t e^{\tilde{u}_1 \theta_4} e^{\tilde{u}_2 \theta_5} e^{\tilde{u}_1 \theta_6} \bar{u}_3 &= \bar{u}_1^t e^{\tilde{u}_2 \theta_5} e^{\tilde{u}_1 \theta_6} \bar{u}_3 = \bar{u}_1^t \hat{D} \bar{u}_3 = d_{13} \Rightarrow \\ s\theta_5 c\theta_6 &= d_{13} \end{aligned} \quad (3.2.26)$$

(3.2.22) denkleminde  $s\theta_5$  ve  $\theta_5$ ,  $\sigma_5$  simgesi ile temsil edilen bir "işaret belirsizliği" eşliğinde şöyle elde edilirler.

$$s\theta_5 = \sigma_5 \sqrt{1 - d_{11}^2} = \sigma_5 d_{11}^* \quad (3.2.27)$$

$$\theta_5 = \text{atan}_2(s\theta_5, c\theta_5) = \text{atan}_2(\sigma_5 d_{11}^*, d_{11}) \quad (3.2.28)$$

$$\sigma_5 = \pm 1 \quad (3.2.29)$$

Eğer  $s\theta_5 \neq 0$  ise, yani  $d_{11}^* > 0$  ise,  $\theta_4$  ve  $\theta_6$  açıları, (3.2.23-24) ve (3.2.25-26) denklem çiftlerinden, ek bir işaret belirsizliğine yol açmadan, şöyle elde edilirler.

$$\theta_4 = \text{atan}_2(s\theta_4, c\theta_4) = \text{atan}_2(\sigma_5 d_{21}, -\sigma_5 d_{31}) \quad (3.2.30)$$

$$\theta_6 = \text{atan}_2(s\theta_6, c\theta_6) = \text{atan}_2(\sigma_5 d_{12}, \sigma_5 d_{13}) \quad (3.2.31)$$

Yukarıdaki denklemlere göre, eğer  $\sigma_5 = +1$ ,  $\{\theta_5, \theta_4, \theta_6\}$  açı üçlüsünü veriyorsa,  $\sigma_5 = -1$ ,  $\{\theta_5' = -\theta_5, \theta_4' = \theta_4 + \pi, \theta_6' = \theta_6 + \pi\}$  açı üçlüsünü verir. Ne var ki, Şekil 3.2,  $d_5 = 0$  olduğu düşünülerek incelendiğinde görülebilir ki, bu farklı açı üçlüleri, işlem aygıtı için aynı yönelimi sağlarlar. Bu nedenle, genelliği bozmaksızın,  $\sigma_5$  için  $\sigma_5 = +1$  değeri seçilebilir.

Yine yukarıdaki denklemlere göre,  $\theta_4$  ile  $\theta_6$  açıları,  $s\theta_5 \neq 0$  ise elde edilebilmişlerdir. Eğer  $s\theta_5 = 0$  olursa, bir "konumsal tekil durum" ortaya çıkar ve  $\theta_4$  ile  $\theta_6$  açıları, (3.2.23-24) ve (3.2.25-26) denklem çiftlerinden elde edilemezler, çünkü bu denklem çiftleri,  $0 = 0$  biçimine dönüşürler. Bununla birlikte, böyle bir tekil durumda,  $\theta_4$  ve  $\theta_6$  açıları, ayrı ayrı belirlenemeseler bile, hiç değilse, toplamları (ya da farkları), aşağıda açıklanan biçimde belirlenebilir.

Yukarıda bahsedilen konumsal tekil durumda, yani  $s\theta_5 = 0$  iken,  $\theta_5$  açısı, matematiksel olarak  $\theta_5 = 0$  ya da  $\theta_5 = \pm\pi$  olabilir. Ancak, Şekil 3.2'ye göre,  $\theta_5 = \pm\pi$  olması mümkün değildir. Bu nedenle, konumsal tekil durum,  $\theta_5 = 0$  iken ortaya çıkar. Böyle bir durumda, (3.2.20) denklemi aşağıdaki özel şekli alır.

$$e^{\tilde{u}_1 \theta_4} e^{\tilde{u}_2 0} e^{\tilde{u}_1 \theta_6} = e^{\tilde{u}_1 \theta_4} e^{\tilde{u}_1 \theta_6} = e^{\tilde{u}_1 (\theta_4 + \theta_6)} = e^{\tilde{u}_1 \theta_{46}} = \hat{D} \quad (3.2.32)$$

Görüldüğü gibi, (3.2.32) denkleminde göre, yalnızca  $\theta_{46} = \theta_4 + \theta_6$  toplam açısı belirlenebilir. Bu açı, aşağıda gösterilen biçimde bulunabilir.

$$\bar{u}_2^t e^{\tilde{u}_1 \theta_{46}} \bar{u}_2 = \bar{u}_2^t (\bar{u}_2 c\theta_{46} + \bar{u}_3 s\theta_{46}) = \bar{u}_2^t \hat{D} \bar{u}_2 \Rightarrow c\theta_{46} = d_{22} \quad (3.2.33)$$

$$\bar{u}_3^t e^{\tilde{u}_1 \theta_{46}} \bar{u}_2 = \bar{u}_3^t (\bar{u}_2 c\theta_{46} + \bar{u}_3 s\theta_{46}) = \bar{u}_3^t \hat{D} \bar{u}_2 \Rightarrow s\theta_{46} = d_{32} \quad (3.2.33)$$

$$\theta_{46} = \text{atan}_2(s\theta_{46}, c\theta_{46}) = \text{atan}_2(d_{32}, d_{22}) \quad (3.2.34)$$

### 3.2.6. Eklem Değişkenlerinin Yarı Analitik Olarak Belirlenmesi

Daha önce de bahsedildiği gibi, eğer örnek manipülatörün  $d_5 \neq 0$  olma özelliği korunursa, ters kinematik çözüm tümüyle analitik olarak elde edilemez. Bununla birlikte, hiç değilse, yarı analitik bir çözüm elde edilebilir.

Yarı analitik bir çözüm elde etmek için, önce, eklem değişkenlerinden birinin, örneğin  $\theta_1$  açısının, geçici olarak bilindiği varsayılır ve diğer eklem değişkenleri, analitik olarak  $\theta_1$  açısının işlevleri biçiminde elde edilirler. Daha sonra, elde edilen işlevler arasındaki "tutarlılık denklemi" sayısal olarak çözülerek  $\theta_1$  açısının kendisi de elde edilir.

Yukarıda kısaca açıklanan yöntemi uygulamak üzere, (3.2.4) denklemi şöyle yazılır.

$$\bar{u}_1 s_3 + \bar{u}_2 (b_3 - d_5 c \theta_4) + \bar{u}_3 (s_2 - d_5 s \theta_4) = e^{-\bar{u}_3 \theta_1 \bar{r}} \quad (3.2.35)$$

Önceki kısımda da yapıldığı gibi, (3.2.35) denkleminin iki tarafı, sırayla,  $\bar{u}_1^t$ ,  $\bar{u}_2^t$ , ve  $\bar{u}_3^t$  ile önden çarpılırsa, aşağıdaki skalar denklemler elde edilir.

$$s_3 = r_1 c \theta_1 + r_2 s \theta_1 \quad (3.2.36)$$

$$b_3 - d_5 c \theta_4 = r_2 c \theta_1 - r_1 s \theta_1 \quad (3.2.37)$$

$$s_2 - d_5 s \theta_4 = r_3 \quad (3.2.38)$$

(3.2.36) denklemi,  $s_3$  eklem değişkenini zaten  $s_3 = f_3(\theta_1)$  biçiminde vermiş durumdadır.

(3.2.37) denkleminden  $\theta_4 = f_4(\theta_1)$  işlevi, aşağıda gösterilen biçimde elde edilebilir.

$$d_5 c \theta_4 = x_4(\theta_1) = b_3 + r_1 s \theta_1 - r_2 c \theta_1 \quad (3.2.39)$$

$$d_5 s \theta_4 = y_4(\theta_1) = \sigma_4 \sqrt{d_5^2 - x_4^2(\theta_1)} \quad (3.2.39)$$

$$\sigma_4 = \pm 1 \quad (3.2.40)$$

$$\theta_4 = f_4(\theta_1, \sigma_4) = \text{atan}_2(s \theta_4, c \theta_4) = \text{atan}_2[y_4(\theta_1), x_4(\theta_1)] \quad (3.2.41)$$

$\theta_4$  açısı elde edildikten sonra,  $s_2$  değişkeni de, (3.2.38) denkleminden şöyle elde edilir.

$$s_2 = f_2(\theta_1, \sigma_4) = r_3 + d_5 s \theta_4 = r_3 + \sigma_4 \sqrt{d_5^2 - x_4^2(\theta_1)} \quad (3.2.42)$$

(3.2.42) denkleminin sunduğu iki seçeneğe göre,  $s_2$  kayma mesafesinin daha küçük olması için  $\sigma_4 = -1$  olarak seçilebilir.

İlk üç eklem değişkeni elde edildikten sonra, geri kalan üç eklem değişkenini belirlemek üzere, (3.2.5) denklemi şöyle yazılabilir.

$$e^{\bar{u}_1 \theta_4} e^{\bar{u}_2 \theta_5} e^{\bar{u}_3 \theta_6} = \hat{D} \quad (3.2.43)$$

$$\hat{D} = \hat{D}(\theta_1) = e^{-\bar{u}_3 \theta_1 \hat{C}} e^{-\bar{u}_2 \pi / 2} \quad (3.2.44)$$

(3.2.43) denklemi, önceki kısımda olduğu gibi,  $\sigma_5 = +1$  seçeneğiyle çözülerek, tekil olmayan ( $s \theta_5 = 0$  olmayan) olan durumlar için aşağıdaki işlevler elde edilir.

$$\theta_5 = g_5(\theta_1, \sigma_4) \quad (3.2.45)$$

$$\theta_4 = g_4(\theta_1, \sigma_4) \quad (3.2.46)$$

$$\theta_6 = g_6(\theta_1, \sigma_4) \quad (3.2.47)$$

Görüldüğü gibi,  $\theta_4$  açısı, (3.2.41) ve (3.2.46) denklemleriyle,  $\theta_1$  açısının iki farklı işlevi olarak elde edilmiştir. Doğal olarak her iki işlevin de aynı değeri vermesi gerektiği için aşağıdaki tutarlılık denklemi ortaya çıkar.

$$g_4(\theta_1, \sigma_4) = f_4(\theta_1, \sigma_4) \quad (3.2.48)$$

(3.2.48) denkleminde de,  $\sigma_4$  için yapılan seçime bağlı olarak,  $\theta_1$  açısı bulunabilir. Daha sonra,  $\theta_1$  açısının bulunan değeri, yukarıda elde edilmiş bulunan işlev ifadelerinde yerine konarak diğer eklem değişkenlerinin de değerleri bulunur.

Ne var ki, (3.2.48) denklemi oldukça karmaşıktır ve bu nedenle analitik olarak çözülemez. Dolayısıyla, sayısal olarak çözülmesi gerekir. Bununla birlikte, tek bilinmeyenli skalar bir denklem olduğu için sayısal olarak çözülmesi, oldukça kolaydır.

Örneğin, en basit bir yöntem olarak  $\theta_1$  açısına,  $\delta\theta_1$  adımlarıyla  $[-\pi, \pi]$  açı aralığı taratılabilir ve (3.2.48) denklemini sağlamaya en yakın gelen  $\theta_1$  değeri ya da değerleri saptanabilir. Daha sonra, eğer gerek duyulursa, bu değer ya da değerler, uygun bir yineleme yöntemiyle rafine edilebilir.

Takdir edileceği üzere, yukarıda anlatılan yarı analitik çözüm yaklaşımı, altı bilinmeyenli altı denklemi topluca sayısal olarak çözme yaklaşımına göre çok daha kolaydır. Ayrıca, manipülatörün "çoklu çözümler" ve "konumsal tekil durumlar" gibi ters kinematik özelliklerini yansıtması bakımından da gayet elverişlidir.

## BÖLÜM 4

### SERİ MANİPÜLATÖRLERİN HIZ ANALİZİ

#### 4.1. Uzuvarın Ötelenme ve Dönme (Açısal) Hızları İçin İleri Kinematik Eşitlikleri

Bu kısımda, bir seri manipulatörün eklem değişkenleri ve eklem değişkeni türevleri (e. d. türevleri) verildiğinde, uzuvlarının zemine göre ötelenme ve dönme (açısal) hızlarını belirlemeye yarayan eşitlikler oluşturulacaktır.

##### 4.1.1. Uzuvarın Zemine Göre Açısal Hızları

Uzuvarın zemine ( $\mathcal{F}_0$  eksen takımına) göre açısal hızları, aşağıdaki yenilemeli denklemlerle ifade edilebilir.

$$\left. \begin{aligned} \vec{\omega}_{k/0} &= \vec{\omega}_{k-1/0} + \vec{\omega}_{k/k-1} \\ \vec{\omega}_{0/0} &= \vec{0} \\ k &= 1, 2, 3, \dots, m \end{aligned} \right\} \quad (4.1.1)$$

$L_k$  ile  $L_{k-1}$  uzuvları arasındaki dönme açısı  $\theta_k$  ve eklem eksenini birim vektörü  $\vec{u}_3^{(k)}$  olduğu için, bağıl açısal hız şöyle ifade edilebilir.

$$\vec{\omega}_{k/k-1} = \vec{u}_3^{(k)} \dot{\theta}_k \quad (4.1.2)$$

Tabii, eğer aradaki eklem kayar eklemse,  $\theta_k = \delta_k = \text{sabit}$  olduğu için bağıl açısal hız sıfır olur.

(4.1.1) ve (4.1.2) vektör denklemlerinin  $\mathcal{F}_0$  eksen takımındaki birleştirilmiş matris karşılığı şöyle yazılabilir.

$$\left. \begin{aligned} \vec{\omega}_{k/0} &= \vec{\omega}_{k-1/0} + \dot{\theta}_k \hat{C}^{(0,k)} \vec{u}_3 \\ \vec{\omega}_{0/0} &= \vec{0} \\ k &= 1, 2, 3, \dots, m \end{aligned} \right\} \quad (4.1.3)$$

(4.1.3) denkleminde,  $\vec{\omega}_{k/0} = \vec{\omega}_{k/0}^{(0)}$  biçimindeki gösterim kısaltması kullanılmıştır.

En çok kullanılan açısal hız olması nedeniyle, işlem aygıtının (son uzvun) açısal hızı için de aşağıdaki daha özel gösterim kısaltması kullanılabilir.

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_{m/0} \quad (4.1.4)$$

(4.1.4) denklemi, daha ayrıntılı olarak şöyle de yazılabilir.

$$\vec{\omega} = \dot{\theta}_1 \hat{C}^{(0,1)} \vec{u}_3 + \dot{\theta}_2 \hat{C}^{(0,2)} \vec{u}_3 + \dot{\theta}_3 \hat{C}^{(0,3)} \vec{u}_3 + \dots + \dot{\theta}_m \hat{C}^{(0,m)} \vec{u}_3 \quad (4.1.5)$$

Örnek manipulatör için Bölüm 3'te oluşturulan yönelim matrisleri yerlerine konunca, (4.1.5) denklemi şu şekli alır.

$$\begin{aligned}\bar{\omega} = & \dot{\theta}_1 e^{\tilde{u}_3 \theta_1} \bar{u}_3 + \dot{\theta}_4 e^{\tilde{u}_3 \theta_1} e^{\tilde{u}_1 \theta_4} e^{\tilde{u}_2 \pi/2} \bar{u}_3 + \dot{\theta}_5 e^{\tilde{u}_3 \theta_1} e^{\tilde{u}_1 \theta_4} e^{\tilde{u}_2 \theta_5} e^{\tilde{u}_2 \pi/2} e^{-\tilde{u}_1 \pi/2} \bar{u}_3 \\ & + \dot{\theta}_6 e^{\tilde{u}_3 \theta_1} e^{\tilde{u}_1 \theta_4} e^{\tilde{u}_2 \theta_5} e^{\tilde{u}_1 \theta_6} e^{\tilde{u}_2 \pi/2} \bar{u}_3\end{aligned}$$

Bölüm 1'deki formüller kullanılarak yapılan işlemlerle, yukarıdaki denklem, önemli ölçüde sadeleştirilerek aşağıdaki şekle indirgenebilir.

$$\bar{\omega} = \dot{\theta}_1 \bar{u}_3 + \dot{\theta}_4 e^{\tilde{u}_3 \theta_1} \bar{u}_1 + \dot{\theta}_5 e^{\tilde{u}_3 \theta_1} e^{\tilde{u}_1 \theta_4} \bar{u}_2 + \dot{\theta}_6 e^{\tilde{u}_3 \theta_1} e^{\tilde{u}_1 \theta_4} e^{\tilde{u}_2 \theta_5} \bar{u}_1 \quad (4.1.6)$$

#### 4.1.2. Uzunların Zemine Göre Ötelenme Hızları

Uzunların zemine ( $\mathcal{F}_0$  eksen takımına) göre ötelenme hızları, yani  $O_1, O_2, \dots, O_m$  noktalarının  $O_0$  noktasına göre hızları, uzunların açılal hızlarına benzer bir biçimde, aşağıdaki yenilemeli denklemle ifade edilebilir.

$$\left. \begin{aligned}\vec{v}_{k/0} &= \vec{v}_{k-1/0} + \vec{v}_{k/k-1} \\ \vec{v}_{0/0} &= \vec{0} \\ k &= 1, 2, 3, \dots, m\end{aligned} \right\} \quad (4.1.7)$$

$L_k$  ile  $L_{k-1}$  uzunları arasındaki bağıl ötelenme hızı, Coriolis/Transport teoremi kullanılarak şöyle ifade edilebilir.

$$\begin{aligned}\vec{v}_{k/k-1} &= D_0 \vec{r}_{k/k-1} = D_0 [b_k \vec{u}_1^{(k-1)} + s_k \vec{u}_3^{(k)}] \Rightarrow \\ \vec{v}_{k/k-1} &= D_0 [b_k \vec{u}_1^{(k-1)}] + D_0 [s_k \vec{u}_3^{(k)}] \Rightarrow \\ \vec{v}_{k/k-1} &= D_{k-1} [b_k \vec{u}_1^{(k-1)}] + \vec{\omega}_{k-1/0} \times [b_k \vec{u}_1^{(k-1)}] \\ &\quad + D_k [s_k \vec{u}_3^{(k)}] + \vec{\omega}_{k/0} \times [s_k \vec{u}_3^{(k)}] \Rightarrow \\ \vec{v}_{k/k-1} &= b_k \vec{\omega}_{k-1/0} \times \vec{u}_1^{(k-1)} + s_k \vec{\omega}_{k/0} \times \vec{u}_3^{(k)} + \dot{s}_k \vec{u}_3^{(k)}\end{aligned} \quad (4.1.8)$$

(4.1.1) ve (4.1.2) denklemlerine göre,

$$\vec{\omega}_{k/0} = \vec{\omega}_{k-1/0} + \vec{u}_3^{(k)} \dot{\theta}_k \quad (4.1.9)$$

(4.1.9) denklemini sayesinde (4.1.8) denklemini şu şekilde yazılabilir.

$$\begin{aligned}\vec{v}_{k/k-1} &= \vec{\omega}_{k-1/0} \times [b_k \vec{u}_1^{(k-1)} + s_k \vec{u}_3^{(k)}] + \dot{s}_k \vec{u}_3^{(k)} \Rightarrow \\ \vec{v}_{k/k-1} &= \vec{\omega}_{k-1/0} \times \vec{r}_{k/k-1} + \dot{s}_k \vec{u}_3^{(k)}\end{aligned} \quad (4.1.10)$$

(4.1.7) ve (4.1.10) vektör denklemlerinin  $\mathcal{F}_0$  eksen takımındaki birleştirilmiş matris karşılığı şöyle yazılabilir.



$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_{k/0} &= \bar{v}_{k-1/0} + \dot{s}_k \hat{C}^{(0,k)} \bar{u}_3 + \tilde{\omega}_{k-1/0} \hat{C}^{(0,k-1)} (b_k \bar{u}_1 + s_k e^{\tilde{u}_1 \beta_k} \bar{u}_3) \\ \bar{v}_{0/0} &= \bar{0} \\ k &= 1, 2, 3, \dots, m \end{aligned} \right\} \quad (4.1.11)$$

(4.1.11) denkleminde,  $\bar{\omega}_{k/0} = \bar{\omega}_{k/0}^{(0)}$  ve  $\bar{v}_{k/0} = \bar{v}_{k/0}^{(0)}$  biçimindeki gösterim kısaltmaları kullanılmıştır.

Bir seri manipülatörde en çok kullanılan ötelenme hızı, işlem aygıtına (son uzva) aittir. Bu hızı temsil etmek üzere bilek ve uç noktalarının hızları kullanılabilir. Bu noktaların hızları, kısaca şöyle gösterilebilir.

$$\bar{w} = \bar{v}_R = \bar{v}_{R/O/\mathcal{F}_0} = D_0 \bar{r}_{R/O} = D_0 \bar{r} \quad (4.1.12)$$

$$\bar{v} = \bar{v}_P = \bar{v}_{P/O/\mathcal{F}_0} = D_0 \bar{r}_{P/O} = D_0 \bar{p} \quad (4.1.13)$$

Öte yandan, bir çok seri manipülatörde, örnek manipülatörde de olduğu gibi,  $\bar{p}$  ve  $\bar{r}$  vektörleri arasında, aşağıdaki ilişki bulunur.

$$\bar{p} = \bar{r} + \bar{z} = \bar{r} + d_m \bar{u}_3^{(m)} \quad (4.1.14)$$

(4.1.14) denkleminin  $\mathcal{F}_0$  eksen takımına göre taraf tarafa türevi alınınca, aşağıdaki hız ilişkisi elde edilir.

$$\begin{aligned} D_0 \bar{p} &= D_0 \bar{r} + d_m D_0 \bar{u}_3^{(m)} \Rightarrow \bar{v} = \bar{w} + d_m [D_m \bar{u}_3^{(m)} + \bar{\omega}_{m/0} \times \bar{u}_3^{(m)}] \Rightarrow \\ \bar{v} &= \bar{w} + d_m \bar{\omega} \times \bar{u}_3^{(m)} \end{aligned} \quad (4.1.15)$$

Yukarıdaki denklemlerin  $\mathcal{F}_0$  eksen takımındaki matris karşılıkları şöyle yazılabilir.

$$\bar{w} = \bar{w}^{(0)} \quad (4.1.16)$$

$$\bar{v} = \bar{v}^{(0)} \quad (4.1.16)$$

$$\bar{v} = \bar{w} + d_m \tilde{\omega} \hat{C} \bar{u}_3 \quad (4.1.18)$$

Bölüm 3'ten hatırlanacağı üzere, bilek noktasının zemine göre konumu şu denklemlerle ifade edilmiştir.

$$\bar{r} = e^{\tilde{u}_3 \theta_1} [\bar{u}_1 s_3 + \bar{u}_2 (b_3 - d_5 c \theta_4) + \bar{u}_3 (s_2 - d_5 s \theta_4)] \quad (4.1.19)$$

Bilek noktasının zemine göre hızı ise, (4.1.19) denkleminin taraf tarafa türevi alınarak şöyle ifade edilebilir.

$$\begin{aligned} \bar{w} = \dot{\bar{r}} &= \dot{\theta}_1 e^{\tilde{u}_3 \theta_1} \tilde{u}_3 [\bar{u}_1 s_3 + \bar{u}_2 (b_3 - d_5 c \theta_4) + \bar{u}_3 (s_2 - d_5 s \theta_4)] \\ &+ e^{\tilde{u}_3 \theta_1} [\bar{u}_1 \dot{s}_3 + \bar{u}_2 (d_5 \dot{\theta}_4 s \theta_4) + \bar{u}_3 (\dot{s}_2 - d_5 \dot{\theta}_4 c \theta_4)] \end{aligned} \quad (4.1.20)$$

Yukarıdaki türev alınırken, dönme matrislerinin Bölüm 1'de verilen "türev alma özelliği" kullanılmıştır. Hatırlamak istenirse, bu özellik şöyledir.

$$\partial(e^{\tilde{n}\theta})/\partial\theta = \tilde{n}e^{\tilde{n}\theta} = e^{\tilde{n}\theta} \tilde{n} \quad (4.1.21)$$

Gerekli sadeleştirme ve düzenlemelerden sonra, (4.1.20) denklemi şu şekli alır.

$$\begin{aligned} \bar{w} = e^{\tilde{u}_3\theta_1} \{ & \bar{u}_1[\dot{s}_3 - (b_3 - d_5c\theta_4)\dot{\theta}_1] \\ & + \bar{u}_2(s_3\dot{\theta}_1 + d_5\dot{\theta}_4s\theta_4) + \bar{u}_3(\dot{s}_2 - d_5\dot{\theta}_4c\theta_4) \} \end{aligned} \quad (4.1.22)$$

## 4.2. Eklem Değişkeni Türevlerini Belirlemek İçin Ters Kinematik Çözüm

Hız ilişkilerinde ters kinematik çözümün amacı, manipülatör belli bir duruşta iken, işlem aygıtının zemine göre ( $\mathcal{F}_0$  eksen takımına göre) belirtilen ötelenme ve dönme hızlarını sağlayacak eklem değişkeni türevlerinin (e. d. türevlerinin) belirlenmesidir.

Bu kısımda, e. d. türevleri için ters kinematik çözümün elde edilişi, Bölüm 3'de tanıtılan örnek manipülatör kullanılarak gösterilecektir.

### 4.2.1. İşlem Aygıtının Ötelenme Hızının Belirtilmesi

İşlem aygıtının zemine göre ötelenme hızı, genellikle, uç noktasının zemine göre hız bileşenleri ( $v_1 = \dot{p}_1, v_2 = \dot{p}_2, v_3 = \dot{p}_3$ ) verilerek belirtilir. Böylece,  $\bar{v}$  dikeysıra matrisi, aşağıdaki gibi belirtilmiş olur.

$$\bar{v} = \bar{u}_1v_1 + \bar{u}_2v_2 + \bar{u}_3v_3 \quad (4.2.1)$$

### 4.2.2. İşlem Aygıtının Dönme ya da Açısal Hızının Belirtilmesi

Bölüm 3'te de bahsedildiği gibi, işlem aygıtının zemine göre yönelimi, genellikle, isteğe göre seçilen uygun bir  $i-j-k$  sıralamasına göre tanımlanan Euler açıları ( $\phi_1, \phi_2, \phi_3$ ) verilerek belirtilir. Böylece,  $\hat{C}$  yönelim matrisi, aşağıdaki gibi belirtilmiş olur.

$$\hat{C} = e^{\tilde{u}_i\phi_1} e^{\tilde{u}_j\phi_2} e^{\tilde{u}_k\phi_3} \quad (4.2.2)$$

Öte yandan, Bölüm 1'deki (1.8.15) sayılı açısal hız formülü uyarınca, işlem aygıtının zemine göre açısal hızı, belirtilen  $i-j-k$  sıralamalı Euler açıları ve türevleri cinsinden aşağıdaki formüle göre belirtilmiş olur.

$$\tilde{\omega} = \dot{\hat{C}}\hat{C}^t \quad (4.2.3)$$

$\hat{C}$  matrisinin türevi, (4.1.21) formülü kullanılarak şöyle alınır.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{C}} = & \dot{\phi}_1\tilde{u}_i e^{\tilde{u}_i\phi_1} e^{\tilde{u}_j\phi_2} e^{\tilde{u}_k\phi_3} + \dot{\phi}_2 e^{\tilde{u}_i\phi_1} \tilde{u}_j e^{\tilde{u}_j\phi_2} e^{\tilde{u}_k\phi_3} \\ & + \dot{\phi}_3 e^{\tilde{u}_i\phi_1} e^{\tilde{u}_j\phi_2} \tilde{u}_k e^{\tilde{u}_k\phi_3} \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

(4.2.3) denklemi, (4.2.2) ve (4.2.4) denklemleri yerine konup gerekli sadeleştirmeler yapılınca, şu şekli alır.

$$\tilde{\omega} = \dot{\phi}_1\tilde{u}_i + \dot{\phi}_2 e^{\tilde{u}_i\phi_1} \tilde{u}_j e^{-\tilde{u}_i\phi_1} + \dot{\phi}_3 e^{\tilde{u}_i\phi_1} e^{\tilde{u}_j\phi_2} \tilde{u}_k e^{-\tilde{u}_j\phi_2} e^{-\tilde{u}_i\phi_1} \quad (4.2.5)$$

Bölüm 1'de (1.3.13) sayılı formülle verilen bir diğer cebirsel özellik şöyle ifade edilebilir.

$$\bar{r} = \hat{R}\bar{p} \Rightarrow \tilde{r} = \hat{R}\tilde{p}\hat{R}^t \quad (4.2.6)$$

(4.2.6) denklemiyle ifade edilen özelliğe göre,  $\bar{\omega}$  dikeysıra matrisi, Euler açıları ve türevleri cinsinden şöyle belirtilmiş olur.

$$\bar{\omega} = \dot{\phi}_1 \bar{u}_i + \dot{\phi}_2 e^{\tilde{u}_i \phi_1} \bar{u}_j + \dot{\phi}_3 e^{\tilde{u}_i \phi_1} e^{\tilde{u}_j \phi_2} \bar{u}_k \quad (4.2.7)$$

#### 4.2.3. Bilek Noktasının Hızının Belirlenmesi

(4.1.18) ve (4.1.22) denklemlerinden görüldüğü gibi, bilek noktasına ait hız ifadesi, uç noktasına ait hız ifadesine göre oldukça basittir. Dolayısıyla, hem  $\bar{v}$  hem de  $\hat{C}$  ile  $\bar{\omega}$  matrisleri belirtilmişlerse, e. d. türevleri için ters kinematik çözüme,  $\bar{v}$  ve  $\bar{\omega}$  çifti yerine  $\bar{w}$  ve  $\bar{\omega}$  çifti ile başlamak daha uygun olur. Bu amaçla, belirtilmiş olan  $\bar{v}$  ve  $\bar{\omega}$  çifti kullanılarak bilek noktasının hızı, (4.1.18) denkleminde şöyle belirlenir.

$$\bar{w} = \bar{v} - d_6 \bar{\omega} \hat{C} \bar{u}_3 \quad (4.2.8)$$

#### 4.2.4. Eklem Değişkeni Türevlerinin Belirlenmesi

Yukarıda bahsedildiği gibi, manipülatörün belli bir durumunda, e. d. türevlerini bilinen  $\bar{w}$  ve  $\bar{\omega}$  dikeysıra matrislerine bağlı olarak belirlemek üzere çözülecek denklemler, örnek manipülatör için aşağıda birarada tekrar yazılmıştır.

$$\begin{aligned} e^{\tilde{u}_3 \theta_1} \{ \bar{u}_1 [\dot{s}_3 - (b_3 - d_5 c \theta_4) \dot{\theta}_1] + \bar{u}_2 (s_3 \dot{\theta}_1 + d_5 \dot{\theta}_4 s \theta_4) \\ + \bar{u}_3 (\dot{s}_2 - d_5 \dot{\theta}_4 c \theta_4) \} = \bar{w} \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

$$\dot{\theta}_1 \bar{u}_3 + \dot{\theta}_4 e^{\tilde{u}_3 \theta_1} \bar{u}_1 + \dot{\theta}_5 e^{\tilde{u}_3 \theta_1} e^{\tilde{u}_1 \theta_4} \bar{u}_2 + \dot{\theta}_6 e^{\tilde{u}_3 \theta_1} e^{\tilde{u}_1 \theta_4} e^{\tilde{u}_2 \theta_5} \bar{u}_1 = \bar{\omega} \quad (4.2.10)$$

(4.2.9) ve (4.2.10) denklemlerinde altı adet bilinmeyen e. d. türevi ( $\dot{\theta}_1, \dot{s}_2, \dot{s}_3, \dot{\theta}_4, \dot{\theta}_5, \dot{\theta}_6$ ) bulunmaktadır. Aynı denklemlerin barındırdığı "bağımsız skalar denklem" sayısı da altıdır. Dolayısıyla, istenen türevler, (4.2.9) ve (4.2.10) denklemleri çözülerek elde edilebilirler.

#### 4.2.5. Eklem Değişkeni Türevlerinin Sayısal Olarak Belirlenmesi

Eğer e. d. türevlerinin sayısal olarak belirlenmesi isteniyorsa, (4.2.9) ve (4.2.10) denklemleri, hep birlikte altı bilinmeyen e. d. türevi için çözülebilirler. Bu amaçla, söz konusu denklemler topluca şöyle yazılabilir.

$$\hat{J}_R \dot{\bar{q}} = \bar{\eta}_R \quad (4.2.11)$$

(4.2.11) denkleminde aşağıdaki tanımlar kullanılmıştır.

a) Eklem değişkenleri dikeysıra matrisi:

$$\bar{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_6 \end{bmatrix} \quad (4.2.12)$$

Yukarıdaki tanımda,  $q_k$  simgesi, genel bir eklem değişkenini gösterir ve eklem döner ya da kayar olmasına göre, ya  $\theta_k$  ya da  $s_k$  anlamına gelir. Diğer bir deyişle,

$$q_k = \begin{cases} \theta_k & \text{eğer eklem döner eklemse} \\ s_k & \text{eğer eklem kayar eklemse} \end{cases} \quad (4.2.13)$$

b) İşlem aygıtının bilek noktasına ilişkin "birleşik hız" dikeysıra matrisi:

$$\bar{\eta}_R = \begin{bmatrix} \bar{W} \\ \bar{\omega} \end{bmatrix} \quad (4.2.14)$$

c) İşlem aygıtının bilek noktasına ilişkin Jacobi (Yakobi) matrisi:

$$\hat{J}_R = \begin{bmatrix} \bar{W}_1 & \bar{W}_2 & \cdots & \bar{W}_6 \\ \bar{\Omega}_1 & \bar{\Omega}_2 & \cdots & \bar{\Omega}_6 \end{bmatrix} \quad (4.2.15)$$

Bu tanım, aşağıdaki ek tanımları içermektedir.

(i) Bilek noktasına ilişkin "hız etki katsayısı":

$$\bar{W}_k = \partial \bar{w} / \partial \dot{q}_k = \partial \bar{r} / \partial q_k \quad (4.2.16)$$

(ii) İşlem aygıtına ilişkin "açısal hız etki katsayısı":

$$\bar{\Omega}_k = \partial \bar{\omega} / \partial \dot{q}_k \quad (4.2.17)$$

(4.2.3) denklemine göre,  $\bar{\Omega}_k$ , antisimetrik matris biçiminde şöyle de ifade edilebilir.

$$\bar{\Omega}_k = (\partial \hat{C} / \partial q_k) \hat{C}^t \quad (4.2.18)$$

Örnek manipülatöre ait hız etki katsayıları, (4.2.9) ve (4.2.10) denklemlerinden yukarıdaki tanımlara göre aşağıdaki gibi elde edilirler.

$$\bar{W}_1 = \partial \bar{w} / \partial \dot{\theta}_1 = e^{\tilde{u}_3 \theta_1} [\bar{u}_2 s_3 - \bar{u}_1 (b_3 - d_5 c \theta_4)] \quad (4.2.19)$$

$$\bar{W}_2 = \partial \bar{w} / \partial \dot{s}_2 = e^{\tilde{u}_3 \theta_1} \bar{u}_3 = \bar{u}_3 \quad (4.2.20)$$

$$\bar{W}_3 = \partial \bar{w} / \partial \dot{s}_3 = e^{\tilde{u}_3 \theta_1} \bar{u}_1 \quad (4.2.21)$$

$$\bar{W}_4 = \partial \bar{w} / \partial \dot{\theta}_4 = d_5 e^{\tilde{u}_3 \theta_1} (\bar{u}_2 s \theta_4 - \bar{u}_3 c \theta_4) \quad (4.2.22)$$

$$\bar{W}_5 = \partial \bar{w} / \partial \dot{\theta}_5 = \bar{0} \quad (4.2.23)$$

$$\bar{W}_6 = \partial \bar{w} / \partial \dot{\theta}_6 = \bar{0} \quad (4.2.24)$$

$$\bar{\Omega}_1 = \partial \bar{\omega} / \partial \dot{\theta}_1 = \bar{u}_3 \quad (4.2.25)$$

$$\bar{\Omega}_2 = \partial \bar{\omega} / \partial \dot{s}_2 = \bar{0} \quad (4.2.26)$$

$$\bar{\Omega}_3 = \partial \bar{\omega} / \partial \dot{s}_3 = \bar{0} \quad (4.2.27)$$

$$\bar{\Omega}_4 = \partial \bar{\omega} / \partial \dot{\theta}_4 = e^{\tilde{u}_3 \theta_1} \bar{u}_1 \quad (4.2.28)$$

$$\bar{\Omega}_5 = \partial \bar{\omega} / \partial \dot{\theta}_5 = e^{\tilde{u}_3 \theta_1} e^{\tilde{u}_1 \theta_4} \bar{u}_2 \quad (4.2.29)$$

$$\bar{\Omega}_6 = \partial \bar{\omega} / \partial \dot{\theta}_6 = e^{\tilde{u}_3 \theta_1} e^{\tilde{u}_1 \theta_4} e^{\tilde{u}_2 \theta_5} \bar{u}_1 \quad (4.2.30)$$

$\hat{J}_R$  matrisi yukarıdaki gibi oluşturulduktan sonra, eğer tekil değilse, yani  $\det(\hat{J}_R) \neq 0$  ise, tersi sayısal olarak alınarak (4.2.11) denkleminde belirlenmesi istenen  $\dot{\bar{q}}$  dikeysıra matrisi, şu şekilde elde edilir.

$$\dot{\bar{q}} = \hat{J}_R^{-1} \bar{\eta}_R \quad (4.2.31)$$

Eğer  $\hat{J}_R$  matrisi tekilse, yani  $\det(\hat{J}_R) = 0$  ise, bir "devinimsel tekil durum" ortaya çıkar. Böyle bir tekil durumda,  $\hat{J}_R$  matrisinin rankı 6'dan  $a$ 'ya düştüğü için tersi alınamaz ve (4.2.31) denklemi kullanılamaz.

Sözü edilen tekil durumda, (4.2.11) denklemi, ikiye ayrıştırılarak şöyle yazılabilir.

$$\hat{J}_{Raa} \dot{\bar{q}}_a + \hat{J}_{Rab} \dot{\bar{q}}_b = \bar{\eta}_{Ra} \quad (4.2.32)$$

$$\hat{J}_{Rba} \dot{\bar{q}}_a + \hat{J}_{Rbb} \dot{\bar{q}}_b = \bar{\eta}_{Rb} \quad (4.2.33)$$

Yukarıdaki ayrıştırma öylesine yapılır ki,  $\hat{J}_{Raa}$  rankı tam (yani  $a$ ) olan bir matris olur. Dolayısıyla bu matrisin de tersi sayısal olarak alınabilir ve  $\dot{\bar{q}}_a$  ayrışkası,  $\dot{\bar{q}}_b$  ayrışkası cinsinden şöyle ifade edilebilir.

$$\dot{\bar{q}}_a = \hat{J}_{Raa}^{-1} (\bar{\eta}_{Ra} - \hat{J}_{Rab} \dot{\bar{q}}_b) \quad (4.2.34)$$

(4.2.34) denklemi yerine konunca, (4.2.33) denklemi şu şekli alır.

$$\hat{J}_{Rba} \hat{J}_{Raa}^{-1} \bar{\eta}_{Ra} + (\hat{J}_{Rbb} - \hat{J}_{Rba} \hat{J}_{Raa}^{-1} \hat{J}_{Rab}) \dot{\bar{q}}_b = \bar{\eta}_{Rb} \quad (4.2.35)$$

Bu arada, tekil durumdaki rank kaybı nedeniyle aşağıdaki eşitlik ortaya çıkar.

$$(\hat{J}_{Rbb} - \hat{J}_{Rba} \hat{J}_{Raa}^{-1} \hat{J}_{Rab}) \dot{\bar{q}}_b = \bar{0} \quad (4.2.36)$$

Bundan dolayı,  $\bar{\eta}_{Rb}$  ile  $\bar{\eta}_{Ra}$  ayrışkaları arasında şu ilişki oluşur.

$$\bar{\eta}_{Rb} = \hat{J}_{Rba} \hat{J}_{Raa}^{-1} \bar{\eta}_{Ra} \quad (4.2.37)$$

(4.2.34) ve (4.2.37) denklemlerinden söz konusu olan devinimsel tekil durum hakkında aşağıda belirtilen sonuçlar çıkar.

(i) İşlem uzayı kısıtlaması:

$\dot{\bar{q}}$  dikeysıra matrisinin tekil durumda sınırsız büyümemesi için, yani  $|\dot{\bar{q}}| < \infty$  olması için, işlem uzayında (4.2.37) denklemiyle ifade edilen kısıtlamaya uyulması gerekir. Bu kısıtlamaya, "tekil durumla tutarlılık kısıtlaması" denir. Eğer işlem aygıtı için hareket planlaması bu kısıtlama uyarınca yapılırsa, manipülatör tekil durumdan herhangi bir e. d. türevinde sınırsız büyüme sorunuyla karşılaşmadan geçebilir.

(ii) Eklem uzayı artıksıllığı:

Manipülatörün tam tekil durumdan geçtiği esnada, eklem uzayında bir an için  $b = 6 - a$  dereceli bir artıksıllık oluşur. (4.2.34) denklemiyle ifade edilen bu artıksıllık nedeniyle  $\dot{\bar{q}}$  dikeysıra matrisinin  $\dot{\bar{q}}_b$  ayrışkası, tekil durum anında isteğe göre seçilebilir. Örneğin, tekil

duruma girmeden hemen önceki değeri neyse, yine o değer seçilerek artıksılıktan kaynaklanan belirsizlik giderilebilir.

Yukarıdaki Jacobi matrisi üzerinde yapılan sayısal işlemlere dayanan tekil durum analizinin, anlatımı kolay olsa da, uygulanmasında bazı zorluklar ortaya çıkar. Bu zorluklar aşağıda belirtilmiştir.

(i)  $6 \times 6$  boyutlu olan  $\hat{J}_R$  matrisinin determinantının simgesel olarak ifade edilmesi, bazı çok özel manipülatörler hariç, oldukça zordur. Bu determinant simgesel olarak ifade edilebilse bile, ortaya çıkan karmaşık ifadeden determinanı sıfır yapan eklem değişkeni değerlerini bulmak pek de kolay olmaz. Simgesel ifadeden vazgeçip tümüyle sayısal bir yöntem kullanılacak olursa, determinanı sıfır yapan eklem değişkenleri bulununcaya kadar determinantın yinelemeli olarak hesaplanması da oldukça külfetli olur. Bu nedenle, tekil durumlar, doğrudan doğruya  $\hat{J}_R$  matrisinden kolaylıkla saptanamaz.

(ii) Tekil durumların bir şekilde saptanmasından sonra, her tekil durumdaki rank kaybının belirlenmesi ve bu rank kaybına bağlı olarak gerekli ayrıştırılmaların yapılması, yine bir çok sayısal işlemin uygulanmasını gerektirir.

Yukarıda belirtilen zorluklar nedeniyle, bir çok manipülatör kullanıcısı, tekil durumlardan geçebilecek tutarlı hareket planlamalarıyla uğraşmak yerine, manipülatörün çalışma hacmindeki kullanılabilir bölgenin küçülmesi pahasına, tekil durumlardan kaçınmayı tercih etmektedir.

Oysa, bir sonraki kısımda anlatılan analitik çözüm yöntemi, yukarıda bahsedilen zorlukları gidermektedir. Böylece, tekil durumları dışlama gereği duymadan, manipülatörün çalışma hacminin tümüyle kullanılabilmesine olanak sağlayan hareket planlamaları yapma imkanı doğmaktadır.

#### 4.2.6. Eklem Değişkeni Türevlerinin Analitik Olarak Belirlenmesi

Analitik çözüm elde etmek amacıyla, (4.2.9) ve (4.2.10) denklemleri şöyle yazılabilir.

$$\begin{aligned} & \bar{u}_1[\dot{s}_3 - (b_3 - d_5 c \theta_4) \dot{\theta}_1] + \bar{u}_2(s_3 \dot{\theta}_1 + d_5 \dot{\theta}_4 s \theta_4) + \bar{u}_3(\dot{s}_2 - d_5 \dot{\theta}_4 c \theta_4) \\ & = e^{-\bar{u}_3 \theta_1} \bar{w} \end{aligned} \quad (4.2.38)$$

$$\dot{\theta}_1 \bar{u}_3 + \dot{\theta}_4 e^{\bar{u}_3 \theta_1} \bar{u}_1 + \dot{\theta}_5 e^{\bar{u}_3 \theta_1} e^{\bar{u}_1 \theta_4} \bar{u}_2 + \dot{\theta}_6 e^{\bar{u}_3 \theta_1} e^{\bar{u}_1 \theta_4} e^{\bar{u}_2 \theta_5} \bar{u}_1 = \bar{w} \quad (4.2.39)$$

Görüldüğü gibi, her iki denklemde de dörder e. d. türevi bulunmaktadır. Bu nedenle,  $\dot{\theta}_1$  e. d. türevinin geçici olarak bilindiği varsayılabilir ve diğer e. d. türevleri,  $\dot{\theta}_1$  cinsinden belirlenebilir. Daha sonra,  $\dot{\theta}_1$  e. d. türevi de, ortaya çıkan tutarlılık koşulundan yararlanarak belirlenir.

Yukarıda anlatılan yaklaşımı uygulamak üzere, (4.2.38) denkleminde aşağıdaki skalar denklemler elde edilir.

$$\dot{s}_3 - (b_3 - d_5 c \theta_4) \dot{\theta}_1 = \bar{u}_1^t e^{-\tilde{u}_3 \theta_1} \bar{w} = w_1 c \theta_1 + w_2 s \theta_1 \quad (4.2.40)$$

$$s_3 \dot{\theta}_1 + d_5 \dot{\theta}_4 s \theta_4 = \bar{u}_2^t e^{-\tilde{u}_3 \theta_1} \bar{w} = w_2 c \theta_1 - w_1 s \theta_1 \quad (4.2.41)$$

$$\dot{s}_2 - d_5 \dot{\theta}_4 c \theta_4 = \bar{u}_3^t e^{-\tilde{u}_3 \theta_1} \bar{w} = w_3 \quad (4.2.42)$$

(4.2.39) denklemi üzerinde ise aşağıdaki işlemler yapılabilir.

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_4 \bar{u}_1 + \dot{\theta}_5 \bar{u}_2 + \dot{\theta}_6 e^{\tilde{u}_2 \theta_5} \bar{u}_1 &= e^{-\tilde{u}_1 \theta_4} e^{-\tilde{u}_3 \theta_1} \bar{w} - \dot{\theta}_1 e^{-\tilde{u}_1 \theta_4} \bar{u}_3 \Rightarrow \\ \dot{\theta}_4 \bar{u}_1 + \dot{\theta}_5 \bar{u}_2 + \dot{\theta}_6 (\bar{u}_1 c \theta_5 - \bar{u}_3 s \theta_5) &= \bar{w}^* - \dot{\theta}_1 (\bar{u}_3 c \theta_4 + \bar{u}_2 s \theta_4) \Rightarrow \\ \bar{u}_1 (\dot{\theta}_4 + \dot{\theta}_6 c \theta_5) + \bar{u}_2 \dot{\theta}_5 - \bar{u}_3 \dot{\theta}_6 s \theta_5 &= \bar{w}^* - \dot{\theta}_1 (\bar{u}_3 c \theta_4 + \bar{u}_2 s \theta_4) \end{aligned} \quad (4.2.43)$$

Yukarıdaki denklemlerde şu tanım kullanılmıştır.

$$\bar{w}^* = e^{-\tilde{u}_1 \theta_4} e^{-\tilde{u}_3 \theta_1} \bar{w} \quad (4.2.44)$$

Burada tanımlanan  $\bar{w}^*$  dikeysıra matrisi, aslında,  $\vec{w}$  vektörünün  $L_4$  uzvuna bağlı olan  $\mathcal{F}_4$  eksen takımındaki matris gösterimidir. Yani,  $\bar{w} = \bar{w}^{(0)}$  iken  $\bar{w}^* = \bar{w}^{(4)}$  olmaktadır.

(4.2.43) denkleminde aşağıdaki skalar denklemler elde edilir.

$$\dot{\theta}_4 + \dot{\theta}_6 c \theta_5 = \omega_1^* \quad (4.2.45)$$

$$\dot{\theta}_5 = \omega_2^* - \dot{\theta}_1 s \theta_4 \quad (4.2.46)$$

$$\dot{\theta}_6 s \theta_5 = \dot{\theta}_1 c \theta_4 - \omega_3^* \quad (4.2.47)$$

Eğer  $s \theta_4 \neq 0$  ve  $s \theta_5 \neq 0$  ise, yukarıdaki denklemlerden şu çözümler elde edilir.

$$\dot{s}_3 = w_1 c \theta_1 + w_2 s \theta_1 - (b_3 - d_5 c \theta_4) \dot{\theta}_1 \quad (4.2.48)$$

$$\dot{\theta}_4 = (w_2 c \theta_1 - w_1 s \theta_1 - s_3 \dot{\theta}_1) / (d_5 s \theta_4) \quad (4.2.49)$$

$$\dot{s}_2 = w_3 + d_5 \dot{\theta}_4 c \theta_4 = w_3 + (w_2 c \theta_1 - w_1 s \theta_1 - s_3 \dot{\theta}_1) (c \theta_4 / s \theta_4) \quad (4.2.50)$$

$$\dot{\theta}_5 = \omega_2^* - \dot{\theta}_1 s \theta_4 \quad (4.2.51)$$

$$\dot{\theta}_6 = (\dot{\theta}_1 c \theta_4 - \omega_3^*) / s \theta_5 \quad (4.2.52)$$

$$\dot{\theta}_4 = \omega_1^* - \dot{\theta}_6 c \theta_5 = \omega_1^* + (\omega_3^* - \dot{\theta}_1 c \theta_4) (c \theta_5 / s \theta_5) \quad (4.2.53)$$

Görüldüğü gibi,  $\dot{\theta}_4$  e. d. türevi, (4.2.49) ve (4.2.53) denklemleriyle iki kez elde edilmiştir. Doğal olarak bu iki çözüm aynı değeri vermelidir. Yani, aşağıdaki "tutarlılık koşulu" sağlanmalıdır.

$$(w_2 c \theta_1 - w_1 s \theta_1 - s_3 \dot{\theta}_1) / (d_5 s \theta_4) = \omega_1^* + (\omega_3^* - \dot{\theta}_1 c \theta_4) (c \theta_5 / s \theta_5) \quad (4.2.54)$$

(4.2.54) denklemi şu şekilde düzenlenebilir.

$$\begin{aligned} (s_3 s \theta_5 - d_5 s \theta_4 c \theta_4 c \theta_5) \dot{\theta}_1 \\ = (w_2 c \theta_1 - w_1 s \theta_1) s \theta_5 - d_5 (\omega_1^* s \theta_5 + \omega_3^* c \theta_5) s \theta_4 \end{aligned} \quad (4.2.55)$$

Eğer  $(s_3 s \theta_5 - d_5 s \theta_4 c \theta_4 c \theta_5) \neq 0$  ise,  $\dot{\theta}_1$  e. d. türevi, (4.2.55) denkleminde şöyle belirlenir.

$$\dot{\theta}_1 = \frac{(w_2 c \theta_1 - w_1 s \theta_1) s \theta_5 - d_5 (\omega_1^* s \theta_5 + \omega_3^* c \theta_5) s \theta_4}{s_3 s \theta_5 - d_5 s \theta_4 c \theta_4 c \theta_5} \quad (4.2.56)$$

$\dot{\theta}_1$  belirlendikten sonra, (4.2.48-53) denklemlerinden diğer e. d. türevleri de belirlenir.

#### 4.2.7. Devinimsel Tekil Durum Analizi

(4.2.56) denklemiyle verilen  $\dot{\theta}_1$  ifadesi, (4.2.49) ve (4.2.52) denklemlerinde yerine konunca, paydalarında bu işlem öncesinde  $s \theta_4$  ve  $s \theta_5$  bulunan  $\dot{\theta}_4$  ve  $\dot{\theta}_6$  ifadeleri, bu işlem sonrasında aşağıdaki ifadelerle belirlenirler.

$$\dot{\theta}_4 = \frac{s_3 (\omega_3^* c \theta_5 + \omega_1^* s \theta_5) - (w_2 c \theta_1 - w_1 s \theta_1) c \theta_4 c \theta_5}{s_3 s \theta_5 - d_5 s \theta_4 c \theta_4 c \theta_5} \quad (4.2.57)$$

$$\dot{\theta}_6 = \frac{(w_2 c \theta_1 - w_1 s \theta_1) c \theta_4 - (s_3 \omega_3^* + d_5 \omega_1^* s \theta_4 c \theta_4)}{s_3 s \theta_5 - d_5 s \theta_4 c \theta_4 c \theta_5} \quad (4.2.58)$$

(4.2.57) ve (4.2.58) denklemleri göstermektedir ki, örnek manipülatöre ait devinimsel tekil durumlar, yalnızca aşağıdaki eşitlik sağlanırsa ortaya çıkmaktadır.

$$s_3 s \theta_5 = d_5 s \theta_4 c \theta_4 c \theta_5 \quad (4.2.59)$$

Başka bir deyişle, (4.2.48)-(4.2.53) denklemleri için öne sürülen  $s \theta_4 \neq 0$  ve  $s \theta_5 \neq 0$  biçimindeki "ara çözüm" koşulları, aslında, süreç sonunda elde edilen "asıl çözüm" için geçerli değildir.

Bir devinimsel tekil konum ortaya çıktığında, yani (4.2.59) denklemi sağlandığı zaman, (4.2.41) denklemi,  $s_3$  eklem değişkeninin aradan yok edilmesiyle şu şekli alır.

$$d_5 (\dot{\theta}_1 c \theta_4 c \theta_5 + \dot{\theta}_4 s \theta_5) s \theta_4 = (w_2 c \theta_1 - w_1 s \theta_1) s \theta_5 \quad (4.2.60)$$

Bu arada, (4.2.45) ve (4.2.47) denklemlerinin arasından  $\dot{\theta}_6$  yok edilirse, aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\dot{\theta}_1 c \theta_4 c \theta_5 + \dot{\theta}_4 s \theta_5 = \omega_3^* c \theta_5 + \omega_1^* s \theta_5 \quad (4.2.61)$$

(4.2.61) denklemi, taraf tarafa  $d_5 s \theta_4$  ile çarpılarak şöyle de yazılabilir.

$$d_5 (\dot{\theta}_1 c \theta_4 c \theta_5 + \dot{\theta}_4 s \theta_5) s \theta_4 = d_5 (\omega_3^* c \theta_5 + \omega_1^* s \theta_5) s \theta_4 \quad (4.2.62)$$

Yukarıdaki denklemlerden, devinimsel tekil durum hakkında aşağıdaki sonuçlar çıkar.

(i) İşlem uzayı kısıtlaması:

(4.2.60) ve (4.2.62) denklemlerine göre,

$$(w_2 c \theta_1 - w_1 s \theta_1) s \theta_5 = d_5 (\omega_3^* c \theta_5 + \omega_1^* s \theta_5) s \theta_4 \quad (4.2.63)$$

İşlem uzayı kısıtlaması nedeniyle,  $\vec{w}$  ve  $\vec{\omega}$  vektörlerinin bileşenleri arasında (4.2.63) denklemiyle ifade edilen ilişki bulunmalıdır. Eğer manipülatörün söz konusu tekil durumdan geçmesi gerekiyorsa, hareket planlaması, bu ilişkiyi hesaba katarak yapılmalıdır.



(ii) Eklem uzayı artıksıllığı:

(4.2.61) denklemine göre,

$$\dot{\theta}_1 c\theta_4 c\theta_5 + \dot{\theta}_4 s\theta_5 = \omega_3^* c\theta_5 + \omega_1^* s\theta_5 \quad (4.2.64)$$

Eklem uzayı artıksıllığı ise,  $\dot{\theta}_1$  ile  $\dot{\theta}_4$  arasında bir belirsizlik oluşturmaktadır. Şöyle ki, söz konusu tekil durumda, (4.2.64) denklemini sağlamak koşuluyla,  $\dot{\theta}_1$  ve  $\dot{\theta}_4$  keyfi değerler alabilirler. Eğer  $c\theta_4 \neq 0$  ise, bu belirsizlik aşağıdaki seçimle giderilebilir.

$$\dot{\theta}_1 = \omega_3^*/c\theta_4, \quad \dot{\theta}_4 = \omega_1^* \quad (4.2.65)$$

## BÖLÜM 5

### EKSİKSİL SERİ MANİPÜLATÖRLERİN KONUM VE HIZ ANALİZİ

#### 5.1. Eksiksilliğin Tanımı

Ekleme uzayı  $m$  boyutlu olan bir seri manipülatör, boyutu  $n > m$  olan bir işlem uzayına göre eksiksildir. Böyle bir manipülatör, ancak işlem uzayının  $m$  boyutlu bir altuzayında çalışabilir. Eksiksil bir manipülatörün çalışacağı altuzay ise, yapması istenen işe göre belirlenir.

Örneğin, eklem uzayı 5 boyutlu olan bir manipülatör, 6 boyutlu bir işlem uzayına göre eksiksildir. Dolayısıyla, ancak, 6 boyutlu işlem uzayının 5 boyutlu bir altuzayında çalışabilir. Yapılması planlanan işe göre, 5 boyutlu altuzay, genellikle, ya "serbest yöneltme - kısıtlı konumlama" ya da "serbest konumlama - kısıtlı yöneltme" biçiminde belirlenir.

Serbest yöneltme - kısıtlı konumlama seçeneğinde, işlem aygıtının yönelimini temsil eden üç Euler açısı  $(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$  tümüyle isteğe göre belirtilir. Buna karşılık, uç noktasının ( $P$  noktasının) belli bir yüzey üzerinde kalmasıyla yetinilir. Bu yüzey,  $f_1(p_1, p_2, p_3) = 0$  gibi bir eşitlikle ifade edilebilir.

Serbest konumlama - kısıtlı yöneltme seçeneğinde, uç noktasının ( $P$  noktasının) koordinatları  $(p_1, p_2, p_3)$  tümüyle isteğe göre belirtilir. Buna karşılık, işlem aygıtının yönelimini temsil eden üç Euler açısının  $f_2(\phi_1, \phi_2, \phi_3) = 0$  gibi bir eşitlikle kısıtlanmış olması kabul edilir.

#### 5.2. Örnek Eksiksil Manipülatör ve İleri Kinematik Eşitlikleri

Burada, örnek olarak, Bölüm 3'teki örnek manipülatörün eksiksilleştirilmiş biçimi kullanılacaktır. Şekil 5.1'de gösterilen bu manipülatör, Bölüm 3'teki manipülatörün dördüncü eklemi,  $\theta_4 = 0$  olacak biçimde iptal edilerek oluşturulmuştur. Bu iptal işlemiyle uyumlu olarak önceki manipülatörün  $\theta_5$  ve  $\theta_6$  açıları, şimdiki manipülatörün  $\theta_4$  ve  $\theta_5$  açılarına dönüşmüştür.

Yukarıdaki açıklamalara göre, örnek eksiksil manipülatöre ait ileri kinematik eşitlikleri, Bölüm 3'teki benzer eşitlikliklerin uyarlanmasıyla şöyle yazılabilir.

$$\hat{C} = e^{\tilde{u}_3\theta_1} e^{\tilde{u}_2\theta_4} e^{\tilde{u}_1\theta_5} e^{\tilde{u}_2\pi/2} \quad (5.2.1)$$

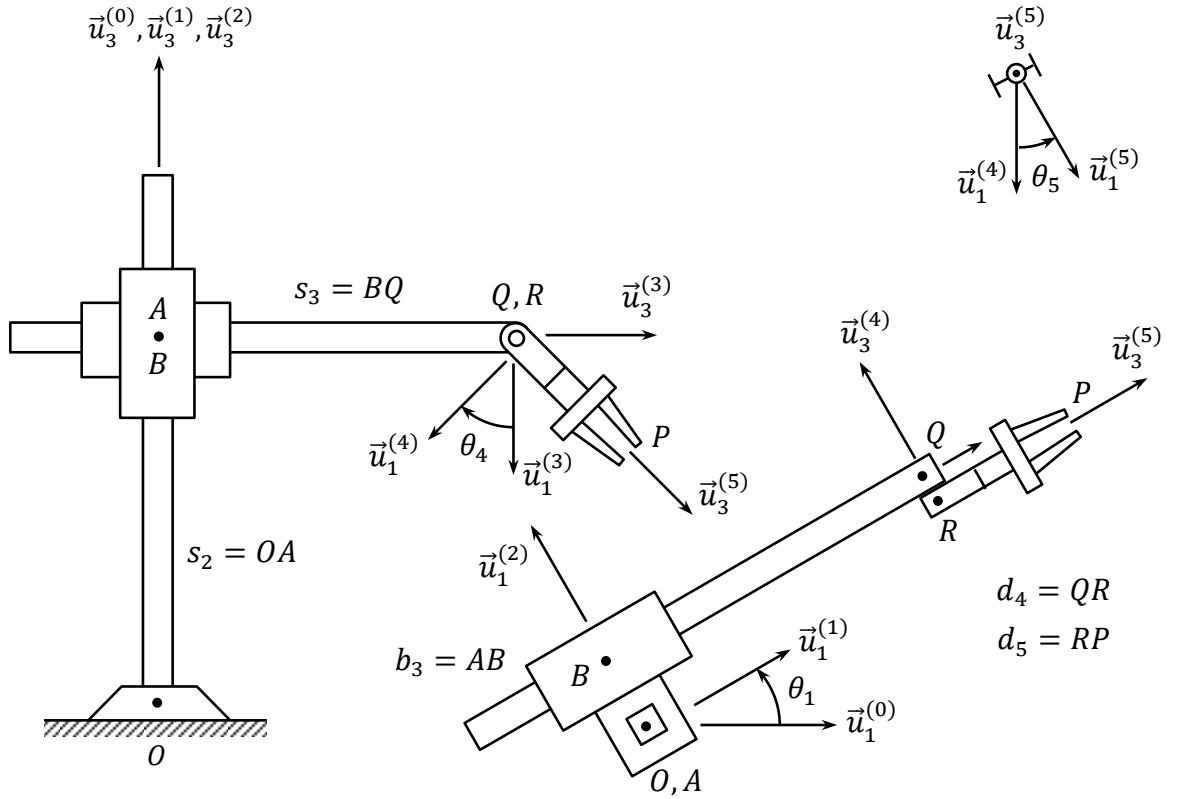
$$\bar{r} = e^{\tilde{u}_3\theta_1} [\bar{u}_1 s_3 + \bar{u}_2 c_3 + \bar{u}_3 s_2] \quad (5.2.2)$$

$$\bar{p} = \bar{r} + d_5 e^{\tilde{u}_3\theta_1} e^{\tilde{u}_2\theta_4} \bar{u}_1 \Rightarrow$$

$$\bar{p} = e^{\tilde{u}_3\theta_1} [\bar{u}_1 (s_3 + d_5 c\theta_4) + \bar{u}_2 c_3 + \bar{u}_3 (s_2 - d_5 s\theta_4)] \quad (5.2.3)$$

Yukarıdaki eşitliklerde yer alan  $c_3$  parametresi şöyle tanımlanmıştır.

$$c_3 = b_3 - d_4 \quad (5.2.4)$$

Şekil 5.1. Eklem Düzeni  $RP^2R^2$  Olan Eksiksiz Bir Seri Manipülör

### 5.3. Eklem Değişkenlerini Belirlemek İçin Ters Kinematik Çözüm

Bu kısımda, Şekil 5.1'de görülen eksiksiz manipülör için ters kinematik çözümün elde edilmesi, Kısım 5.1'de sözü edilen iki seçeneğe göre gösterilecektir.

#### 5.3.1. Serbest Yönelme - Kısıtlı Konumlama Seçeneğine Göre Ters Kinematik Çözüm

Bu seçenekte, işlem aygıtının istenen yönelimi, seçilecek uygun bir  $i-j-k$  sıralamasına göre, üç Euler açısıyla tam olarak şöyle belirtilir.

$$\hat{C} = e^{\tilde{u}_i \phi_1} e^{\tilde{u}_j \phi_2} e^{\tilde{u}_k \phi_3} \quad (5.3.1)$$

Buradaki en uygun  $i-j-k$  sıralaması, (5.2.1) denklemi göz önüne alınarak seçilebilir. Bu seçimi yapabilmek için (5.2.1) denklemi, Bölüm 1'de verilen dönme matrislerine ait "kaydırma formülü" kullanılarak aşağıda gösterilen biçimde dönüştürülebilir.

$$\begin{aligned} \hat{C} &= e^{\tilde{u}_3 \theta_1} e^{\tilde{u}_2 \theta_4} e^{\tilde{u}_1 \theta_5} e^{\tilde{u}_2 \pi/2} \Rightarrow \hat{C} = e^{\tilde{u}_3 \theta_1} e^{\tilde{u}_2 \theta_4} e^{\tilde{u}_2 \pi/2} e^{\tilde{u}_3 \theta_5} \Rightarrow \\ \hat{C} &= e^{\tilde{u}_3 \theta_1} e^{\tilde{u}_2 (\theta_4 + \pi/2)} e^{\tilde{u}_3 \theta_5} \end{aligned} \quad (5.3.2)$$

Aşık olarak görüldüğü gibi, (5.3.2) denklemi ile uyumlu olacak en uygun sıralama 3-2-3 sıralamasıdır. Bu sıralama kullanınca, (5.3.1) denklemi şu şekli alır.

$$\hat{C} = e^{\tilde{u}_3\phi_1} e^{\tilde{u}_2\phi_2} e^{\tilde{u}_3\phi_3} \quad (5.3.3)$$

Yukarıdaki en uygun sıralama sayesinde, döner eklem değişkenleri, (5.3.2) ve (5.3.3) denklemlerinin karşılaştırılmasıyla hiç bir ek işlem yapmadan doğrudan doğruya, belirtilmiş olan Euler açıları cinsinden aşağıdaki gibi belirlenirler.

$$\hat{C} = e^{\tilde{u}_3\theta_1} e^{\tilde{u}_2(\theta_4+\pi/2)} e^{\tilde{u}_3\theta_5} = e^{\tilde{u}_3\phi_1} e^{\tilde{u}_2\phi_2} e^{\tilde{u}_3\phi_3} \Rightarrow$$

$$\theta_1 = \phi_1 \quad (5.3.4)$$

$$\theta_4 = \phi_2 - \pi/2 \quad (5.3.5)$$

$$\theta_5 = \phi_3 \quad (5.3.6)$$

Geriye kalan iki kayar eklem değişkeni ( $s_2$  ve  $s_3$ ) ise, (5.2.3) denkleminin aşağıdaki gibi yazılmış biçimi kullanılarak belirlenebilir.

$$\bar{u}_1(s_3 + d_5c\theta_4) + \bar{u}_2c_3 + \bar{u}_3(s_2 - d_5s\theta_4) = e^{-\tilde{u}_3\theta_1}\bar{p} \quad (5.3.7)$$

(5.3.7) denkleminde aşağıdaki skalar denklemler elde edilir.

$$s_3 + d_5c\theta_4 = \bar{u}_1^t e^{-\tilde{u}_3\theta_1}\bar{p} = p_1c\theta_1 + p_2s\theta_1 \quad (5.3.8)$$

$$c_3 = \bar{u}_2^t e^{-\tilde{u}_3\theta_1}\bar{p} = p_2c\theta_1 - p_1s\theta_1 \quad (5.3.9)$$

$$s_2 - d_5s\theta_4 = \bar{u}_3^t e^{-\tilde{u}_3\theta_1}\bar{p} = p_3 \quad (5.3.10)$$

Dikkat edilirse,  $\theta_1 = \phi_1$  bilindiğine göre, (5.3.9) denkleminde bilinmeyen hiç bir eklem değişkeni bulunmamaktadır. Dolayısıyla, bu denklem, aşağıdaki "kısıtlı konumlama" koşulunu oluşturur.

$$p_2c\phi_1 - p_1s\phi_1 = c_3 \quad (5.3.11)$$

(5.3.11) denkleminde göre,  $p_1$  ve  $p_2$  koordinatlarından yalnızca biri isteğe göre belirtilebilir; diğeri (5.3.11) denkleminde uymak zorundadır. Bu zorunluluk nedeniyle,  $P$  noktası, ancak, (5.3.11) denklemi tarafından temsil edilen düşey düzlem içinde konumlandırılabilir.

$P$  noktasının yukarıdaki kısıtlamaya uyacak biçimde konumlandırılmasından sonra,  $s_2$  ve  $s_3$  değişkenleri, (5.3.10) ve (5.3.8) denklemlerinden aşağıdaki gibi belirlenirler.

$$s_2 = p_3 + d_5s\theta_4 = p_3 + d_5s(\phi_2 - \pi/2) = p_3 - d_5c\phi_2 \quad (5.3.12)$$

$$s_3 = p_1c\theta_1 + p_2s\theta_1 - d_5c\theta_4 = p_1c\phi_1 + p_2s\phi_1 - d_5s\phi_2 \quad (5.3.13)$$

### 5.3.2. Serbest Konumlama - Kısıtlı Yönelme Seçeneğine Göre Ters Kinematik Çözüm

Bu seçenekte, uç noktasının istenen konumu, üç koordinatı ( $p_1, p_2, p_3$ ) verilerek tam olarak belirtilir.

Bunun üzerine, eklem değişkenlerinden  $\theta_1$  açısı, aşağıda tekrar yazılan (5.3.9) denklemi çözülerek belirlenir.

$$p_2c\theta_1 - p_1s\theta_1 = c_3 \quad (5.3.14)$$

(5.3.14) denklemini çözmek üzere, aşağıdaki değişken dönüşümü kullanılabilir.

$$p_1 = \sqrt{p_1^2 + p_2^2} c \psi_1 \quad (5.3.15)$$

$$p_2 = \sqrt{p_1^2 + p_2^2} s \psi_1 \quad (5.3.16)$$

Bu dönüşüm sayesinde, (5.3.14) denklemi şu şekli alır.

$$s(\psi_1 - \theta_1) = y_1 = c_3 / \sqrt{p_1^2 + p_2^2} \quad (5.3.17)$$

(5.3.17) denklemden  $\theta_1$  açısına aşağıda gösterilen biçimde ulaşılır.

$$c(\psi_1 - \theta_1) = x_1 = \sigma_1 \sqrt{p_1^2 + p_2^2} - c_3^2 / \sqrt{p_1^2 + p_2^2} \quad (5.3.18)$$

$$\sigma_1 = \pm 1 \quad (5.3.19)$$

$$\theta_1 = \psi_1 - \text{atan}_2(y_1, x_1) \quad (5.3.20)$$

Şekil 5.1 ile (5.3.15) ve (5.3.16) denklemlerine göre,  $\psi_1 = \text{atan}_2(p_2, p_1)$  açısı,  $\vec{AP}$  ile  $\vec{u}_1^{(0)}$  vektörleri arasındaki açı olmaktadır. Manipülâtörün Şekil 5.1'de gösterilen duruşunda ise,  $\psi_1$  dar açı olduğu için,  $\sigma_1 = +1$  olması gerekir.

$\theta_1$  açısı belirlendikten sonra,  $\hat{C}$  matrisini eklem değişkenleri ve Euler açıları cinsinden veren (5.3.2) ve (5.3.3) denklemleri eşitlenerek aşağıdaki denklem elde edilir.

$$e^{\tilde{u}_3 \theta_1} e^{\tilde{u}_2 (\theta_4 + \pi/2)} e^{\tilde{u}_3 \theta_5} = e^{\tilde{u}_3 \phi_1} e^{\tilde{u}_2 \phi_2} e^{\tilde{u}_3 \phi_3} \quad (5.3.21)$$

(5.3.21) denklemi,  $\theta_1$  açısı bilindiği için, aşağıdaki skalar denklemlere yol açar.

$$\phi_1 = \theta_1 \quad (5.3.22)$$

$$\theta_4 = \phi_2 - \pi/2 \quad (5.3.23)$$

$$\theta_5 = \phi_3 \quad (5.3.24)$$

(5.3.23) ve (5.3.24) denklemlerine göre, Euler açılarından  $\phi_2$  ve  $\phi_3$  isteğe göre belirtilebilir ve belirtilen değerlerine bağlı olarak eklem değişkenlerinden  $\theta_4$  ve  $\theta_5$  açıları belirlenir.

Öte yandan, (5.3.22) denklemine göre,  $\theta_1$  açısı zaten belirlenmiş olduğu için, Euler açılarından  $\phi_1$  isteğe göre belirtilemez;  $\theta_1$  açısına eşit olmak zorundadır. Bu zorunluluk, "kısıtlı yönlendirme" koşulunu oluşturur.

#### 5.4. Örnek Eksiksil Manipülâtör İçin Hız İlişkileri

Örnek eksiksil manipülâtörün işlem aygıtının açısâl hızını ve uç noktasının hızını e. d. türevleri cinsinden veren ileri kinematik eşitlikleri, (5.2.21) ve (5.2.23) denklemlerinin türevleri alınıp gerekli sadeleştirmeler yapılarak aşağıda görülen biçimde elde edilebilirler.

$$\bar{w} = \dot{\theta}_1 \bar{u}_3 + \dot{\theta}_4 e^{\bar{u}_3 \theta_1} \bar{u}_2 + \dot{\theta}_5 e^{\bar{u}_3 \theta_1} e^{\bar{u}_2 \theta_4} \bar{u}_1 \quad (5.4.1)$$

$$\begin{aligned} \bar{v} = e^{\bar{u}_3 \theta_1} [\bar{u}_1 (\dot{s}_3 - d_5 \dot{\theta}_4 s \theta_4 - c_3 \dot{\theta}_1) \\ + \bar{u}_2 (s_3 + d_5 c \theta_4) \dot{\theta}_1 + \bar{u}_3 (\dot{s}_2 - d_5 \dot{\theta}_4 c \theta_4)] \end{aligned} \quad (5.4.2)$$

#### 5.5. Eklem Değişkeni Türevlerini Belirlemek İçin Ters Kinematik Çözüm

Bu kısımda, e. d. türevleri için ters kinematik çözümün analitik olarak elde edilişi, Kısım 5.1'de sözü edilen benzer iki seçeneğe göre gösterilecektir.

##### 5.5.1. Serbest Açısâl Hız - Kısıtlı Uç Noktası Hızı Seçeneğine Göre Ters Kinematik Çözüm

Bu seçenekte, işlem aygıtının istenen hızı, 3-2-3 sıralamalı Euler açıları ve türevleri verilerek belirtilir. Bunun üzerine, döner eklem değişkeni türevleri, (5.3.4)-(5.3.6) denklemlerinin türevleri alınarak hiç bir ek işlem yapmadan doğrudan doğruya aşağıdaki gibi belirlenirler.

$$\dot{\theta}_1 = \dot{\phi}_1 \quad (5.5.1)$$

$$\dot{\theta}_4 = \dot{\phi}_2 \quad (5.5.2)$$

$$\dot{\theta}_5 = \dot{\phi}_3 \quad (5.5.3)$$

Geriye kalan iki kayar eklem değişkeni türevleri ( $\dot{s}_2$  ve  $\dot{s}_3$ ) ise, (5.3.12) ve (5.3.13) denklemlerinin türevleri alınarak şöyle belirlenirler.

$$\dot{s}_2 = v_3 + d_5 \dot{\phi}_2 s \phi_2 \quad (5.5.4)$$

$$\dot{s}_3 = v_1 c \phi_1 + v_2 s \phi_1 + (p_2 c \phi_1 - p_1 s \phi_1) \dot{\phi}_1 - d_5 \dot{\phi}_2 c \phi_2 \quad (5.5.5)$$

Bu arada, (5.3.11) denkleminin türevi, uç noktası için aşağıdaki hız kısıtlamasına yol açar.

$$v_2 c \phi_1 - v_1 s \phi_1 = (p_2 s \phi_1 + p_1 c \phi_1) \dot{\phi}_1 \quad (5.5.6)$$

(5.5.6) denklemine göre,  $v_1$  ve  $v_2$  hız bileşenlerinden yalnızca biri isteğe göre belirtilebilir; diğeri (5.5.6) denklemine uymak zorundadır.

##### 5.5.2. Serbest Uç Noktası Hızı - Kısıtlı Açısâl Hız Seçeneğine Göre Ters Kinematik Çözüm

Bu seçenekte, uç noktasının istenen hızı, üç bileşeni ( $v_1, v_2, v_3$ ) verilerek tam olarak belirtilir.

Bunun üzerine,  $\dot{\theta}_1$  e. d. türevi, (5.3.9) denkleminin türevi alınarak şöyle belirlenir.

$$\dot{\theta}_1 = (v_2 c \theta_1 - v_1 s \theta_1) / (p_2 s \theta_1 + p_1 c \theta_1) \quad (5.5.7)$$

Tabii, (5.5.7) denklemi,  $(p_2 s \theta_1 + p_1 c \theta_1) \neq 0$  ise geçerlidir.

$\dot{\theta}_1$  belirlendikten sonra, (5.5.1)-(5.5.3) denklemleri şöyle yazılabilir.

$$\dot{\theta}_4 = \dot{\phi}_2 \quad (5.5.8)$$

$$\dot{\theta}_5 = \dot{\phi}_3 \quad (5.5.9)$$

$$\dot{\phi}_1 = \dot{\theta}_1 \quad (5.5.10)$$

(5.5.8) ve (5.5.9) denklemlerine göre, Euler açısı türevlerinden  $\dot{\phi}_2$  ve  $\dot{\phi}_3$  isteğe göre belirtilebilir ve belirtilen değerlerine bağlı olarak  $\dot{\theta}_4$  ve  $\dot{\theta}_5$  e. d. türevleri belirlenir.

Öte yandan, (5.5.10) denkleminde göre,  $\dot{\theta}_1$  zaten belirlenmiş olduğu için,  $\dot{\phi}_1$  isteğe göre belirtilemez;  $\dot{\theta}_1$  e. d. türevine eşit olmak zorundadır. Bu zorunluluk, "kısıtlı açısal hız" koşulunu oluşturur.

## 5.6. Genel Bir Eksik Manipülörün Jacobi Matrisi Aracılığıyla Ters Hız Çözümü

Bölüm 4'te de görüldüğü gibi, genel bir uzaysal manipülör için hız denklemi, derleşik olarak şöyle yazılabilir.

$$\hat{J}_P \dot{\bar{q}} = \bar{\eta}_P \quad (5.6.1)$$

Bölüm 4'te, (4.2.11) denklemi bilek noktası için yazılmıştı. Buradaki (5.6.1) denklemi ise, uç noktası için yazılmıştır. (5.6.1) denkleminde, aşağıdaki tanımlar kullanılmıştır.

a) Eklem değişkenleri dikeysıra matrisi:

$$\bar{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_m \end{bmatrix} \quad (5.6.2)$$

b) Manipülörün uç noktasına ilişkin "birleşik hız" dikeysıra matrisi:

$$\bar{\eta}_P = \begin{bmatrix} \bar{v} \\ \bar{\omega} \end{bmatrix} \quad (5.6.3)$$

c) Manipülörün uç noktasına ilişkin Jacobi matrisi:

$$\hat{J}_P = \begin{bmatrix} \bar{V}_1 & \bar{V}_2 & \cdots & \bar{V}_m \\ \bar{\Omega}_1 & \bar{\Omega}_2 & \cdots & \bar{\Omega}_m \end{bmatrix} \quad (5.6.4)$$

d) Manipülörün uç noktasına ilişkin "hız etki katsayısı":

$$\bar{V}_k = \partial \bar{v} / \partial \dot{q}_k = \partial \bar{p} / \partial q_k ; k = 1, 2, \dots, m \quad (5.6.5)$$

e) Manipülörün son uzvuna (işlem aygıtına) ilişkin "açısal hız etki katsayısı":

$$\bar{\Omega}_k = \partial \bar{\omega} / \partial \dot{q}_k ; k = 1, 2, \dots, m \quad (5.6.6)$$

Manipülâtör eksiksil ( $m < n = 6$ ) olduğu için (5.6.1) denklemi, aşağıda gösterilen biçimde ayrıştırılabilir.

$$\hat{J}_{Pb}\dot{\bar{q}} = \bar{\eta}_{Pb} \quad (5.6.7)$$

$$\hat{J}_{Ps}\dot{\bar{q}} = \bar{\eta}_{Ps} \quad (5.6.8)$$

Yukarıdaki denklemlerde,  $\bar{\eta}_{Pb}$  ve  $\bar{\eta}_{Ps}$ ,  $m$  ve  $r = n - m$  boyutlu ayrışkaldır. Bunlardan  $\bar{\eta}_{Pb}$  ters hız çözümü için isteğe göre belirtilen ayrışkaldır;  $\bar{\eta}_{Ps}$  ise, çözüm sonucunda ortaya çıkacak olan kısıtlamaya uyması gereken ayrışkaldır.

Eğer  $m \times m$  boyutlu  $\hat{J}_{Pb}$  matrisi tekil değilse, belirtilmiş olan  $\bar{\eta}_{Pb}$  ayrışkasına bağlı olarak  $\dot{\bar{q}}$  ve  $\bar{\eta}_{Ps}$  için aşağıdaki çözümler elde edilir.

$$\dot{\bar{q}} = \hat{J}_{Pb}^{-1}\bar{\eta}_{Pb} \quad (5.6.9)$$

$$\bar{\eta}_{Ps} = \hat{J}_{Ps}\hat{J}_{Pb}^{-1}\bar{\eta}_{Pb} \quad (5.6.10)$$

Eğer  $\hat{J}_{Pb}$  matrisi tekilse, Kısım 4.2.5'tekine benzer bir tekil durum analizi yapılabilir.



## BÖLÜM 6

### ARTIKSIL SERİ MANİPÜLATÖRLERİN KONUM VE HIZ ANALİZİ

#### 6.1. Artıksılığın Tanımı ve Artıksılığı Giderme Yöntemleri

Ekleme uzayı  $m$  boyutlu olan bir seri manipülatör, boyutu  $n < m$  olan bir işlem uzayına göre artıksıldır. Böyle bir manipülatörün kullanımında,  $r = m - n$  dereceli bir artıksılık belirsizliği ortaya çıkar. Bu belirsizlik aşağıdaki üç yoldan biriyle giderilebilir.

(i) Ekleme değişkenlerinden  $r$  adedi, isteğe göre keyfi olarak seçilebilir. Örneğin, sabit değerlerde kalmaları istenebilir.

(ii) İşlem aygıtının yapması istenen harekete ek olarak manipülatörün diğer uzuvları için de  $r$  adet hareket isteği ya da kısıtlaması getirilebilir. Örneğin, bazı uzuvların hareket süresince hep düşey kalması istenebilir.

(iii) Ekleme değişkenleri isteğe göre belirtilen bir eniyileştirme ölçütüne göre belirlenebilir. Örneğin, manipülatörün en küçük kinetik enerjiyle çalışması istenebilir.

Özel bir örnek vermek gerekirse, ekleme uzayı 5 boyutlu olan bir manipülatör, 3 boyutlu bir işlem uzayına göre artıksıldır. İşlem uzayının 3 boyutlu olduğu iki tipik işlem türü olarak şunlar gösterilebilir.

(i) Noktasal konumlama işlemleri: Böyle bir işlemde, yalnızca, uç noktasının hareketi isteğe göre belirtilir; işlem aygıtının yönelimi tümüyle serbest bırakılır.

(ii) Yalnızca küresel cisimlere uygulanan yer değiştirme işlemleri: Böyle bir işlemde de, cisim küresel olduğu için, işlem aygıtının yönelimi serbest bırakılır; yalnızca küresel cismin merkezinin hareketi isteğe göre belirtilir.

#### 6.2. Genel Bir Artıksıl Manipülatörün Jacobi Matrisi Aracılığıyla Ters Hız Çözümü

Bölüm 5'te de olduğu gibi, genel bir uzaysal manipülatör için hız denklemi, derleşik olarak şöyle yazılabilir.

$$\hat{J}_P \dot{\bar{q}} = \bar{\eta}_P \quad (6.2.1)$$

(6.2.1) denkleminde, aşağıdaki tanımlar kullanılmıştır.

a) Ekleme değişkenleri dikeysıra matrisi:

$$\bar{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_m \end{bmatrix} \quad (6.2.2)$$

b) Manipülâtörün uç noktasına ilişkin "birleşik hız" dikeysıra matrisi:

$$\bar{\eta}_P = \begin{bmatrix} \bar{v} \\ \bar{\omega} \end{bmatrix} \quad (6.2.3)$$

c) Manipülâtörün uç noktasına ilişkin Jacobi matrisi:

$$\hat{J}_P = \begin{bmatrix} \bar{V}_1 & \bar{V}_2 & \cdots & \bar{V}_m \\ \bar{\Omega}_1 & \bar{\Omega}_2 & \cdots & \bar{\Omega}_m \end{bmatrix} \quad (6.2.4)$$

d) Manipülâtörün uç noktasına ilişkin "hız etki katsayısı":

$$\bar{V}_k = \partial \bar{v} / \partial \dot{q}_k = \partial \bar{p} / \partial q_k ; k = 1, 2, \dots, m \quad (6.2.5)$$

e) Manipülâtörün son uzvuna (işlem aygıtına) ilişkin "açısal hız etki katsayısı":

$$\bar{\Omega}_k = \partial \bar{\omega} / \partial \dot{q}_k ; k = 1, 2, \dots, m \quad (6.2.6)$$

### 6.2.1. Keyfi Seçim Yoluyla Ters Hız Çözümü

Manipülâtör artıksıl ( $m > n = 6$ ) olduğu için (6.2.1) denklemi, aşağıda gösterilen biçimde ayrıştırılabilir.

$$\hat{J}_{Pb} \dot{q}_b + \hat{J}_{Ps} \dot{q}_s = \bar{\eta}_P \quad (6.2.7)$$

Yukarıdaki denklemlerde,  $\dot{q}_b$  ve  $\dot{q}_s$ ,  $m$  ve  $r = m - n$  boyutlu ayrışkalardır. Bunlardan  $\dot{q}_b$  ters hız çözümü ile belirlenecek olan ayrışka,  $\dot{q}_s$  ise artıksılık nedeniyle serbest kalan ayrışkadır.

Eğer  $m \times m$  boyutlu  $\hat{J}_{Pb}$  matrisi tekil değilse, belirtilen  $\bar{\eta}_P$  ile keyfi olarak seçilen  $\dot{q}_s$  ayrışkasına (örneğin  $\dot{q}_s = \bar{0}$  seçimine) bağlı olarak  $\dot{q}_b$  ayrışkası şöyle elde edilir.

$$\dot{q}_b = \hat{J}_{Pb}^{-1} (\bar{\eta}_P - \hat{J}_{Ps} \dot{q}_s) \quad (6.2.8)$$

### 6.2.2. Ek İş Belirtme ya da Ek Kısıtlama Koyma Yoluyla Ters Hız Çözümü

(6.2.7) denklemini çözenin bir diğer yolu da "ek iş" belirtmek ya da eklem değişkenleri üzerine "ek kısıtlama" koymaktır. Ek iş ya da ek kısıtlama,  $r$  adet skalar denklemden oluşan şöyle bir matris denklemiyle ifade edilebilir.

$$\hat{K}_{Pb} \dot{q}_b + \hat{K}_{Ps} \dot{q}_s = \bar{\mu}_P \quad (6.2.9)$$

(6.2.7) ve (6.2.9) denklemleri birlikte şöyle yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} \hat{J}_{Pb} & \hat{J}_{Ps} \\ \hat{K}_{Pb} & \hat{K}_{Ps} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_b \\ \dot{q}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\eta}_P \\ \bar{\mu}_P \end{bmatrix} \quad (6.2.10)$$

Eğer katsayı matrisi tekil değilse, (6.2.10) denklemi, hem  $\dot{q}_b$  hem de  $\dot{q}_s$  için aşağıdaki çözümü verir.

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_b \\ \dot{q}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{J}_{Pb} & \hat{J}_{Ps} \\ \hat{K}_{Pb} & \hat{K}_{Ps} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{\eta}_P \\ \bar{\mu}_P \end{bmatrix} \quad (6.2.11)$$

### 6.2.3. Eniyileştirme Yoluyla Ters Hız Çözümü

Bu amaçla en çok kullanılan eniyileştirme ölçütü, "en küçük e. d. türevleri" ölçütüdür. Böylece, işlem aygıtının istenen hareketi, en küçük eklem hareketleriyle gerçekleştirilmiş olur. Bu ölçüt, genel olarak, aşağıdaki gibi bir karesel işlev biçiminde ifade edilir.

$$U = U(\dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^t \widehat{W} \dot{q} \quad (6.2.12)$$

(6.2.12) denklemindeki  $\widehat{W}$ , isteğe göre seçilen simetrik ve tekil olmayan (pozitif belirli) bir matristir. Bu denkleme göre tanımlanan  $U$  işlevini en küçük yapacak olan  $\dot{q}$  dikeysıra matrisi üzerindeki kısıtlama ise, (6.2.1) denklemdir.

Eniyileştirme işlemi için (6.2.12) ve (6.2.1) denklemleri, Lagrange çarpanları dikeysıra matrisi ( $\bar{\lambda}$ ) kullanılarak şöyle bileştirilebilirler.

$$U' = \frac{1}{2} \dot{q}^t \widehat{W} \dot{q} + \bar{\lambda}^t (\bar{\eta}_p - \hat{J}_p \dot{q}) \quad (6.2.13)$$

Eniyileştirme için aşağıdaki denklem sağlanmalıdır.

$$\partial U' / \partial \dot{q} = \widehat{W} \dot{q} - \hat{J}_p^t \bar{\lambda} = \bar{0} \quad (6.2.14)$$

(6.2.14) denklemi,  $\dot{q}$  dikeysıra matrisini şöyle verir.

$$\dot{q} = \widehat{W}^{-1} \hat{J}_p^t \bar{\lambda} \quad (6.2.15)$$

(6.2.15) denklemiyle verilen  $\dot{q}$ , (6.2.1) denkleminde yerine konunca, şu denklem elde edilir.

$$(\hat{J}_p \widehat{W}^{-1} \hat{J}_p^t) \bar{\lambda} = \bar{\eta}_p \quad (6.2.16)$$

Eğer  $\det(\hat{J}_p \widehat{W}^{-1} \hat{J}_p^t) \neq 0$  ise, (6.2.16) denkleminde  $\bar{\lambda}$  şöyle bulunur.

$$\bar{\lambda} = (\hat{J}_p \widehat{W}^{-1} \hat{J}_p^t)^{-1} \bar{\eta}_p \quad (6.2.17)$$

Böylece, en iyi  $\dot{q}$  şöyle belirlenmiş olur.

$$\dot{q} = [\widehat{W}^{-1} \hat{J}_p^t (\hat{J}_p \widehat{W}^{-1} \hat{J}_p^t)^{-1}] \bar{\eta}_p = \hat{J}_{pW}^{\#} \bar{\eta}_p \quad (6.2.18)$$

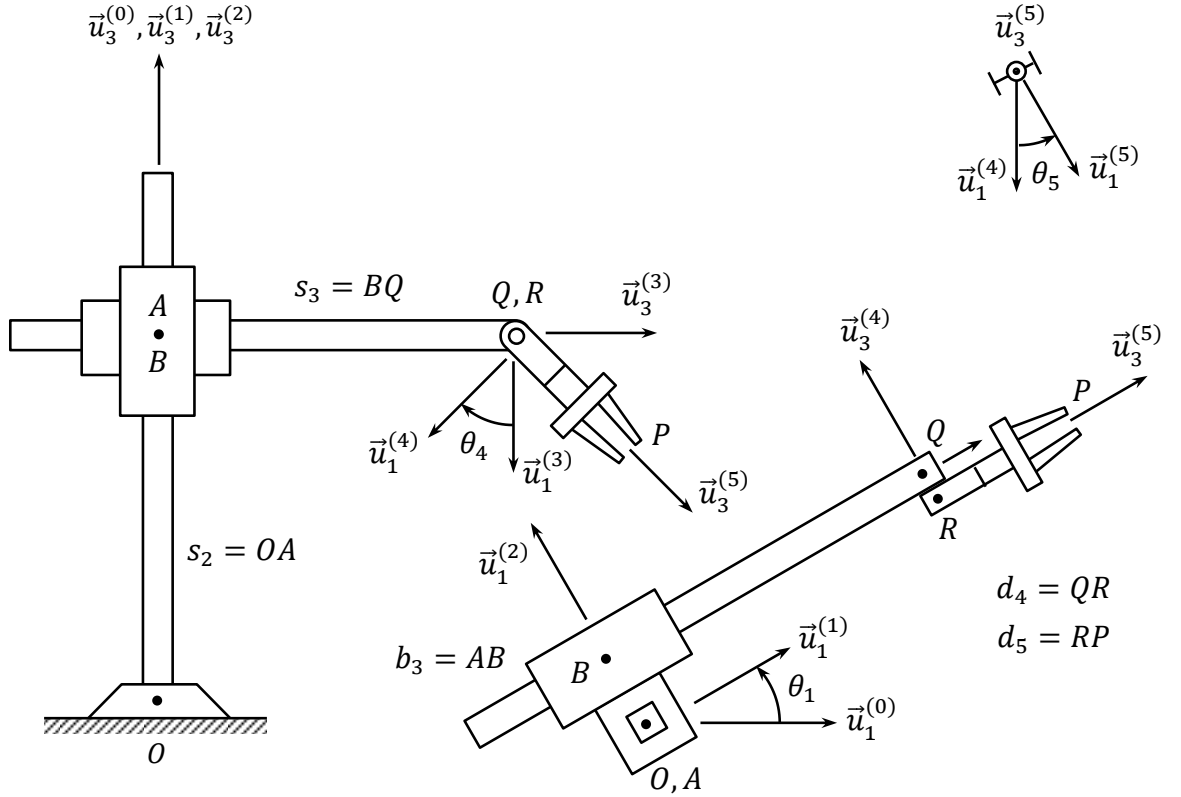
(6.2.18) denklemindeki  $\hat{J}_{pW}^{\#}$  matrisi,  $\hat{J}_p$  matrisinin  $\widehat{W}$  matrisine göre "sahte tersi" olarak tanımlanır.

Görüldüğü gibi, (6.2.18) denklemi, aslında  $\bar{\eta}_p$  zamanın  $\bar{\eta}_p(t)$  biçiminde belirtilmiş bir işlevi olduğu için, aşağıdaki gibi ifade edilebilen bir türevsel denklemdir.

$$\dot{q} = \bar{f}(\bar{q}, t) \quad (6.2.19)$$

Yukarıdaki türevsel denklem, manipülatörün  $\bar{q}_0 = \bar{q}(t_0)$  ile temsil edilen başlangıç durumu kullanılarak tümlelenebilir. Böylece, manipülatörün zaman içinde nasıl hareket ettiğini gösteren  $\bar{q} = \bar{q}(t)$  dikeysıra matrisi bulunmuş olur.

### 6.3. Artıksıl Olarak Kullanılan Beş Serbestlik Dereceli Bir Manipülâtör



Şekil 6.1. Eklem Düzeni  $RP^2R^2$  Olan Beş Serbestlik Dereceli Bir Seri Manipülâtör

Burada, örnek olarak, Bölüm 5'teki beş serbestlik dereceli manipülâtörün artıksıl olarak kullanılışı gösterilecektir. Şekil 6.1'de tekrar gösterilen bu manipülâtör, bu kez yalnızca,  $P$  noktasının istenen biçimde hareket ettirilmesi amacıyla kullanılacaktır. Dolayısıyla, işlem uzayı 3 boyutlu; eklem uzayı ise 5 boyutludur.

#### 6.3.1. İleri Kinematik İlişkiler

Örnek manipülâtör için daha önce Bölüm 5'te yazılmış olan ileri kinematik eşitlikleri, kolaylık amacıyla, konum ve hız düzeylerinde, aşağıda tekrar yazılmıştır.

$$\hat{C} = e^{\tilde{u}_3\theta_1} e^{\tilde{u}_2\theta_4} e^{\tilde{u}_1\theta_5} e^{\tilde{u}_2\pi/2} \quad (6.3.1)$$

$$\bar{p} = e^{\tilde{u}_3\theta_1} [\bar{u}_1(s_3 + d_5c\theta_4) + \bar{u}_2c_3 + \bar{u}_3(s_2 - d_5s\theta_4)] \quad (6.3.2)$$

$$\bar{\omega} = \dot{\theta}_1\bar{u}_3 + \dot{\theta}_4e^{\tilde{u}_3\theta_1}\bar{u}_2 + \dot{\theta}_5e^{\tilde{u}_3\theta_1}e^{\tilde{u}_2\theta_4}\bar{u}_1 \quad (6.3.3)$$

$$\begin{aligned} \bar{v} = e^{\tilde{u}_3\theta_1} [\bar{u}_1(\dot{s}_3 - d_5\dot{\theta}_4s\theta_4 - c_3\dot{\theta}_1) \\ + \bar{u}_2(s_3 + d_5c\theta_4)\dot{\theta}_1 + \bar{u}_3(\dot{s}_2 - d_5\dot{\theta}_4c\theta_4)] \end{aligned} \quad (6.3.4)$$

Yukarıda eşitliklerde yer alan  $c_3$  parametresi şöyle tanımlanmıştır.

$$c_3 = b_3 - d_4 \quad (6.3.5)$$

### 6.3.2. Eklem Değişkeni Türevleri İçin En İyi Ters Kinematik Çözüm

Bu kısımda, işlem aygıtının açısız hareketi serbest bırakılmış fakat uç noktasının üç boyutlu işlem uzayındaki istenen hareketini temsil etmek üzere hızı  $\bar{v} = \bar{v}(t)$  biçiminde belirtilmiştir. Bu durumda ortaya çıkan artıksızlık belirsizliğini gidermek için aşağıdaki işlevin en küçük yapılması istenmektedir.

$$U = \frac{1}{2}(k_1 l_0^2 \dot{\theta}_1^2 + k_2 \dot{s}_2^2 + k_3 \dot{s}_3^2 + k_4 l_0^2 \dot{\theta}_4^2 + k_5 l_0^2 \dot{\theta}_5^2) \quad (6.3.6)$$

(6.3.6) denkleminde  $k_1, \dots, k_5$  birimsiz ağırlık katsayılarıdır;  $l_0$  ise terimlerin aynı birime sahip olmasını sağlayan ve değeri uygunca belirlenmiş olan bir uzunluk parametresidir.

Problemin çözümüne (6.3.4) denklemi aşağıdaki gibi yazılarak başlanabilir.

$$\begin{aligned} \bar{u}_1(\dot{s}_3 - d_5 \dot{\theta}_4 s \theta_4 - c_3 \dot{\theta}_1) + \bar{u}_2(s_3 + d_5 c \theta_4) \dot{\theta}_1 + \bar{u}_3(\dot{s}_2 - d_5 \dot{\theta}_4 c \theta_4) \\ = e^{-\bar{u}_3 \theta_1} \bar{v} \end{aligned} \quad (6.3.7)$$

(6.3.7) denkleminde aşağıdaki üç skalar denklem elde edilebilir.

$$\dot{s}_3 - d_5 \dot{\theta}_4 s \theta_4 - c_3 \dot{\theta}_1 = \bar{u}_1^t e^{-\bar{u}_3 \theta_1} \bar{v} = v_1 c \theta_1 + v_2 s \theta_1 \quad (6.3.8)$$

$$(s_3 + d_5 c \theta_4) \dot{\theta}_1 = \bar{u}_2^t e^{-\bar{u}_3 \theta_1} \bar{v} = v_2 c \theta_1 - v_1 s \theta_1 \quad (6.3.9)$$

$$\dot{s}_2 - d_5 \dot{\theta}_4 c \theta_4 = \bar{u}_3^t e^{-\bar{u}_3 \theta_1} \bar{v} = v_3 \quad (6.3.10)$$

Fiziksel nedenlerle  $s_3 + d_5 c \theta_4 \neq 0$  olduğu için, (6.3.9) denklemi,  $\dot{\theta}_1$  e. d. türevini, tekillik sorunu olmaksızın ve eniyileştirme ölçütünden bağımsız olarak şöyle verir.

$$\dot{\theta}_1 = (v_2 c \theta_1 - v_1 s \theta_1) / (s_3 + d_5 c \theta_4) \quad (6.3.11)$$

(6.3.10) ve (6.3.8) denklemleri ise,  $\dot{s}_2$  ile  $\dot{s}_3$  e. d. türevlerini, yeni belirlenmiş olan  $\dot{\theta}_1$  ile henüz belirlenmemiş olan  $\dot{\theta}_4$  e. d. türevlerine bağlı olarak şöyle verir.

$$\dot{s}_2 = v_3 + d_5 \dot{\theta}_4 c \theta_4 \quad (6.3.12)$$

$$\dot{s}_3 = v_1 c \theta_1 + v_2 s \theta_1 + c_3 \dot{\theta}_1 + d_5 \dot{\theta}_4 s \theta_4 \Rightarrow$$

$$\dot{s}_3 = v_{123} + d_5 \dot{\theta}_4 s \theta_4 \quad (6.3.13)$$

(6.3.13) denkleminde şu tanım kullanılmıştır.

$$v_{123} = v_1 c \theta_1 + v_2 s \theta_1 + c_3 \dot{\theta}_1 \quad (6.3.14)$$

(6.3.11) - (6.3.13) denklemlerinin varlığında, (6.3.6) denklemindeki  $U$  işlevini en küçük yapmak için kullanılacak bağımsız e. d. türevleri olarak yalnızca  $\dot{\theta}_5$  ile  $\dot{\theta}_4$  kalmaktadır.

Problemin böylesine basitleşmesi üzerine, Lagrange çarpanları kullanmaya gerek kalmadan,  $U$  işlevinin en küçük yapılması, aşağıdaki denklemlerin sağlanmasıyla gerçekleşir.

$$\partial U / \partial \dot{\theta}_5 = k_5 l_0^2 \dot{\theta}_5 = 0 \quad (6.3.15)$$

$$\begin{aligned} \partial U / \partial \dot{\theta}_4 &= k_2 \dot{s}_2 (\partial \dot{s}_2 / \partial \dot{\theta}_4) + k_3 \dot{s}_3 (\partial \dot{s}_3 / \partial \dot{\theta}_4) + k_4 l_0^2 \dot{\theta}_4 = 0 \Rightarrow \\ k_2 (v_3 + d_5 \dot{\theta}_4 c \theta_4) (d_5 c \theta_4) + k_3 (v_{123} + d_5 \dot{\theta}_4 s \theta_4) (d_5 s \theta_4) + k_4 l_0^2 \dot{\theta}_4 &= 0 \Rightarrow \\ [k_2 (d_5 c \theta_4)^2 + k_3 (d_5 s \theta_4)^2 + k_4 l_0^2] \dot{\theta}_4 & \\ = -[(k_2 d_5 c \theta_4) v_3 + (k_3 d_5 s \theta_4) v_{123}] & \end{aligned} \quad (6.3.16)$$

(6.3.15) ve (6.3.16) denklemleri, (6.3.6) değerlendirme ölçütüne göre en iyi olan  $\dot{\theta}_5$  ile  $\dot{\theta}_4$  değerlerini aşağıdaki gibi verir.

$$\dot{\theta}_5 = 0 \quad (6.3.17)$$

$$\dot{\theta}_4 = - \frac{(k_2 d_5 c \theta_4) v_3 + (k_3 d_5 s \theta_4) v_{123}}{k_2 (d_5 c \theta_4)^2 + k_3 (d_5 s \theta_4)^2 + k_4 l_0^2} \quad (6.3.18)$$

$\dot{\theta}_4$  için en iyi değer yukardaki gibi belirlendikten sonra, bu değere karşılık gelen  $\dot{s}_2$  ile  $\dot{s}_3$  e. d. türevlerinin değerleri de, (6.3.12) ve (6.3.13) denklemlerinden belirlenir.

### 6.3.3. Eklem Değişkenleri İçin En İyi Ters Kinematik Çözüm

Manipülator yukarıda belirlenen en iyi e. d. türevleri ile hareket ederken duruşunun zamanla nasıl değiştiğini görmek için tümlevlenmesi gereken türevsel denklemler, (6.3.11) ve (6.3.18) denklemleridir. Bu denklemler, aşağıda gösterilen bağlaşık türevsel denklem sistemini oluştururlar.

$$\dot{\theta}_1 = \frac{v_2 c \theta_1 - v_1 s \theta_1}{s_3 + d_5 c \theta_4} \quad (6.3.19)$$

$$\dot{\theta}_4 = - \frac{d_5 [k_2 v_3 c \theta_4 + k_3 (v_1 c \theta_1 + v_2 s \theta_1) s \theta_4] (s_3 + d_5 c \theta_4) + k_3 c_3 d_5 (v_2 c \theta_1 - v_1 s \theta_1) s \theta_4}{[k_2 (d_5 c \theta_4)^2 + k_3 (d_5 s \theta_4)^2 + k_4 l_0^2] (s_3 + d_5 c \theta_4)} \quad (6.3.20)$$

Yukarıdaki türevsel denklem sistemi, doğrusallıktan epeyce uzaktır. Dolayısıyla,  $\theta_1(t)$  ve  $\theta_4(t)$  eklem değişkenleri ancak uygun bir sayısal çözüm yöntemiyle bulunabilirler.

Daha sonra, (6.3.12) ve (6.3.13) denklemlerinin tümlevleri alınarak  $s_2(t)$  ve  $s_3(t)$  eklem değişkenleri de bulunabilir.

(6.3.17) denklemine göre ise,  $\theta_5$  eklem değişkeni, başlangıçtaki değeri neyse, o değerde sabit kalır.

Böylece, eklem değişkenlerinin tümü, zamanın işlevleri olarak bulunmuş olur. Bu aşamadan sonra, eğer istenirse, (6.3.1) ve (6.3.2) denklemleri kullanılarak  $\hat{C}(t)$  ile  $\bar{p}(t)$  matrisleri de bulunabilir.

## BÖLÜM 7

### PARALEL MANİPÜLATÖRLERİN KİNEMATİK ANALİZİ

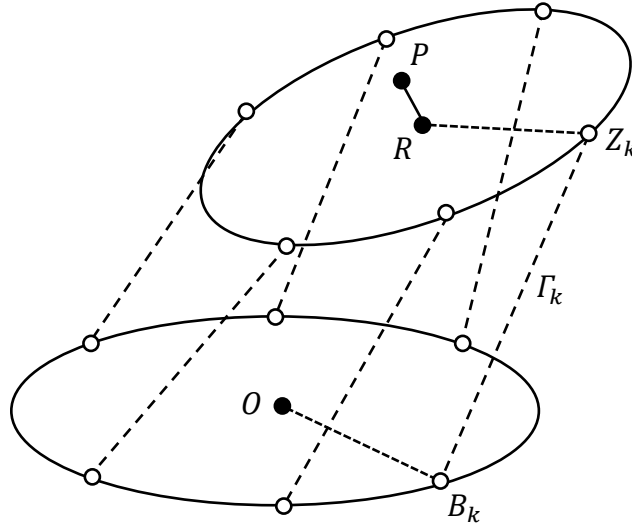
#### 7.1. Paralel Manipülatorlerin Genel Tanımı

Bir paralel manipülatorün işlem aygıtı, manipülatorün zeminine birden fazla kinematik zincirle bağlıdır.

Yukarıdaki tanıma uyan kinematik yapı sayesinde, bir paralel manipülator, aşağı yukarı aynı boyutdaki bir seri manipülatorün sağlayabileceği konumlama hassasiyetini, çok daha büyük yüklenmelere karşı bile sağlayabilir.

Buna karşılık, aynı kinematik yapı nedeniyle, bir paralel manipülatorün işlem aygıtına sağlayabildiği çalışma hacmi, aşağı yukarı aynı boyutdaki bir seri manipülatorünkine göre çok daha küçüktür.

#### 7.2. Paralel Manipülatorlere Ait Kinematik Eşitlikler



Şekil 7.1. Genel Bir İki Platformlu Paralel Manipülator

En genel biçimiyle bir paralel manipülator,  $n_{LB}$  adet iki eklemli ve  $n_{LP}$  adet çok eklemli (ikiden çok eklemi olan) uzuvdan oluşur. Çok eklemli uzuvlar, genellikle, manipülatorün platformlarını oluştururlar. İki eklemli uzuvlar ise, platformlar arasındaki bağlaçları (seri kinematik zincirleri) oluştururlar. Bağlaç uzvu eklemleri olarak, genellikle, döner ve/veya kayar eklemler kullanılır. Bazı durumlarda, pratik nedenlerle, silindrisel eklemler kullanılsa bile, bu eklemlerin dönme serbestlikleri göz ardı edilerek kinematik işlemlere kayar eklem olarak dahil edilebilirler.

Bu bölümde yalnızca iki platformlu paralel manipülatörler göz önüne alınacaktır. Çeşitli uygulamalarda kullanılan paralel manipülatörlerin hemen hemen hepsi, bu gruba girmektedir. Böyle bir manipülatörün platformlarından biri sabittir ve manipülatörün zeminini oluşturur. Diğer platform ise hareketlidir ve işlem aygıtını taşır. Sabit ve hareketli platformlar arasında ise, iki eklemli uzuvlardan oluşan bağlaçlar yer alır. Bu tür manipülatörlerin bağlaçları, genellikle, "bacak" olarak adlandırılır.

İki platformlu bir paralel manipülatör, Şekil 7.1'de gösterilmiştir. Manipülatörün platformları, genellikle olduğu gibi, düzlemsel biçimdedirler. Sabit platform, merkezi  $O$  olan ve eklemlerini  $B_1, B_2, \dots, B_{n_S}$  noktalarında taşıyan uzuvdur. Hareketli platform, merkezi  $R$  olan ve eklemlerini  $Z_1, Z_2, \dots, Z_{n_S}$  noktalarında taşıyan uzuvdur. Manipülatörün bacakları, kesikli çizgilerle ve  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_{n_S}$  simgeleriyle gösterilmiştir. Bacaklardan  $\Gamma_k, n_{\Gamma_k}$  adet iki eklemli uzuvdan oluşur. Genellikle, tüm bacaklar eşit sayıda uzva sahip olurlar. Yani, tüm  $k = 1, 2, \dots, n_S$  için,  $n_{\Gamma_k} = n_{\Gamma}$  olur. Manipülatörün işlem aygıtı ise, hareketli platforma dik olarak sabitlenmiş olan  $RP$  doğru parçasıyla temsil edilmiştir.

### 7.2.1. Topolojik Eşitlikler

Altı boyutlu işlem uzayında çalışan bir paralel manipülatörün serbestlik derecesi ( $n_{SB}$ ) aşağıdaki Kutzbach-Grübler formülüyle bulunabilir.

$$n_{SB} = 6n_L - (5n_{J_1} + 4n_{J_2} + 3n_{J_3} + 2n_{J_4} + n_{J_5}) \quad (7.2.1)$$

(7.2.1) formülünde,  $n_L^*$  toplam uzuv sayısı olmak üzere,  $n_L = n_L^* - 1$  hareket edebilen uzuv sayısını,  $n_{J_k}$  ise  $k$  serbestlik dereceli eklem sayısını göstermektedir.

Tipik bir paralel manipülatörde, tek serbestlik dereceli eklemler, döner ya da kayar eklem olabilir; iki serbestlik dereceli eklemler, silindirel ya da üniversal eklem olabilir; üç serbestlik dereceli eklemler, küresel eklem olabilir; dört ve beş serbestlik dereceli eklemler ise bulunmaz. Dolayısıyla, Kutzbach-Grübler formülü aşağıdaki biçime sadeleşir.

$$n_{SB} = 6n_L - (5n_{J_1} + 4n_{J_2} + 3n_{J_3}) \quad (7.2.2)$$

Bir paralel manipülatörün içerdiği bağımsız kinematik döngü sayısı ( $n_{KD}$ ), aşağıdaki formülle bulunabilir.

$$n_{KD} = n_J - n_L \quad (7.2.3)$$

(7.2.3) formülünde,  $n_J$  toplam eklem sayısıdır. Yani,

$$n_J = n_{J_1} + n_{J_2} + n_{J_3} + n_{J_4} + n_{J_5} \quad (7.2.4)$$

Bir paralel manipülatörün kinematik betimlenmesi için gerekli ve yeterli olan eklem değişkeni sayısı ( $n_{ED}$ ), aşağıdaki formülle bulunabilir.

$$n_{ED} = 6n_{KD} + n_{SB} \quad (7.2.5)$$

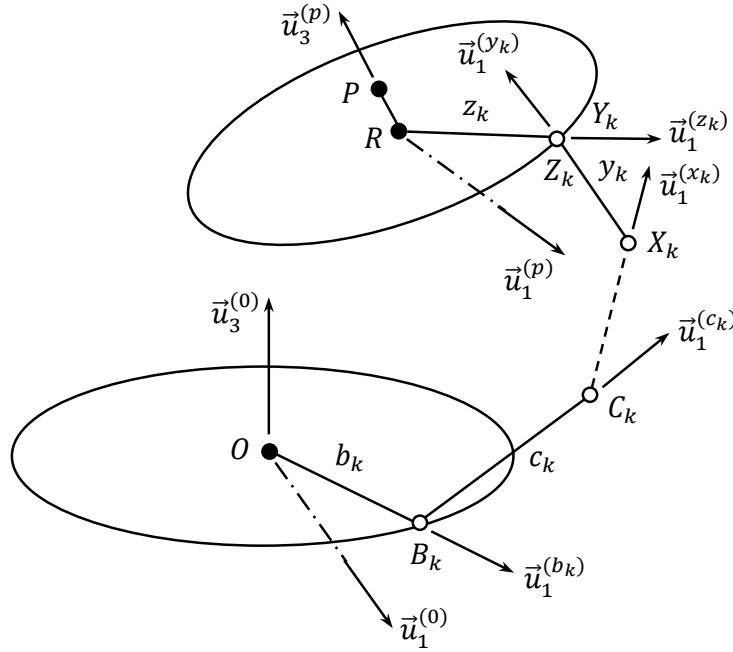


(7.2.5) formülünde,  $n_{sB}$  "eyletimli eklem değişkeni" sayısını,  $6n_{KD}$  ise "eyletimsiz eklem değişkeni" sayısını göstermektedir.

Doğal olarak, eyletimli eklem değişkeni sayısı, manipülâtörün serbestlik derecesine eşittir.

Eyletimsiz eklem değişkeni sayısının  $6n_{KD}$  olmasının nedeni ise, bu değişkenlerin, altışar altışar, sayısı  $n_{KD}$  olan bağımsız kinematik döngü denklemleri kullanılarak eyletimli eklem değişkenleri cinsinden bulunabilmeleridir.

### 7.2.2. Kinematik Denklemler



Şekil 7.2. Bacak Ayrıntısı

a) İşlem Aygıtının Yönelimi:

Bacak sayısı  $n_s$  olan bir paralel manipülâtör için işlem aygıtının ve bağlı olduğu hareketli platformun, yani  $\mathcal{F}_p$  eksen takımının, zemine bağlı  $\mathcal{F}_0$  eksen takımına göre yönelimi,  $n_s$  değişik biçimde ifade edilebilir. Şöyle ki,

$$\hat{C}^{(0,p)} = \hat{C}^{(0,b_k)} \hat{C}^{(b_k,z_k)} \hat{C}^{(z_k,p)} \quad (7.2.6)$$

$$\hat{C}^{(b_k,z_k)} = \hat{C}^{(b_k,c_k)} \hat{C}^{(c_k,d_k)} \dots \hat{C}^{(x_k,y_k)} \hat{C}^{(y_k,z_k)} \quad (7.2.7)$$

$$k = 1, 2, \dots, n_s$$

(7.2.7) denklemi,  $k$ -yinci bacağı oluşturan iki eklemlilikli uzuvlar arasında yazılmıştır. Bu uzuvlar şunlardır:  $B_k$  ile  $C_k$  arasındaki  $L_{c_k}$ ,  $C_k$  ile  $D_k$  arasındaki  $L_{d_k}$ , ...,  $X_k$  ile  $Y_k$  arasındaki  $L_{y_k}$ . Sonuncu iki eklemlilikli uzuv için,  $Y_k = Z_k$  çakıştırması yapılmıştır.

b) İşlem Aygıtının Uç Noktasının Konumu:

Bacak sayısı  $n_S$  olan bir paralel manipülatör için uç noktasının ( $P$  noktasının) zeminin  $O$  noktasına göre konumu da,  $n_S$  değişik biçimde ifade edilebilir. Şöyle ki,

$$\vec{r}_{OP} = \vec{r}_{OB_k} + \vec{r}_{B_k Z_k} + \vec{r}_{Z_k R} + \vec{r}_{RP} \quad (7.2.8)$$

$$\vec{r}_{B_k Z_k} = \vec{r}_{B_k Y_k} = \vec{r}_{B_k C_k} + \vec{r}_{C_k D_k} + \dots + \vec{r}_{X_k Y_k} \quad (7.2.9)$$

$$k = 1, 2, \dots, n_S$$

(7.2.9) denklemi,  $k$ -yinci bacağı oluşturan ve yukarıda betimlenen iki eklemlü uzuvlar arasında yazılmıştır. Hatırlatmak gerekirse, sonuncu iki eklemlü uzuv için,  $Y_k = Z_k$  çakıştırmaları yapılmıştır. Ayrıca,  $L_{c_k}, \dots, L_{y_k}$  uzuvlarının boyları da,  $c_k, \dots, y_k$  simgeleriyle gösterilmiştir.

(7.2.8) ve (7.2.9) denklemlerinin zemine bağlı  $\mathcal{F}_0$  eksen takımındaki matris karşılıkları şöyle yazılabilir.

$$\vec{r}_{OP}^{(0)} = \hat{C}^{(0,b_k)} \vec{r}_{OB_k}^{(b_k)} + \vec{r}_{B_k Z_k}^{(0)} + \hat{C}^{(0,z_k)} \vec{r}_{Z_k R}^{(z_k)} + \hat{C}^{(0,p)} \vec{r}_{RP}^{(p)} \quad (7.2.10)$$

$$\vec{r}_{B_k Z_k}^{(0)} = \vec{r}_{B_k Y_k}^{(0)} = \hat{C}^{(0,c_k)} \vec{r}_{B_k C_k}^{(c_k)} + \hat{C}^{(0,d_k)} \vec{r}_{C_k D_k}^{(d_k)} + \dots + \hat{C}^{(0,y_k)} \vec{r}_{X_k Y_k}^{(y_k)} \quad (7.2.11)$$

c) Yönelimsel Döngü Kapanım Denklemleri:

(7.2.6) denklem grubundaki  $n_S$  denklemden yalnızca biri, örneğin birinci,  $\hat{C}^{(0,p)}$  matrisini ifade etmek için yeterlidir. Geri kalan  $n_{KD} = n_S - 1$  adet denklem, aynı  $\hat{C}^{(0,p)}$  matrisini verdikleri gerçeğiyle birinciye eşitlenerek aşağıdaki yönelimsel döngü kapanım denklemleri elde edilir.

$$\hat{C}^{(0,b_k)} \hat{C}^{(b_k,z_k)} \hat{C}^{(z_k,p)} = \hat{C}^{(0,b_1)} \hat{C}^{(b_1,z_1)} \hat{C}^{(z_1,p)} \quad (7.2.12)$$

$$k = 2, 3, \dots, n_S$$

d) Konumsal Döngü Kapanım Denklemleri:

(7.2.8) denklem grubundaki  $n_S$  denklemden yalnızca biri, örneğin birinci,  $\vec{r}_{OP}$  vektörünü ifade etmek için yeterlidir. Geri kalan  $n_{KD} = n_S - 1$  adet denklem, aynı  $\vec{r}_{OP}$  vektörünü verdikleri gerçeğiyle birinciye eşitlenerek aşağıdaki konumsal döngü kapanım denklemleri elde edilir.

$$\vec{r}_{OB_k} + \vec{r}_{B_k Z_k} + \vec{r}_{Z_k R} = \vec{r}_{OB_1} + \vec{r}_{B_1 Z_1} + \vec{r}_{Z_1 R} \quad (7.2.13)$$

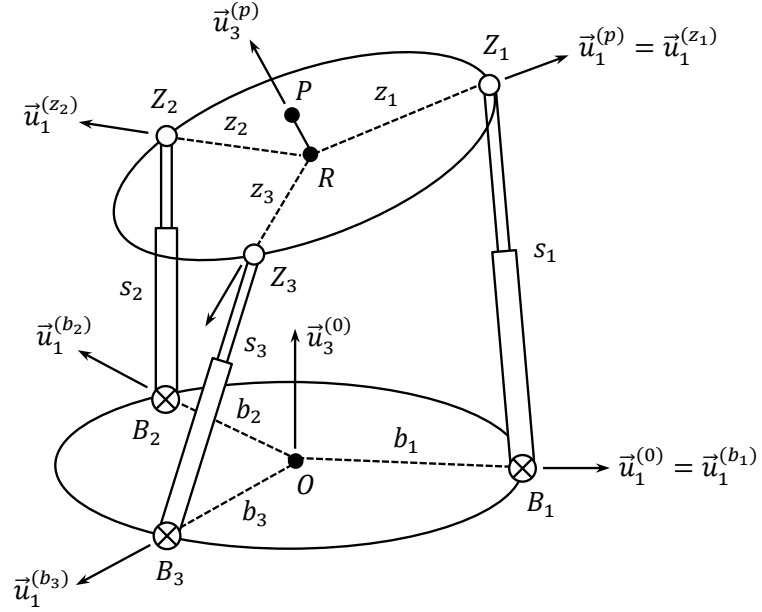
$$k = 2, 3, \dots, n_S$$

Konumsal döngü kapanım denklemleri, aşağıda görüldüğü gibi, matris denklemleri biçiminde de yazılabilir.

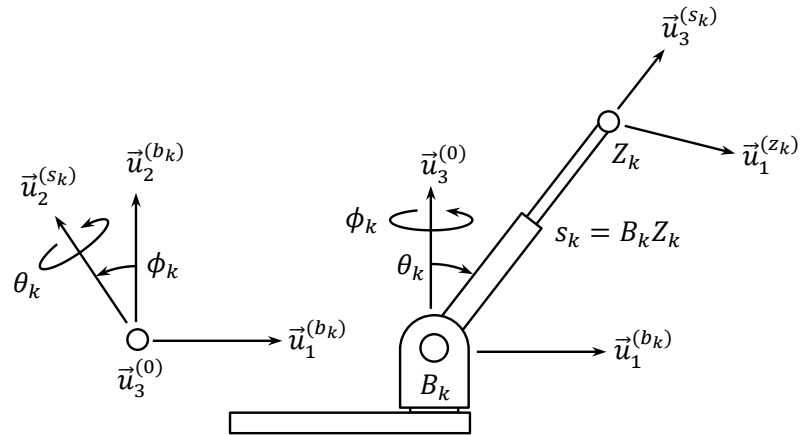
$$\begin{aligned} & \hat{C}^{(0,b_k)} \bar{r}_{OB_k}^{(b_k)} + \bar{r}_{B_k Z_k}^{(0)} + \hat{C}^{(0,z_k)} \bar{r}_{Z_k R}^{(z_k)} \\ &= \hat{C}^{(0,b_1)} \bar{r}_{OB_1}^{(b_1)} + \bar{r}_{B_1 Z_1}^{(0)} + \hat{C}^{(0,z_1)} \bar{r}_{Z_1 R}^{(z_1)} \end{aligned} \quad (7.2.14)$$

$$k = 2, 3, \dots, n_S$$

### 7.3. Örnek Paralel Manipülör



Şekil 7.3. Örnek Paralel Manipülör



Şekil 7.4. Üniversal Eklemlerden Birinin Ayrıntıları

### 7.3.1. Örnek Paralel Manipülâtörün Kinematik Yapısı

Şekil 7.3'te, üç bacaklı bir paralel manipülâtör görülmektedir. Manipülâtörün bacakları zemine (sabit platforma) üniversal eklemlerle, hareketli platforma ise küresel eklemlerle bağlanmıştır. Her iki platform da daireseldir ve bu nedenle platformlara ait sabit uzunluklar platformların yarıçapları olarak şöyle alınmıştır.

$$b_1 = b_2 = b_3 = r_0 \text{ ve } z_1 = z_2 = z_3 = r_p$$

Ayrıca, platformların taşıdığı eklemler 120 derecelik eşit aralıklarla yerleştirilmiştir. Bacakları oluşturan uzuvlar birbirine kayar eklemlerle bağlanmıştır. Eksenleri birbirine dik olan iki döner eklemden oluşan üniversal eklemlerden birinin ayrıntıları Şekil 7.4'te gösterilmiştir.

Manipülâtör, bacaklarındaki kayar eklemler ve üniversal eklemlerindeki azimut işlevli döner eklemler tarafından eyletilmektedir. Buna göre, eyletimli eklem değişkenleri şunlardır.

$$\phi_1, \phi_2, \phi_3; s_1, s_2, s_3$$

### 7.3.2. Örnek Paralel Manipülâtöre Ait Kinematik Denklemler

a) Yönelimsel Döngü Kapanım Denklemleri:

$$\hat{C}^{(0,b_2)} \hat{C}^{(b_2,s_2)} \hat{C}^{(s_2,z_2)} \hat{C}^{(z_2,p)} = \hat{C}^{(0,b_1)} \hat{C}^{(b_1,s_1)} \hat{C}^{(s_1,z_1)} \hat{C}^{(z_1,p)} \quad (7.3.1)$$

$$\hat{C}^{(0,b_3)} \hat{C}^{(b_3,s_3)} \hat{C}^{(s_3,z_3)} \hat{C}^{(z_3,p)} = \hat{C}^{(0,b_1)} \hat{C}^{(b_1,s_1)} \hat{C}^{(s_1,z_1)} \hat{C}^{(z_1,p)} \quad (7.3.2)$$

(7.3.1) ve (7.3.2) denklemleri, manipülâtörün kinematik özellikleri ve  $\delta_0 = 2\pi/3$  tanımı kullanılarak şöyle yazılabilir.

$$\begin{aligned} & [e^{\tilde{u}_3 \delta_0}] [e^{\tilde{u}_3 \phi_2} e^{\tilde{u}_2 \theta_2}] [e^{\tilde{u}_i \alpha_2} e^{\tilde{u}_j \beta_2} e^{\tilde{u}_k \gamma_2}] [e^{-\tilde{u}_3 \delta_0}] \\ & = [e^{\tilde{u}_3 0}] [e^{\tilde{u}_3 \phi_1} e^{\tilde{u}_2 \theta_1}] [e^{\tilde{u}_i \alpha_1} e^{\tilde{u}_j \beta_1} e^{\tilde{u}_k \gamma_1}] [e^{-\tilde{u}_3 0}] \end{aligned} \quad (7.3.3)$$

$$\begin{aligned} & [e^{-\tilde{u}_3 \delta_0}] [e^{\tilde{u}_3 \phi_3} e^{\tilde{u}_2 \theta_3}] [e^{\tilde{u}_i \alpha_3} e^{\tilde{u}_j \beta_3} e^{\tilde{u}_k \gamma_3}] [e^{\tilde{u}_3 \delta_0}] \\ & = [e^{\tilde{u}_3 0}] [e^{\tilde{u}_3 \phi_1} e^{\tilde{u}_2 \theta_1}] [e^{\tilde{u}_i \alpha_1} e^{\tilde{u}_j \beta_1} e^{\tilde{u}_k \gamma_1}] [e^{-\tilde{u}_3 0}] \end{aligned} \quad (7.3.4)$$

Zorunlu olmasa da, küresel eklem açıları için 2-1-3 sıralaması kullanılırsa, (7.3.3) ve (7.3.4) denklemleri aşağıdaki gibi sadeleştirilebilir.

$$\begin{aligned} & e^{\tilde{u}_3(\phi_2 + \delta_0)} e^{\tilde{u}_2(\theta_2 + \alpha_2)} e^{\tilde{u}_1 \beta_2} e^{\tilde{u}_3(\gamma_2 - \delta_0)} \\ & = e^{\tilde{u}_3 \phi_1} e^{\tilde{u}_2(\theta_1 + \alpha_1)} e^{\tilde{u}_1 \beta_1} e^{\tilde{u}_3 \gamma_1} \end{aligned} \quad (7.3.5)$$

$$\begin{aligned} & e^{\tilde{u}_3(\phi_3 - \delta_0)} e^{\tilde{u}_2(\theta_3 + \alpha_3)} e^{\tilde{u}_1 \beta_3} e^{\tilde{u}_3(\gamma_3 + \delta_0)} \\ & = e^{\tilde{u}_3 \phi_1} e^{\tilde{u}_2(\theta_1 + \alpha_1)} e^{\tilde{u}_1 \beta_1} e^{\tilde{u}_3 \gamma_1} \end{aligned} \quad (7.3.6)$$

b) Konumsal Döngü Kapanım Denklemleri:

$$\vec{r}_{OB_2} + \vec{r}_{B_2Z_2} + \vec{r}_{Z_2R} = \vec{r}_{OB_1} + \vec{r}_{B_1Z_1} + \vec{r}_{Z_1R} \quad (7.3.7)$$

$$\vec{r}_{OB_3} + \vec{r}_{B_3Z_3} + \vec{r}_{Z_3R} = \vec{r}_{OB_1} + \vec{r}_{B_1Z_1} + \vec{r}_{Z_1R} \quad (7.3.8)$$

(7.3.7) ve (7.3.8) denklemleri, manipülâtörün kinematik özellikleri kullanılarak şöyle yazılabilir.

$$r_0 \vec{u}_1^{(b_2)} + s_2 \vec{u}_3^{(s_2)} - r_p \vec{u}_1^{(z_2)} = r_0 \vec{u}_1^{(b_1)} + s_1 \vec{u}_3^{(s_1)} - r_p \vec{u}_1^{(z_1)} \quad (7.3.9)$$

$$r_0 \vec{u}_1^{(b_2)} + s_2 \vec{u}_3^{(s_2)} - r_p \vec{u}_1^{(z_2)} = r_0 \vec{u}_1^{(b_1)} + s_1 \vec{u}_3^{(s_1)} - r_p \vec{u}_1^{(z_1)} \quad (7.3.10)$$

(7.3.9) ve (7.3.10) denklemlerinin  $\mathcal{F}_0$  eksen takımındaki matris karşılıkları şöyle yazılabilir.

$$\begin{aligned} r_0 \hat{C}^{(0,b_2)} \bar{u}_1 + s_2 \hat{C}^{(0,b_2)} \hat{C}^{(b_2,s_2)} \bar{u}_3 - r_p \hat{C}^{(0,b_2)} \hat{C}^{(b_2,s_2)} \hat{C}^{(s_2,z_2)} \bar{u}_1 \\ = r_0 \hat{C}^{(0,b_1)} \bar{u}_1 + s_1 \hat{C}^{(0,b_1)} \hat{C}^{(b_1,s_1)} \bar{u}_3 - r_p \hat{C}^{(0,b_1)} \hat{C}^{(b_1,s_1)} \hat{C}^{(s_1,z_1)} \bar{u}_1 \end{aligned} \quad (7.3.11)$$

$$\begin{aligned} r_0 \hat{C}^{(0,b_3)} \bar{u}_1 + s_3 \hat{C}^{(0,b_3)} \hat{C}^{(b_3,s_3)} \bar{u}_3 - r_p \hat{C}^{(0,b_3)} \hat{C}^{(b_3,s_3)} \hat{C}^{(s_3,z_3)} \bar{u}_1 \\ = r_0 \hat{C}^{(0,b_1)} \bar{u}_1 + s_1 \hat{C}^{(0,b_1)} \hat{C}^{(b_1,s_1)} \bar{u}_3 - r_p \hat{C}^{(0,b_1)} \hat{C}^{(b_1,s_1)} \hat{C}^{(s_1,z_1)} \bar{u}_1 \end{aligned} \quad (7.3.12)$$

İlgili yönelim matrislerinin ifadeleri yerlerine konduktan sonra yapılan işlemlerle (7.3.11) ve (7.3.12) denklemleri aşağıdaki biçimlere getirilebilir.

$$\begin{aligned} e^{\tilde{u}_3 \delta_0} [r_0 \bar{u}_1 + e^{\tilde{u}_3 \phi_2} e^{\tilde{u}_2 \theta_2} (s_2 \bar{u}_3 - r_p e^{\tilde{u}_2 \alpha_2} e^{\tilde{u}_1 \beta_2} e^{\tilde{u}_3 \gamma_2} \bar{u}_1)] \\ = r_0 \bar{u}_1 + e^{\tilde{u}_3 \phi_1} e^{\tilde{u}_2 \theta_1} (s_1 \bar{u}_3 - r_p e^{\tilde{u}_2 \alpha_1} e^{\tilde{u}_1 \beta_1} e^{\tilde{u}_3 \gamma_1} \bar{u}_1) \end{aligned} \quad (7.3.13)$$

$$\begin{aligned} e^{-\tilde{u}_3 \delta_0} [r_0 \bar{u}_1 + e^{\tilde{u}_3 \phi_3} e^{\tilde{u}_2 \theta_3} (s_3 \bar{u}_3 - r_p e^{\tilde{u}_2 \alpha_3} e^{\tilde{u}_1 \beta_3} e^{\tilde{u}_3 \gamma_3} \bar{u}_1)] \\ = r_0 \bar{u}_1 + e^{\tilde{u}_3 \phi_1} e^{\tilde{u}_2 \theta_1} (s_1 \bar{u}_3 - r_p e^{\tilde{u}_2 \alpha_1} e^{\tilde{u}_1 \beta_1} e^{\tilde{u}_3 \gamma_1} \bar{u}_1) \end{aligned} \quad (7.3.14)$$

c) İşlem Aygıtı Yönelim Denklemi:

İşlem aygıtının yönelimi, en sade biçimiyle, birinci bacak üzerinden ifade edilebilir. Bu ifade şöyledir.

$$\begin{aligned} \hat{C}^{(0,p)} &= \hat{C}^{(0,b_1)} \hat{C}^{(b_1,s_1)} \hat{C}^{(s_1,z_1)} \hat{C}^{(z_1,p)} = e^{\tilde{u}_3 \delta_0} \hat{C}^{(b_1,s_1)} \hat{C}^{(s_1,z_1)} e^{\tilde{u}_3 \delta_0} \Rightarrow \\ \hat{C}^{(0,p)} &= \hat{C}^{(b_1,s_1)} \hat{C}^{(s_1,z_1)} = (e^{\tilde{u}_3 \phi_1} e^{\tilde{u}_2 \theta_1}) (e^{\tilde{u}_2 \alpha_1} e^{\tilde{u}_1 \beta_1} e^{\tilde{u}_3 \gamma_1}) \end{aligned}$$

$\hat{C} = \hat{C}^{(0,p)}$  kısaltması kullanılarak yukarıdaki denklem şöyle yazılabilir.

$$\hat{C} = e^{\tilde{u}_3 \phi_1} e^{\tilde{u}_2(\theta_1 + \alpha_1)} e^{\tilde{u}_1 \beta_1} e^{\tilde{u}_3 \gamma_1} \quad (7.3.15)$$

c) İşlem Aygıtının Uç Noktasının Konum Denklemi:

İşlem aygıtının uç noktasının konumu da, en sade biçimiyle, birinci bacak üzerinden ifade edilebilir. Bu ifade şöyledir.

$$\begin{aligned}\vec{r}_{OP} &= \vec{r}_{OB_1} + \vec{r}_{B_1Z_1} + \vec{r}_{Z_1R} + \vec{r}_{RP} \Rightarrow \\ \vec{r}_{OP} &= b_1\vec{u}_1^{(b_1)} + s_1\vec{u}_3^{(s_1)} - r_p\vec{u}_1^{(z_1)} + d_p\vec{u}_3^{(p)}\end{aligned}\quad (7.3.16)$$

(7.3.16) denkleminin  $\mathcal{F}_0$  eksen takımındaki matris karşılığı şöyle yazılabilir.

$$\begin{aligned}\vec{r}_{OP}^{(0)} &= r_0\hat{C}^{(0,b_1)}\bar{u}_1 + s_1\hat{C}^{(0,b_1)}\hat{C}^{(b_1,s_1)}\bar{u}_3 - r_p\hat{C}^{(0,b_1)}\hat{C}^{(b_1,s_1)}\hat{C}^{(s_1,z_1)}\bar{u}_1 \\ &\quad + d_p\hat{C}^{(0,b_1)}\hat{C}^{(b_1,s_1)}\hat{C}^{(s_1,z_1)}\hat{C}^{(z_1,p)}\bar{u}_3 \Rightarrow \\ \vec{r}_{OP}^{(0)} &= r_0\bar{u}_1 + e^{\tilde{u}_3\phi_1}e^{\tilde{u}_2\theta_1}[s_1\bar{u}_3 + e^{\tilde{u}_2\alpha_1}e^{\tilde{u}_1\beta_1}e^{\tilde{u}_3\gamma_1}(d_p\bar{u}_3 - r_p\bar{u}_1)]\end{aligned}\quad (7.3.17)$$

Manipülâtörün  $P$  ve  $R$  noktalarının konumlarını temsil etmek üzere, seri manipülâtörlerde olduğu gibi, aşağıdaki özel simgeler kullanılabilir.

$$\vec{r} = \vec{r}_{OR} \Rightarrow \bar{r} = \bar{r}^{(0)} = \vec{r}_{OR}^{(0)}\quad (7.3.18)$$

$$\vec{p} = \vec{r}_{OP} \Rightarrow \bar{p} = \bar{p}^{(0)} = \vec{r}_{OP}^{(0)}\quad (7.3.19)$$

Bu simgeler kullanılarak  $P$  ve  $R$  noktalarının konumları için aşağıdaki denklemler yazılabilir.

$$\bar{p} = r_0\bar{u}_1 + e^{\tilde{u}_3\phi_1}e^{\tilde{u}_2\theta_1}[s_1\bar{u}_3 + e^{\tilde{u}_2\alpha_1}e^{\tilde{u}_1\beta_1}e^{\tilde{u}_3\gamma_1}(d_p\bar{u}_3 - r_p\bar{u}_1)]\quad (7.3.20)$$

$$\bar{r} = r_0\bar{u}_1 + e^{\tilde{u}_3\phi_1}e^{\tilde{u}_2\theta_1}(s_1\bar{u}_3 - r_p e^{\tilde{u}_2\alpha_1}e^{\tilde{u}_1\beta_1}e^{\tilde{u}_3\gamma_1}\bar{u}_1)\quad (7.3.21)$$

$$\bar{p} = \bar{r} + d_p e^{\tilde{u}_3\phi_1}e^{\tilde{u}_2(\theta_1+\alpha_1)}e^{\tilde{u}_1\beta_1}e^{\tilde{u}_3\gamma_1}\bar{u}_3 \Rightarrow$$

$$\bar{p} = \bar{r} + d_p\hat{C}\bar{u}_3\quad (7.3.22)$$

$$\bar{p} = \bar{r} + d_p e^{\tilde{u}_3\phi_1}e^{\tilde{u}_2(\theta_1+\alpha_1)}e^{\tilde{u}_1\beta_1}\bar{u}_3\quad (7.3.23)$$

#### 7.4. Örnek Paralel Manipülâtör İçin Ters Kinematik Çözüm

İşlem aygıtının istenen duruşunu belirtmek üzere verilen  $\hat{C} = \hat{C}^{(0,p)}$  matrisine ve  $\bar{p} = \bar{r}_{OP}^{(0)}$  dikeysıra matrisine karşılık gelen eyletimli ve eyletimsiz eklem değişkenleri, aşağıda açıklanan biçimde belirlenebilir.

Kısım 7.3'teki denklemlere dayanarak aşağıdaki denklemler yazılabilir.

$$e^{\tilde{u}_3\phi_1} e^{\tilde{u}_2(\theta_1+\alpha_1)} e^{\tilde{u}_1\beta_1} e^{\tilde{u}_3\gamma_1} = \hat{C} \quad (7.4.1)$$

$$e^{\tilde{u}_3(\phi_2+\delta_0)} e^{\tilde{u}_2(\theta_2+\alpha_2)} e^{\tilde{u}_1\beta_2} e^{\tilde{u}_3(\gamma_2-\delta_0)} = \hat{C} \quad (7.4.2)$$

$$e^{\tilde{u}_3(\phi_3-\delta_0)} e^{\tilde{u}_2(\theta_3+\alpha_3)} e^{\tilde{u}_1\beta_3} e^{\tilde{u}_3(\gamma_3+\delta_0)} = \hat{C} \quad (7.4.3)$$

$$\bar{p} = \bar{r} + d_p \hat{C} \bar{u}_3 \quad (7.4.4)$$

$$r_0 \bar{u}_1 + e^{\tilde{u}_3\phi_1} e^{\tilde{u}_2\theta_1} (s_1 \bar{u}_3 - r_p e^{\tilde{u}_2\alpha_1} e^{\tilde{u}_1\beta_1} e^{\tilde{u}_3\gamma_1} \bar{u}_1) = \bar{r} \quad (7.4.5)$$

$$e^{\tilde{u}_3\delta_0} [r_0 \bar{u}_1 + e^{\tilde{u}_3\phi_2} e^{\tilde{u}_2\theta_2} (s_2 \bar{u}_3 - r_p e^{\tilde{u}_2\alpha_2} e^{\tilde{u}_1\beta_2} e^{\tilde{u}_3\gamma_2} \bar{u}_1)] = \bar{r} \quad (7.4.6)$$

$$e^{-\tilde{u}_3\delta_0} [r_0 \bar{u}_1 + e^{\tilde{u}_3\phi_3} e^{\tilde{u}_2\theta_3} (s_3 \bar{u}_3 - r_p e^{\tilde{u}_2\alpha_3} e^{\tilde{u}_1\beta_3} e^{\tilde{u}_3\gamma_3} \bar{u}_1)] = \bar{r} \quad (7.4.7)$$

$\hat{C}$  ve  $\bar{p}$  bilindiğine göre, ilk iş olarak aşağıdaki denklemle  $\bar{r}$  belirlenir.

$$\bar{r} = \bar{p} - d_p \hat{C} \bar{u}_3 \quad (7.4.8)$$

Artık bilinen  $\bar{r}$  için, (7.4.5) - (7.4.7) denklemleri şöyle düzenlenebilir.

$$r_0 \bar{u}_1 + s_1 e^{\tilde{u}_3\phi_1} e^{\tilde{u}_2\theta_1} \bar{u}_3 - r_p \hat{C} \bar{u}_1 = \bar{r} \Rightarrow$$

$$s_1 e^{\tilde{u}_3\phi_1} e^{\tilde{u}_2\theta_1} \bar{u}_3 = \bar{r} + (r_p \hat{C} - r_0 \hat{I}) \bar{u}_1 \quad (7.4.9)$$

$$r_0 \bar{u}_1 + s_2 e^{\tilde{u}_3\phi_2} e^{\tilde{u}_2\theta_2} \bar{u}_3 - r_p e^{-\tilde{u}_3\delta_0} \hat{C} e^{\tilde{u}_3\delta_0} \bar{u}_1 = e^{-\tilde{u}_3\delta_0} \bar{r} \Rightarrow$$

$$s_2 e^{\tilde{u}_3\phi_2} e^{\tilde{u}_2\theta_2} \bar{u}_3 = e^{-\tilde{u}_3\delta_0} [\bar{r} + (r_p \hat{C} - r_0 \hat{I}) e^{\tilde{u}_3\delta_0} \bar{u}_1] \quad (7.4.10)$$

$$r_0 \bar{u}_1 + s_3 e^{\tilde{u}_3\phi_3} e^{\tilde{u}_2\theta_3} \bar{u}_3 - r_p e^{\tilde{u}_3\delta_0} \hat{C} e^{-\tilde{u}_3\delta_0} \bar{u}_1 = e^{\tilde{u}_3\delta_0} \bar{r} \Rightarrow$$

$$s_3 e^{\tilde{u}_3\phi_3} e^{\tilde{u}_2\theta_3} \bar{u}_3 = e^{\tilde{u}_3\delta_0} [\bar{r} + (r_p \hat{C} - r_0 \hat{I}) e^{-\tilde{u}_3\delta_0} \bar{u}_1] \quad (7.4.11)$$

(7.4.9) - (7.4.11) denklemleri taraf tarafa devrikleri (transpozları) ile çarpılarak bacak boyları, aşağıda  $s_1$  için ayrıntısı gösterilen biçimde belirlenebilir.

$$(s_1 e^{\tilde{u}_3\phi_1} e^{\tilde{u}_2\theta_1} \bar{u}_3)^t (s_1 e^{\tilde{u}_3\phi_1} e^{\tilde{u}_2\theta_1} \bar{u}_3) = s_1^2 (\bar{u}_3^t e^{-\tilde{u}_2\theta_1} e^{-\tilde{u}_3\phi_1} e^{\tilde{u}_3\phi_1} e^{\tilde{u}_2\theta_1} \bar{u}_3) = s_1^2$$

$$= [\bar{r} + (r_p \hat{C} - r_0 \hat{I}) \bar{u}_1]^t [\bar{r} + (r_p \hat{C} - r_0 \hat{I}) \bar{u}_1] \Rightarrow$$

$$s_1 = \sqrt{[\bar{r} + (r_p \hat{C} - r_0 \hat{I})\bar{u}_1]^t [\bar{r} + (r_p \hat{C} - r_0 \hat{I})\bar{u}_1]} \quad (7.4.12)$$

$$s_2 = \sqrt{[\bar{r} + (r_p \hat{C} - r_0 \hat{I})e^{\bar{u}_3 \delta_0} \bar{u}_1]^t [\bar{r} + (r_p \hat{C} - r_0 \hat{I})e^{\bar{u}_3 \delta_0} \bar{u}_1]} \quad (7.4.13)$$

$$s_3 = \sqrt{[\bar{r} + (r_p \hat{C} - r_0 \hat{I})e^{-\bar{u}_3 \delta_0} \bar{u}_1]^t [\bar{r} + (r_p \hat{C} - r_0 \hat{I})e^{-\bar{u}_3 \delta_0} \bar{u}_1]} \quad (7.4.14)$$

Bacak boyları belirlendikten sonra,  $\phi_1$  ve  $\theta_1$  açılarını belirlemek üzere, (7.4.9) denklemi şöyle yazılabilir.

$$\begin{aligned} e^{\bar{u}_3 \phi_1} e^{\bar{u}_2 \theta_1} \bar{u}_3 &= \bar{n}_1 = [\bar{r} + (r_p \hat{C} - r_0 \hat{I})\bar{u}_1] / s_1 \Rightarrow \\ e^{\bar{u}_2 \theta_1} \bar{u}_3 &= e^{-\bar{u}_3 \phi_1} \bar{n}_1 \end{aligned} \quad (7.4.15)$$

Dikkat edilirse,  $\bar{n}_1 = \bar{u}_3^{(s_1/0)} = [\bar{u}_3^{(s_1)}]^{(0)}$  olmaktadır. Diğer bir deyişle,  $\bar{n}_1$ , birinci bacağın doğrultusunu gösteren birim vektörü temsil etmektedir.

(7.4.15) denkleminde aşağıdaki skalar denklemler elde edilebilir.

$$\begin{aligned} \bar{u}_1^t e^{\bar{u}_2 \theta_1} \bar{u}_3 &= \bar{u}_1^t e^{-\bar{u}_3 \phi_1} \bar{n}_1 \Rightarrow \bar{u}_1^t (\bar{u}_3 c \theta_1 + \bar{u}_1 s \theta_1) = (\bar{u}_1^t c \phi_1 + \bar{u}_2^t s \phi_1) \bar{n}_1 \Rightarrow \\ s \theta_1 &= n_{11} c \phi_1 + n_{12} s \phi_1 \end{aligned} \quad (7.4.16)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_2^t e^{\bar{u}_2 \theta_1} \bar{u}_3 &= \bar{u}_2^t e^{-\bar{u}_3 \phi_1} \bar{n}_1 \Rightarrow \bar{u}_2^t (\bar{u}_3 c \theta_1 + \bar{u}_1 s \theta_1) = (\bar{u}_2^t c \phi_1 - \bar{u}_1^t s \phi_1) \bar{n}_1 \Rightarrow \\ 0 &= n_{12} c \phi_1 - n_{11} s \phi_1 \end{aligned} \quad (7.4.17)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_3^t e^{\bar{u}_2 \theta_1} \bar{u}_3 &= \bar{u}_3^t e^{-\bar{u}_3 \phi_1} \bar{n}_1 \Rightarrow \bar{u}_3^t (\bar{u}_3 c \theta_1 + \bar{u}_1 s \theta_1) = \bar{u}_3^t \bar{n}_1 \Rightarrow \\ c \theta_1 &= n_{13} \end{aligned} \quad (7.4.18)$$

Eğer  $n_{12} = n_{11} = 0$  değilse, yani birinci bacak zemine dik değilse, (7.4.17) denklemi,  $\phi_1$  açısının sinüsünü, kosinüsünü, ve kendisini şöyle verir.

$$s \phi_1 = \sigma_1 n_{12} / \sqrt{n_{11}^2 + n_{12}^2} \quad (7.4.19)$$

$$c \phi_1 = \sigma_1 n_{11} / \sqrt{n_{11}^2 + n_{12}^2} \quad (7.4.20)$$

$$\phi_1 = \text{atan}_2(\sigma_1 n_{12}, \sigma_1 n_{11}) \quad (7.4.21)$$

$$\sigma_1 = \pm 1 \quad (7.4.22)$$

Bunun üzerine, (7.4.16) ve (7.4.18) denklemleri de,  $\theta_1$  açısını şöyle verir.

$$\theta_1 = \text{atan}_2(n_{11} c \phi_1 + n_{12} s \phi_1, n_{13}) = \text{atan}_2(\sigma_1 \sqrt{n_{11}^2 + n_{12}^2}, n_{13}) \quad (7.4.23)$$

Yukarıdaki denklemlere göre, eğer  $\sigma_1 = +1$  seçimi,  $\theta_1$  ve  $\phi_1$  açılarını verirse,  $\sigma_1 = -1$  seçimi,  $\theta'_1 = -\theta_1$  ve  $\phi'_1 = \phi_1 + \pi$  açılarını verir. Bununla birlikte, bu durum, Şekil 7.4'ten de görülebileceği gibi, eklem durumu bir fark yaratmaz. Dolayısıyla, genelliği bozmaksızın  $\sigma_1 = +1$  seçimi yapılabilir.



Eğer  $n_{12} = n_{11} = 0$  ise, yani birinci bacak zemine dikse ve dolayısıyla  $\theta_1 = 0$  ise, bir "konumsal tekil durum" ortaya çıkar ve (7.4.15) denkleminde göre  $\phi_1$  açısı belirsizleşir. Ayrıca, böyle bir tekil durumda,  $\phi_1$  açısı hareketli platform üzerindeki etkinliğini kaybeder. Öte yandan,  $\phi_1$  eyletilen bir açı olduğu için, sözü edilen tekil durumda,  $\phi_1$  açısının eyleticisi etkisizleşmiş olur.

Diğer açı çiftleri,  $\{\phi_2, \theta_2\}$  ile  $\{\phi_3, \theta_3\}$ , yukarıdakine benzer bir biçimde, (7.4.10) ve (7.4.11) denklemlerinden belirlenebilirler. Şöyle ki,

$$e^{\tilde{u}_3 \phi_2} e^{\tilde{u}_2 \theta_2} \bar{u}_3 = \bar{n}_2 = e^{-\tilde{u}_3 \delta_0} [\bar{r} + (r_p \hat{C} - r_0 \hat{I}) e^{\tilde{u}_3 \delta_0} \bar{u}_1] / s_2 \Rightarrow$$

$$e^{\tilde{u}_2 \theta_2} \bar{u}_3 = e^{-\tilde{u}_3 \phi_2} \bar{n}_2 \quad (7.4.24)$$

$$e^{\tilde{u}_3 \phi_3} e^{\tilde{u}_2 \theta_3} \bar{u}_3 = \bar{n}_3 = e^{\tilde{u}_3 \delta_0} [\bar{r} + (r_p \hat{C} - r_0 \hat{I}) e^{-\tilde{u}_3 \delta_0} \bar{u}_1] / s_3 \Rightarrow$$

$$e^{\tilde{u}_2 \theta_3} \bar{u}_3 = e^{-\tilde{u}_3 \phi_3} \bar{n}_3 \quad (7.4.25)$$

Eğer  $n_{22} = n_{21} = 0$  değilse, yani ikinci bacak zemine dik değilse, (7.4.24) denklemi,  $\phi_2$  ve  $\theta_2$  açılarını  $\sigma_2 = +1$  seçimiyle şöyle verir.

$$\phi_2 = \text{atan}_2(n_{22}, n_{21}) \quad (7.4.26)$$

$$\theta_2 = \text{atan}_2(\sqrt{n_{21}^2 + n_{22}^2}, n_{23}) \quad (7.4.27)$$

Eğer ikinci bacak zemine dikse, yani  $\theta_2 = 0$  ise, ikinci bir konumsal tekil durum oluşur. Bu tekil durumda,  $\phi_2$  açısı belirsizleşir ve  $\phi_2$  açısının eyleticisi etkisizleşir.

Eğer  $n_{32} = n_{31} = 0$  değilse, yani üçüncü bacak zemine dik değilse, (7.4.25) denklemi,  $\phi_3$  ve  $\theta_3$  açılarını  $\sigma_3 = +1$  seçimiyle şöyle verir.

$$\phi_3 = \text{atan}_2(n_{32}, n_{31}) \quad (7.4.28)$$

$$\theta_3 = \text{atan}_2(\sqrt{n_{31}^2 + n_{32}^2}, n_{33}) \quad (7.4.29)$$

Eğer üçüncü bacak zemine dikse, yani  $\theta_3 = 0$  ise, üçüncü bir konumsal tekil durum oluşur. Bu tekil durumda,  $\phi_3$  açısı belirsizleşir ve  $\phi_3$  açısının eyleticisi etkisizleşir.

Tekil durumlar dışında, zemin ve bacak eklemlerine ait değişkenler belirlendikten sonra, küresel eklemlere ait değişkenler de belirlenebilirler. Bu amaçla, (7.4.1) - (7.4.3) denklemleri şöyle yazılabilir.

$$e^{\tilde{u}_2 \alpha_1} e^{\tilde{u}_1 \beta_1} e^{\tilde{u}_3 \gamma_1} = \hat{D}_1 = e^{-\tilde{u}_2 \theta_1} e^{-\tilde{u}_3 \phi_1} \hat{C} \quad (7.4.30)$$

$$e^{\tilde{u}_2 \alpha_2} e^{\tilde{u}_1 \beta_2} e^{\tilde{u}_3 \gamma_2} = \hat{D}_2 = e^{-\tilde{u}_2 \theta_2} e^{-\tilde{u}_3 (\phi_2 + \delta_0)} \hat{C} e^{\tilde{u}_3 \delta_0} \quad (7.4.31)$$

$$e^{\tilde{u}_2 \alpha_3} e^{\tilde{u}_1 \beta_3} e^{\tilde{u}_3 \gamma_3} = \hat{D}_3 = e^{-\tilde{u}_2 \theta_3} e^{-\tilde{u}_3 (\phi_3 - \delta_0)} \hat{C} e^{-\tilde{u}_3 \delta_0} \quad (7.4.32)$$

Yukarıdaki denklemlerdeki  $\widehat{D}_1$ ,  $\widehat{D}_2$ ,  $\widehat{D}_3$  matrisleri, verilen  $\widehat{C}$  matrisi ve belirlenmiş olan üniversal eklem değişkenleri cinsinden bilinmektedir. Küresel eklem değişkenleri ise, bu denklemlerin sol taraflarında 2-1-3 sıralamasına göre yer almaktadır. Dolayısıyla, söz konusu denklemler, 2-1-3 sıralamasına göre çözülerek küresel eklem değişkenleri belirlenebilir. Çözümün  $\widehat{D}_1$  için elde edilişi aşağıda gösterilmiştir. Çözüm,  $\widehat{D}_2$  ve  $\widehat{D}_3$  için de benzer biçimde elde edilebilir.

$$\begin{aligned} \bar{u}_2^t e^{\tilde{u}_2 \alpha_1} e^{\tilde{u}_1 \beta_1} e^{\tilde{u}_3 \gamma_1} \bar{u}_3 &= \bar{u}_2^t \widehat{D}_1 \bar{u}_3 \Rightarrow \bar{u}_2^t e^{\tilde{u}_1 \beta_1} \bar{u}_3 = d_{123} \Rightarrow \\ s\beta_1 &= -d_{123} \end{aligned} \quad (7.4.33)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_3^t e^{\tilde{u}_2 \alpha_1} e^{\tilde{u}_1 \beta_1} e^{\tilde{u}_3 \gamma_1} \bar{u}_3 &= \bar{u}_3^t \widehat{D}_1 \bar{u}_3 \Rightarrow \bar{u}_3^t e^{\tilde{u}_2 \alpha_1} e^{\tilde{u}_1 \beta_1} \bar{u}_3 = d_{133} \Rightarrow \\ c\alpha_1 c\beta_1 &= d_{133} \end{aligned} \quad (7.4.34)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_1^t e^{\tilde{u}_2 \alpha_1} e^{\tilde{u}_1 \beta_1} e^{\tilde{u}_3 \gamma_1} \bar{u}_3 &= \bar{u}_1^t \widehat{D}_1 \bar{u}_3 \Rightarrow \bar{u}_1^t e^{\tilde{u}_2 \alpha_1} e^{\tilde{u}_1 \beta_1} \bar{u}_3 = d_{113} \Rightarrow \\ s\alpha_1 c\beta_1 &= d_{113} \end{aligned} \quad (7.4.35)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_2^t e^{\tilde{u}_2 \alpha_1} e^{\tilde{u}_1 \beta_1} e^{\tilde{u}_3 \gamma_1} \bar{u}_1 &= \bar{u}_2^t \widehat{D}_1 \bar{u}_1 \Rightarrow \bar{u}_2^t e^{\tilde{u}_1 \beta_1} e^{\tilde{u}_3 \gamma_1} \bar{u}_1 = d_{121} \Rightarrow \\ c\beta_1 s\gamma_1 &= d_{121} \end{aligned} \quad (7.4.36)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_2^t e^{\tilde{u}_2 \alpha_1} e^{\tilde{u}_1 \beta_1} e^{\tilde{u}_3 \gamma_1} \bar{u}_2 &= \bar{u}_2^t \widehat{D}_1 \bar{u}_2 \Rightarrow \bar{u}_2^t e^{\tilde{u}_1 \beta_1} e^{\tilde{u}_3 \gamma_1} \bar{u}_2 = d_{122} \Rightarrow \\ c\beta_1 c\gamma_1 &= d_{122} \end{aligned} \quad (7.4.37)$$

(7.4.33) denklemi,  $\beta_1$  açısını şöyle verir.

$$\beta_1 = \text{atan}_2(-d_{123}, \sigma'_1 \sqrt{1 - d_{123}^2}) \quad (7.4.38)$$

$$\sigma'_1 = \pm 1 \quad (7.4.39)$$

Eğer  $c\beta_1 \neq 0$  ise, (7.4.34) - (7.4.37) denklemleri, diğer iki açıyı şöyle verir.

$$\alpha_1 = \text{atan}_2(\sigma'_1 d_{113}, \sigma'_1 d_{133}) \quad (7.4.40)$$

$$\gamma_1 = \text{atan}_2(\sigma'_1 d_{121}, \sigma'_1 d_{122}) \quad (7.4.41)$$

Yukarıdaki  $\sigma'_1$  işaret değişkeninin seçilen değeri, küresel eklem üzerinde hiç bir görünür fark oluşturmaz. Dolayısıyla, genelliği bozmaksızın  $\sigma'_1 = +1$  seçimi yapılabilir.

Eğer  $c\beta_1 = 0$  ise, yani  $\beta_1 = \sigma_0 \pi / 2 = \pm \pi / 2$  ise, 2-1-3 sıralamasından kaynaklanan bir konumsal tekil durum daha oluşur. Böyle bir tekil durumda, (7.4.30) denklemi üzerinde şu işlemler yapılabilir.

$$\begin{aligned} e^{\tilde{u}_2 \alpha_1} e^{\tilde{u}_1 \sigma_0 \pi / 2} e^{\tilde{u}_3 \gamma_1} &= \widehat{D}_1 \Rightarrow e^{\tilde{u}_2 \alpha_1} e^{-\tilde{u}_2 \sigma_0 \gamma_1} e^{\tilde{u}_1 \sigma_0 \pi / 2} = \widehat{D}_1 \Rightarrow \\ e^{\tilde{u}_2 (\alpha_1 - \sigma_0 \gamma_1)} &= \widehat{D}_1^* = \widehat{D}_1 e^{-\tilde{u}_1 \sigma_0 \pi / 2} \end{aligned} \quad (7.4.42)$$

(7.4.42) denkleminde göre, sözü edilen tekil durumda,  $\alpha_1$  ve  $\gamma_1$  açıları ayrı ayrı belirlenemezler. Bununla birlikte,  $\beta_1 = \pi/2$  ise  $(\alpha_1 - \gamma_1)$  açısı,  $\beta_1 = -\pi/2$  ise  $(\alpha_1 + \gamma_1)$  açısı, (7.4.42) denklemini kullanılarak belirlenebilir.

## 7.5. Örnek Paralel Manipülatör İçin İleri Kinematik Çözüm

Eyletimli eklem değişkenlerinin belirtilen değerlerine bağlı olarak ortaya çıkan  $\hat{C} = \hat{C}^{(0,p)}$  matrisi ve  $\bar{p} = \bar{r}_{OP}^{(0)}$  dikeysıra matrisi ile eyletimsiz eklem değişkenleri, aşağıda açıklanan biçimde bulunabilir. Çözümüne başlangıç olarak, Kısım 7.4'teki denklemler, aşağıdaki tekrar yazılmıştır.

$$e^{\tilde{u}_3\phi_1} e^{\tilde{u}_2(\theta_1+\alpha_1)} e^{\tilde{u}_1\beta_1} e^{\tilde{u}_3\gamma_1} = \hat{C} \quad (7.5.1)$$

$$e^{\tilde{u}_3(\phi_2+\delta_0)} e^{\tilde{u}_2(\theta_2+\alpha_2)} e^{\tilde{u}_1\beta_2} e^{\tilde{u}_3(\gamma_2-\delta_0)} = \hat{C} \quad (7.5.2)$$

$$e^{\tilde{u}_3(\phi_3-\delta_0)} e^{\tilde{u}_2(\theta_3+\alpha_3)} e^{\tilde{u}_1\beta_3} e^{\tilde{u}_3(\gamma_3+\delta_0)} = \hat{C} \quad (7.5.3)$$

$$\bar{p} = \bar{r} + d_p \hat{C} \bar{u}_3 \quad (7.5.4)$$

$$r_0 \bar{u}_1 + e^{\tilde{u}_3\phi_1} e^{\tilde{u}_2\theta_1} (s_1 \bar{u}_3 - r_p e^{\tilde{u}_2\alpha_1} e^{\tilde{u}_1\beta_1} e^{\tilde{u}_3\gamma_1} \bar{u}_1) = \bar{r} \quad (7.5.5)$$

$$e^{\tilde{u}_3\delta_0} [r_0 \bar{u}_1 + e^{\tilde{u}_3\phi_2} e^{\tilde{u}_2\theta_2} (s_2 \bar{u}_3 - r_p e^{\tilde{u}_2\alpha_2} e^{\tilde{u}_1\beta_2} e^{\tilde{u}_3\gamma_2} \bar{u}_1)] = \bar{r} \quad (7.5.6)$$

$$e^{-\tilde{u}_3\delta_0} [r_0 \bar{u}_1 + e^{\tilde{u}_3\phi_3} e^{\tilde{u}_2\theta_3} (s_3 \bar{u}_3 - r_p e^{\tilde{u}_2\alpha_3} e^{\tilde{u}_1\beta_3} e^{\tilde{u}_3\gamma_3} \bar{u}_1)] = \bar{r} \quad (7.5.7)$$

Çözümüne ulaşmak için yapılacak ilk iş, eyletimsiz eklem değişkenlerini bulmaktır. Böylece tüm eklem değişkenleri bilinmiş olacağı için, önce  $\hat{C}$  ile  $\bar{r}$  ve onların peşinden  $\bar{p}$ , (7.5.1), (7.5.5), ve (7.5.4) denklemleri kullanılarak bulunabilir. Eyletimsiz eklem değişkenleri ise, döngü kapanım denklemlerinden bulunabilir. Döngü kapanım denklemleri, (7.5.1) - (7.5.7) denklemlerinden aşağıdaki gibi elde edilir.

a) Yönelimsel Döngü Kapanım Denklemleri:

$$e^{\tilde{u}_3(\phi_2+\delta_0)} e^{\tilde{u}_2(\theta_2+\alpha_2)} e^{\tilde{u}_1\beta_2} e^{\tilde{u}_3(\gamma_2-\delta_0)} = e^{\tilde{u}_3\phi_1} e^{\tilde{u}_2(\theta_1+\alpha_1)} e^{\tilde{u}_1\beta_1} e^{\tilde{u}_3\gamma_1} \quad (7.5.8)$$

$$e^{\tilde{u}_3(\phi_3-\delta_0)} e^{\tilde{u}_2(\theta_3+\alpha_3)} e^{\tilde{u}_1\beta_3} e^{\tilde{u}_3(\gamma_3+\delta_0)} = e^{\tilde{u}_3\phi_1} e^{\tilde{u}_2(\theta_1+\alpha_1)} e^{\tilde{u}_1\beta_1} e^{\tilde{u}_3\gamma_1} \quad (7.5.9)$$

b) Konumsal Döngü Kapanım Denklemleri:

$$\begin{aligned} & e^{\tilde{u}_3\delta_0} [r_0 \bar{u}_1 + e^{\tilde{u}_3\phi_2} e^{\tilde{u}_2\theta_2} (s_2 \bar{u}_3 - r_p e^{\tilde{u}_2\alpha_2} e^{\tilde{u}_1\beta_2} e^{\tilde{u}_3\gamma_2} \bar{u}_1)] \\ & = r_0 \bar{u}_1 + e^{\tilde{u}_3\phi_1} e^{\tilde{u}_2\theta_1} (s_1 \bar{u}_3 - r_p e^{\tilde{u}_2\alpha_1} e^{\tilde{u}_1\beta_1} e^{\tilde{u}_3\gamma_1} \bar{u}_1) \end{aligned} \quad (7.5.10)$$

$$\begin{aligned} & e^{-\tilde{u}_3\delta_0} [r_0 \bar{u}_1 + e^{\tilde{u}_3\phi_3} e^{\tilde{u}_2\theta_3} (s_3 \bar{u}_3 - r_p e^{\tilde{u}_2\alpha_3} e^{\tilde{u}_1\beta_3} e^{\tilde{u}_3\gamma_3} \bar{u}_1)] \\ & = r_0 \bar{u}_1 + e^{\tilde{u}_3\phi_1} e^{\tilde{u}_2\theta_1} (s_1 \bar{u}_3 - r_p e^{\tilde{u}_2\alpha_1} e^{\tilde{u}_1\beta_1} e^{\tilde{u}_3\gamma_1} \bar{u}_1) \end{aligned} \quad (7.5.11)$$

(5.7.8) - (5.7.11) denklemleri, 12 bağımsız skalar denklem içermektedir. Bu denklemlerde yer alan 12 bilinmeyen ise şunlardır.

$$\theta_1, \theta_2, \theta_3; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \beta_1, \beta_2, \beta_3; \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$$

Ne var ki, (7.5.8) - (7.5.11) denklemlerini tamamen analitik olarak çözmek olanaksızdır. Ancak, yarı analitik bir çözüm elde edilebilir. Böyle bir çözüm için  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  ile  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  açıları geçici olarak biliniyormuş gibi kabul edilerek (7.5.8) ve (7.5.9) denklemlerinden aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$e^{\tilde{u}_3(\phi_2+\delta_0)} e^{\tilde{u}_2\theta_2} \widehat{D}_2 e^{-\tilde{u}_3\delta_0} = e^{\tilde{u}_3\phi_1} e^{\tilde{u}_2\theta_1} \widehat{D}_1 \quad (7.5.12)$$

$$e^{\tilde{u}_3(\phi_3-\delta_0)} e^{\tilde{u}_2\theta_3} \widehat{D}_3 e^{\tilde{u}_3\delta_0} = e^{\tilde{u}_3\phi_1} e^{\tilde{u}_2\theta_1} \widehat{D}_1 \quad (7.5.13)$$

Yukarıdaki denklemlerde, daha önce Kısım 7.4'te yapılmış olan şu tanımlar kullanılmıştır.

$$\widehat{D}_1 = e^{\tilde{u}_2\alpha_1} e^{\tilde{u}_1\beta_1} e^{\tilde{u}_3\gamma_1} \quad (7.5.14)$$

$$\widehat{D}_2 = e^{\tilde{u}_2\alpha_2} e^{\tilde{u}_1\beta_2} e^{\tilde{u}_3\gamma_2} \quad (7.5.15)$$

$$\widehat{D}_3 = e^{\tilde{u}_2\alpha_3} e^{\tilde{u}_1\beta_3} e^{\tilde{u}_3\gamma_3} \quad (7.5.16)$$

(7.5.12) ve (7.5.13) denklemleri,  $\widehat{D}_2$  ve  $\widehat{D}_3$  için şöyle çözülürler.

$$\widehat{D}_2 = e^{-\tilde{u}_2\theta_2} e^{\tilde{u}_3(\phi_1-\phi_2-\delta_0)} e^{\tilde{u}_2\theta_1} \widehat{D}_1 e^{\tilde{u}_3\delta_0} \quad (7.5.17)$$

$$\widehat{D}_3 = e^{-\tilde{u}_2\theta_3} e^{\tilde{u}_3(\phi_1-\phi_3+\delta_0)} e^{\tilde{u}_2\theta_1} \widehat{D}_1 e^{-\tilde{u}_3\delta_0} \quad (7.5.18)$$

$\widehat{D}_2$  ve  $\widehat{D}_3$  matrisleri yerlerine konunca, (5.7.10) ve (5.7.11) denklemleri aşağıdaki biçimlerde yeniden yazılabilir.

$$\begin{aligned} & e^{\tilde{u}_3\delta_0} [r_0 \bar{u}_1 + e^{\tilde{u}_3\phi_2} e^{\tilde{u}_2\theta_2} (s_2 \bar{u}_3 - r_p e^{-\tilde{u}_2\theta_2} e^{\tilde{u}_3(\phi_1-\phi_2-\delta_0)} e^{\tilde{u}_2\theta_1} \widehat{D}_1 e^{\tilde{u}_3\delta_0} \bar{u}_1)] \\ & = r_0 \bar{u}_1 + e^{\tilde{u}_3\phi_1} e^{\tilde{u}_2\theta_1} (s_1 \bar{u}_3 - r_p \widehat{D}_1 \bar{u}_1) \\ & e^{-\tilde{u}_3\delta_0} [r_0 \bar{u}_1 + e^{\tilde{u}_3\phi_3} e^{\tilde{u}_2\theta_3} (s_3 \bar{u}_3 - r_p e^{-\tilde{u}_2\theta_3} e^{\tilde{u}_3(\phi_1-\phi_3+\delta_0)} e^{\tilde{u}_2\theta_1} \widehat{D}_1 e^{-\tilde{u}_3\delta_0} \bar{u}_1)] \\ & = r_0 \bar{u}_1 + e^{\tilde{u}_3\phi_1} e^{\tilde{u}_2\theta_1} (s_1 \bar{u}_3 - r_p \widehat{D}_1 \bar{u}_1) \end{aligned}$$

Gerekli işlemlerden sonra, yukarıdaki denklemlerden aşağıdaki sadeleştirilmiş denklemler elde edilebilir.

$$\begin{aligned} & r_0(e^{\tilde{u}_3\delta_0} - \hat{I})\bar{u}_1 + s_2 e^{\tilde{u}_3\delta_0} e^{\tilde{u}_3\phi_2} e^{\tilde{u}_2\theta_2} \bar{u}_3 - s_1 e^{\tilde{u}_3\phi_1} e^{\tilde{u}_2\theta_1} \bar{u}_3 \\ & = r_p e^{\tilde{u}_3\phi_1} e^{\tilde{u}_2\theta_1} \widehat{D}_1 (e^{\tilde{u}_3\delta_0} - \hat{I})\bar{u}_1 \end{aligned} \quad (7.5.19)$$

$$\begin{aligned} & r_0(e^{-\tilde{u}_3\delta_0} - \hat{I})\bar{u}_1 + s_3 e^{-\tilde{u}_3\delta_0} e^{\tilde{u}_3\phi_3} e^{\tilde{u}_2\theta_3} \bar{u}_3 - s_1 e^{\tilde{u}_3\phi_1} e^{\tilde{u}_2\theta_1} \bar{u}_3 \\ & = r_p e^{\tilde{u}_3\phi_1} e^{\tilde{u}_2\theta_1} \widehat{D}_1 (e^{-\tilde{u}_3\delta_0} - \hat{I})\bar{u}_1 \end{aligned} \quad (7.5.20)$$

(7.5.19) ve (7.5.20) denklemleri kısaca şöyle de yazılabilir.

$$\widehat{D}_1 \bar{y}_1 = e^{\tilde{u}_2\alpha_1} e^{\tilde{u}_1\beta_1} e^{\tilde{u}_3\gamma_1} \bar{y}_1 = \bar{x}_2 = \bar{x}_2(\theta_1, \theta_2) \quad (7.5.21)$$

$$\widehat{D}_1 \bar{z}_1 = e^{\tilde{u}_2\alpha_1} e^{\tilde{u}_1\beta_1} e^{\tilde{u}_3\gamma_1} \bar{z}_1 = \bar{x}_3 = \bar{x}_3(\theta_1, \theta_3) \quad (7.5.22)$$

(7.5.21) ve (7.5.22) denklemlerinde şu tanımlar kullanılmıştır.

$$\bar{y}_1 = r_p(e^{\tilde{u}_3\delta_0} - \hat{I})\bar{u}_1 \quad (7.5.23)$$

$$\bar{z}_1 = r_p(e^{-\tilde{u}_3\delta_0} - \hat{I})\bar{u}_1 \quad (7.5.24)$$

$$\bar{x}_2(\theta_1, \theta_2) = e^{-\tilde{u}_2\theta_1}e^{-\tilde{u}_3\phi_1}[\bar{g}_2(\theta_1) + s_2e^{\tilde{u}_3\delta_0}e^{\tilde{u}_3\phi_2}e^{\tilde{u}_2\theta_2}\bar{u}_3] \quad (7.5.25)$$

$$\bar{g}_2(\theta_1) = r_0(e^{\tilde{u}_3\delta_0} - \hat{I})\bar{u}_1 - s_1e^{\tilde{u}_3\phi_1}e^{\tilde{u}_2\theta_1}\bar{u}_3 \quad (7.5.26)$$

$$\bar{x}_3(\theta_1, \theta_3) = e^{-\tilde{u}_2\theta_1}e^{-\tilde{u}_3\phi_1}[\bar{g}_3(\theta_1) + s_3e^{-\tilde{u}_3\delta_0}e^{\tilde{u}_3\phi_3}e^{\tilde{u}_2\theta_3}\bar{u}_3] \quad (7.5.27)$$

$$\bar{g}_3(\theta_1) = r_0(e^{-\tilde{u}_3\delta_0} - \hat{I})\bar{u}_1 - s_1e^{\tilde{u}_3\phi_1}e^{\tilde{u}_2\theta_1}\bar{u}_3 \quad (7.5.28)$$

(7.5.21) ve (7.5.22) denklemleri taraf tarafa devrikleriyle çarpılırsa,  $\hat{D}_1^t\hat{D}_1 = \hat{I}$  olduğu göz önüne alınırsa ve  $\delta_0 = 2\pi/3$  olduğu hatırlanırsa, aşağıdaki skalar denklemler elde edilir.

$$\begin{aligned} \bar{y}_1^t\bar{y}_1 &= \bar{x}_2^t\bar{x}_2 \Rightarrow \\ 2r_p^2(1 - c\delta_0) &= 3r_p^2 = \bar{g}_2^t\bar{g}_2 + s_2^2 + 2s_2\bar{g}_2^te^{\tilde{u}_3\delta_0}e^{\tilde{u}_3\phi_2}e^{\tilde{u}_2\theta_2}\bar{u}_3 \end{aligned} \quad (7.5.29)$$

$$\begin{aligned} \bar{z}_1^t\bar{z}_1 &= \bar{x}_3^t\bar{x}_3 \Rightarrow \\ 2r_p^2(1 - c\delta_0) &= 3r_p^2 = \bar{g}_3^t\bar{g}_3 + s_3^2 + 2s_3\bar{g}_3^te^{-\tilde{u}_3\delta_0}e^{\tilde{u}_3\phi_3}e^{\tilde{u}_2\theta_3}\bar{u}_3 \end{aligned} \quad (7.5.30)$$

(7.5.29) ve (7.5.30) denklemleri aşağıdaki gibi düzenlenebilir.

$$\bar{q}_2^te^{\tilde{u}_2\theta_2}\bar{u}_3 = h_2 = h_2(\theta_1) = (3r_p^2 - \bar{g}_2^t\bar{g}_2 - s_2^2)/(2s_2) \quad (7.5.31)$$

$$\bar{q}_3^te^{\tilde{u}_2\theta_3}\bar{u}_3 = h_3 = h_3(\theta_1) = (3r_p^2 - \bar{g}_3^t\bar{g}_3 - s_3^2)/(2s_3) \quad (7.5.32)$$

(7.5.31) ve (7.5.32) denklemlerinde şu tanımlar kullanılmıştır.

$$\bar{q}_2 = \bar{q}_2(\theta_1) = e^{-\tilde{u}_3\phi_2}e^{-\tilde{u}_3\delta_0}\bar{g}_2(\theta_1) \quad (7.5.33)$$

$$\bar{q}_3 = \bar{q}_3(\theta_1) = e^{-\tilde{u}_3\phi_3}e^{\tilde{u}_3\delta_0}\bar{g}_3(\theta_1) \quad (7.5.34)$$

Yukarıdaki tanımlar kullanılarak (7.5.31) ve (7.5.33) denklemleri şöyle yazılabilir.

$$q_{23}c\theta_2 + q_{21}s\theta_2 = h_2 \quad (7.5.35)$$

$$q_{33}c\theta_3 + q_{31}s\theta_2 = h_3 \quad (7.5.36)$$

(7.5.35) ve (7.5.36) denklemleri analitik olarak çözülebilir. Böylece,  $\theta_2$  ve  $\theta_3$  açıları,  $\theta_1$  açısına bağlı olarak şöyle elde edilmiş olurlar.

$$\theta_2 = f_2(\theta_1) \quad (7.5.37)$$

$$\theta_3 = f_3(\theta_1) \quad (7.5.38)$$

Bunun üzerine, (7.5.21) ve (7.5.22) denklemleri şöyle yazılabilir.

$$\hat{D}_1\bar{y}_1 = e^{\tilde{u}_2\alpha_1}e^{\tilde{u}_1\beta_1}e^{\tilde{u}_3\gamma_1}\bar{y}_1 = \bar{x}_2(\theta_1, f_2(\theta_1)) = \bar{\xi}_2(\theta_1) \quad (7.5.39)$$

$$\hat{D}_1\bar{z}_1 = e^{\tilde{u}_2\alpha_1}e^{\tilde{u}_1\beta_1}e^{\tilde{u}_3\gamma_1}\bar{z}_1 = \bar{x}_3(\theta_1, f_3(\theta_1)) = \bar{\xi}_3(\theta_1) \quad (7.5.40)$$

Bir adım daha atılarak (7.5.39) ve (7.5.40) denklemleri şöyle de yazılabilir.

$$e^{\tilde{u}_3 \gamma_1} \bar{y}_1 = e^{-\tilde{u}_1 \beta_1} [e^{-\tilde{u}_2 \alpha_1} \bar{\xi}_2(\theta_1)] = e^{-\tilde{u}_1 \beta_1} \bar{\psi}_2(\alpha_1, \theta_1) \quad (7.5.41)$$

$$e^{\tilde{u}_3 \gamma_1} \bar{z}_1 = e^{-\tilde{u}_1 \beta_1} [e^{-\tilde{u}_2 \alpha_1} \bar{\xi}_3(\theta_1)] = e^{-\tilde{u}_1 \beta_1} \bar{\psi}_3(\alpha_1, \theta_1) \quad (7.5.42)$$

(7.5.41) ve (7.5.42) denklemleri, yukarıda zaten sağlanarak (7.5.29) ve (7.5.30) denklemleriyle sonuçlanmış olan  $|\bar{y}_1| = |\bar{\psi}_2| = |\bar{x}_2|$  ve  $|\bar{z}_1| = |\bar{\psi}_3| = |\bar{x}_3|$  eşitliklerine ek olarak ikişer bağımsız skalar denklem daha içerirler. Bu skalar denklemler aşağıda gösterildiği gibi elde edilebilir.

$$\bar{u}_1^t e^{\tilde{u}_3 \gamma_1} \bar{y}_1 = \bar{u}_1^t e^{-\tilde{u}_1 \beta_1} \bar{\psi}_2 \Rightarrow y_{11} c \gamma_1 - y_{12} s \gamma_1 = \psi_{21} \quad (7.5.43)$$

$$\bar{u}_3^t e^{\tilde{u}_3 \gamma_1} \bar{y}_1 = \bar{u}_3^t e^{-\tilde{u}_1 \beta_1} \bar{\psi}_2 \Rightarrow y_{13} = \psi_{23} c \beta_1 - \psi_{22} s \beta_1 \quad (7.5.44)$$

$$\bar{u}_1^t e^{\tilde{u}_3 \gamma_1} \bar{z}_1 = \bar{u}_1^t e^{-\tilde{u}_1 \beta_1} \bar{\psi}_3 \Rightarrow z_{11} c \gamma_1 - z_{12} s \gamma_1 = \psi_{31} \quad (7.5.45)$$

$$\bar{u}_3^t e^{\tilde{u}_3 \gamma_1} \bar{z}_1 = \bar{u}_3^t e^{-\tilde{u}_1 \beta_1} \bar{\psi}_3 \Rightarrow z_{13} = \psi_{33} c \beta_1 - \psi_{32} s \beta_1 \quad (7.5.46)$$

(7.5.43) ve (7.5.45) denklemleri  $\gamma_1$  açısı için analitik olarak ayrı ayrı çözülebilir. Bu iki çözüm şöyle ifade edilebilir.

$$\gamma_1 = \varphi_1(\alpha_1, \theta_1) \quad (7.5.47)$$

$$\gamma_1 = \varphi_2(\alpha_1, \theta_1) \quad (7.5.48)$$

(7.5.44) ve (7.5.46) denklemleri de  $\beta_1$  açısı için analitik olarak ayrı ayrı çözülebilir. Bu iki çözüm de şöyle ifade edilebilir.

$$\beta_1 = \varphi_3(\alpha_1, \theta_1) \quad (7.5.49)$$

$$\beta_1 = \varphi_4(\alpha_1, \theta_1) \quad (7.5.50)$$

(7.5.47-48) ve (7.5.49-50) denklem çiftlerinden aşağıdaki iki denklem elde edilir.

$$\varphi_1(\alpha_1, \theta_1) = \varphi_2(\alpha_1, \theta_1) \quad (7.5.51)$$

$$\varphi_3(\alpha_1, \theta_1) = \varphi_4(\alpha_1, \theta_1) \quad (7.5.52)$$

Yukarıda elde edilen son iki denklemden  $\theta_1$  ve  $\alpha_1$  açıları bulunabilir. Ne var ki, bu iki denklem ancak sayısal bir yöntemle çözülebilir.

Böyle bile olsa, başlangıçta 12 bilinmeyen içeren ileri kinematik problemi, yukarıda uygulandığı gösterilen yarı-analitik yöntem sayesinde yalnızca iki bilinmeyen içeren çok daha basit bir sayısal çözüm problemine indirgenebilmiştir.

$\theta_1$  ve  $\alpha_1$  açıları bulunduktan sonra, (7.5.47) ya da (7.5.48) denkleminde  $\gamma_1$  açısı; (7.5.49) ya da (7.5.50) denkleminde  $\beta_1$  açısı, (7.5.37) ve (7.5.38) denklemlerinden de  $\theta_2$  ve  $\theta_3$  açıları bulunur.

Daha sonra, (7.5.14) ile (7.5.17) ve (7.5.18) denklemleri,  $\hat{D}_1$  ile  $\hat{D}_2$  ve  $\hat{D}_3$  matrislerini, aşağıda tekrar yazıldığı gibi verir.

$$\widehat{D}_1 = e^{\tilde{u}_2\alpha_1} e^{\tilde{u}_1\beta_1} e^{\tilde{u}_3\gamma_1} \quad (7.5.53)$$

$$\widehat{D}_2 = e^{-\tilde{u}_2\theta_2} e^{\tilde{u}_3(\phi_1-\phi_2-\delta_0)} e^{\tilde{u}_2\theta_1} \widehat{D}_1 e^{\tilde{u}_3\delta_0} \quad (7.5.54)$$

$$\widehat{D}_3 = e^{-\tilde{u}_2\theta_3} e^{\tilde{u}_3(\phi_1-\phi_3+\delta_0)} e^{\tilde{u}_2\theta_1} \widehat{D}_1 e^{-\tilde{u}_3\delta_0} \quad (7.5.55)$$

$\widehat{D}_2$  ve  $\widehat{D}_3$  matrisleri de bulunduktan sonra, ikinci ve üçüncü küresel eklem değişkenleri, aşağıda tekrar yazılan (7.5.15) ve (7.5.16) denklemlerinden bulunabilir.

$$e^{\tilde{u}_2\alpha_2} e^{\tilde{u}_1\beta_2} e^{\tilde{u}_3\gamma_2} = \widehat{D}_2 \quad (7.5.56)$$

$$e^{\tilde{u}_2\alpha_3} e^{\tilde{u}_1\beta_3} e^{\tilde{u}_3\gamma_3} = \widehat{D}_3 \quad (7.5.57)$$

Çözümün son aşamasında ise,  $\hat{C}$  yönelim matrisi ile  $\bar{r}$  ve  $\bar{p}$  dikeysıra matrisleri, (7.5.1), (7.5.5), ve (7.5.4) denklemleri kullanılarak aşağıdaki gibi elde edilirler.

$$\hat{C} = e^{\tilde{u}_3\phi_1} e^{\tilde{u}_2(\theta_1+\alpha_1)} e^{\tilde{u}_1\beta_1} e^{\tilde{u}_3\gamma_1} \quad (7.5.58)$$

$$\bar{r} = r_0\bar{u}_1 + e^{\tilde{u}_3\phi_1} e^{\tilde{u}_2\theta_1} (s_1\bar{u}_3 - r_p e^{\tilde{u}_2\alpha_1} e^{\tilde{u}_1\beta_1} e^{\tilde{u}_3\gamma_1} \bar{u}_1) \quad (7.5.59)$$

$$\bar{p} = \bar{r} + d_p \hat{C} \bar{u}_3 = \bar{r} + d_p e^{\tilde{u}_3\phi_1} e^{\tilde{u}_2(\theta_1+\alpha_1)} e^{\tilde{u}_1\beta_1} \bar{u}_3 \quad (7.5.60)$$

## 7.6. Paralel Manipülatörlere Ait Genel Kinematik İlişkiler

### 7.6.1. İşlem Aygıtına Ait Duruş Denklemleri

Önceki kısımlarda ayrıntılı olarak gösterildiği gibi, genel bir paralel manipülatörün işlem aygıtının işlem uzayındaki duruşu (konumu ve yönelimi), eyletimli ve eyletimsiz tüm eklem değişkenlerine bağlı olarak aşağıdaki denklemlerle ifade edilebilir.

$$\bar{\rho} = \bar{f}(\bar{x}, \bar{y}) \quad (7.6.1)$$

$$\bar{g}(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{0} \quad (7.6.2)$$

(7.6.1) denklemi, işlem aygıtının duruşunu ifade etmek için yazılmıştır. (7.6.2) denklemi ise, döngü kapanım denklemlerinin topluca yazılmış biçimidir. Bu denklemlerde şu tanımlar kullanılmıştır.

$$\bar{x} : \text{eyletimli eklem değişkenlerini içeren dikeysıra matrisi} \quad (7.6.3)$$

$$\bar{y} : \text{eyletimsiz eklem değişkenlerini içeren dikeysıra matrisi} \quad (7.6.4)$$

$$\bar{\rho} = \begin{bmatrix} \bar{p} \\ \bar{\varphi} \end{bmatrix} \quad (7.6.5)$$

$$\bar{p} : \text{uç noktasının koordinatlarını içeren dikeysıra matrisi} \quad (7.6.6)$$

$$\bar{\varphi} : \text{işlem aygıtının Euler açılarını içeren dikeysıra matrisi} \quad (7.6.7)$$

### 7.6.2. İşlem Aygıtına Ait Hız Denklemleri

(7.6.1) ve (7.6.2) denklemlerinin türevleri alınarak aşağıdaki hız denklemleri elde edilebilir.

$$\dot{\bar{\eta}} = \hat{f}_{fx}\dot{\bar{x}} + \hat{f}_{fy}\dot{\bar{y}} \quad (7.6.8)$$

$$\hat{f}_{gx}\dot{\bar{x}} + \hat{f}_{gy}\dot{\bar{y}} = \bar{0} \quad (7.6.9)$$

(7.6.8) denklemindeki  $\bar{\eta}$ , işlem aygıtının uç noktasının hızını ve açısal hızını içerecek biçimde şöyle tanımlanmıştır.

$$\bar{\eta} = \begin{bmatrix} \bar{v} \\ \bar{\omega} \end{bmatrix} \quad (7.6.10)$$

(7.6.10) denklemindeki  $\bar{v}$  ile  $\bar{\omega}$  dikeysıra matrisleri, (7.6.5) denklemindeki  $\bar{p}$  ile  $\bar{\varphi}$  dikeysıra matrislerine aşağıdaki denklemlerle bağlıdır.

$$\bar{v} = \bar{p} \quad (7.6.11)$$

$$\bar{\omega} = \hat{E}\bar{\varphi} \quad (7.6.12)$$

Eğer Euler açıları için  $i-j-k$  sıralaması kullanılmışsa, (7.6.12) denklemindeki  $\hat{E} = \hat{E}(\bar{\varphi})$  matrisi şöyle oluşturulur.

$$\begin{aligned} \hat{C} &= e^{\tilde{u}_i\phi_1} e^{\tilde{u}_j\phi_2} e^{\tilde{u}_k\phi_3} \Rightarrow \\ \bar{\omega} &= \dot{\phi}_1\bar{u}_i + \dot{\phi}_2 e^{\tilde{u}_i\phi_1}\bar{u}_j + \dot{\phi}_3 e^{\tilde{u}_i\phi_1} e^{\tilde{u}_j\phi_2}\bar{u}_k \Rightarrow \\ \bar{\omega} &= [\bar{u}_i \quad e^{\tilde{u}_i\phi_1}\bar{u}_j \quad e^{\tilde{u}_i\phi_1} e^{\tilde{u}_j\phi_2}\bar{u}_k] \begin{bmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \\ \dot{\phi}_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \\ \hat{E} &= [\bar{u}_i \quad e^{\tilde{u}_i\phi_1}\bar{u}_j \quad e^{\tilde{u}_i\phi_1} e^{\tilde{u}_j\phi_2}\bar{u}_k] \end{aligned} \quad (7.6.13)$$

Bu arada özel bir not olarak söylenecek olursa, (7.6.8) ve (7.6.9) denklemlerinden de görüldüğü gibi, bir paralel manipülatöre ait hız ilişkileri, dört değişik Jacobi matrisi aracılığı ile ifade edilebilmektedir.

### 7.6.3. Konum Düzeyinde İleri Kinematik Çözüm

Önce, belirtilen  $\bar{x}$  için, (7.6.2) denklemini çözülerek  $\bar{y}$  aşağıda gösterilen biçimde bulunur.

$$\bar{y} = \bar{h}(\bar{x}) \quad (7.6.14)$$

(7.6.2) denklemini, genelde, birden çok çözüm verir. Dolayısıyla, (7.6.14) denklemindeki  $\bar{h}(\bar{x})$  işlevi, çoklu çözüm kümesinden uygun görülerek seçilmiş olan bir çözümdür.

Daha sonra, (7.6.1) ve (7.6.14) denklemleri kullanılarak  $\bar{\rho}$  aşağıdaki gibi bulunur.

$$\bar{\rho} = \bar{\psi}(\bar{x}) = \bar{f}(\bar{x}, \bar{h}(\bar{x})) \quad (7.6.15)$$



#### 7.6.4. Konum Düzeyinde Ters Kinematik Çözüm

Belirtilen  $\bar{\rho}$  için, (7.6.1) ve (7.6.2) denklemleri birlikte çözülerek  $\bar{x}$  ve  $\bar{y}$  aşağıda gösterilen biçimde bulunur.

$$\bar{x} = \bar{\xi}(\bar{\rho}) \quad (7.6.16)$$

$$\bar{y} = \bar{\zeta}(\bar{\rho}) \quad (7.6.17)$$

(7.6.1) ve (7.6.2) denklemleri, genelde, birden çok çözüm çifti verir. Dolayısıyla, (7.6.16) ve (7.6.17) denklemlerindeki  $\bar{\xi}(\bar{\rho})$  ve  $\bar{\zeta}(\bar{\rho})$  işlev çifti, çoklu çözüm çifti kümesinden uygun görülerek seçilmiş olan bir çözüm çiftidir.

#### 7.6.5. Hız Düzeyinde İleri Kinematik Çözüm

Önce, belirtilen  $\dot{\bar{x}}$  için, eğer  $\det(\hat{J}_{gy}) \neq 0$  ise, (7.6.9) denkleminde  $\dot{\bar{y}}$  aşağıdaki gibi bulunur.

$$\dot{\bar{y}} = -(\hat{J}_{gy}^{-1}\hat{J}_{gx})\dot{\bar{x}} = -\hat{J}_{yx}\dot{\bar{x}} \quad (7.6.18)$$

Daha sonra, (7.6.8) denklemi,  $\bar{\eta}$  dikeysıra matrisini şöyle verir.

$$\bar{\eta} = \hat{J}_{\eta x}\dot{\bar{x}} \quad (7.6.19)$$

(7.6.19) denkleminde  $\hat{J}_{\eta x}$  ile gösterilen bileşik Jacobi matrisi şöyle tanımlanmıştır.

$$\hat{J}_{\eta x} = \hat{J}_{fx} - \hat{J}_{fy}(\hat{J}_{gy}^{-1}\hat{J}_{gx}) \quad (7.6.20)$$

#### 7.6.6. Hız Düzeyinde Ters Kinematik Çözüm

Önce, belirtilen  $\bar{\eta}$  için, eğer  $\det(\hat{J}_{\eta x}) \neq 0$  ise, (7.6.19) denkleminde  $\dot{\bar{x}}$  aşağıdaki gibi bulunur.

$$\dot{\bar{x}} = \hat{J}_{\eta x}^{-1}\bar{\eta} \quad (7.6.21)$$

Daha sonra, (7.6.18) denklemi,  $\dot{\bar{y}}$  dikeysıra matrisini şöyle verir.

$$\dot{\bar{y}} = -(\hat{J}_{gy}^{-1}\hat{J}_{gx})\dot{\bar{x}} = -(\hat{J}_{gy}^{-1}\hat{J}_{gx}\hat{J}_{\eta x}^{-1})\bar{\eta} \quad (7.6.22)$$

#### 7.6.7. Devinimsel Tekil Durumlar

Yukarıda da görüldüğü gibi, genel bir paralel manipülatörün ileri ve ters kinematik ilişkilerinde farklı devinimsel tekil durumlar ortaya çıkabilmektedir.

(7.6.18) ve (7.6.20) denklemlerine göre, manipülatörün ileri kinematik ilişkilerindeki devinimsel tekil durumlar, yalnızca  $\hat{J}_{gy}$  matrisinden kaynaklanmaktadır.

(7.6.21) ve (7.6.22) denklemlerine göre ise, manipülatörün ters kinematik ilişkilerindeki devinimsel tekil durumlar, hem  $\hat{J}_{gy}$  hem de  $\hat{J}_{\eta x}$  matrislerinden kaynaklanmaktadır.

## EK A KAYNAKLAR

Bu ders notlarının hazırlanmasında aşağıda belirtilen kaynaklardan yararlanılmıştır.

1. M. K. Özgören, "Lecture Notes for ME 522 (Principles of Robotics)", Makina Mühendisliği Bölümü, ODTÜ.
2. J. Denavit and R. S. Hartenberg, "A Kinematic Notation for Lower-Pair Mechanisms Based on Matrices", ASME J. of Applied Mechanics, 22(2), pp. 215–221, 1955.
3. R. P. Paul, "Robot Manipulators: Mathematics, Programming and Control", MIT Press, Cambridge, MA, 1981.
4. J. J. Craig, "Introduction to Robotics, Mechanics and Controls", Addison-Wesley, Reading, MA, 1996.
5. W. Khalil and E. Dombre, "Modeling, Identification and Control of Robots", Hermes Penton Science, 2002.
6. J. Angeles, "Fundamentals of Robotic Mechanical Systems", Springer, 2014.
7. L. W. Tsai, "Robot Analysis: The Mechanics of Serial and Parallel Manipulators", Wiley, 1999.
8. M. K. Ozgoren, "Some Remarks on Rotation Sequences and Associated Angular Velocities", Journal of Mechanism and Machine Theory, Vol. 29, No. 7, pp. 933-940, 1994.
9. M. K. Ozgoren, "Kinematic Analysis of a Manipulator with its Position and Velocity Related Singular Configurations", Journal of Mechanism and Machine Theory, Vol. 34, pp. 1075-1101, 1999.
10. M. K. Ozgoren, "Topological Analysis of Six-Joint Serial Manipulators and Their Inverse Kinematic Solutions", Journal of Mechanism and Machine Theory, Vol. 37, pp. 511-547, 2002.
11. M. K. Ozgoren, "Kinematic Analysis of Spatial Mechanical Systems Using Exponential Rotation Matrices", Journal of Mechanical Design, ASME, Vol. 129, pp. 1144-1152, November 2007.
12. M. K. Ozgoren, "Optimal Inverse Kinematic Solutions for Redundant Manipulators by Using Analytical Methods to Minimize Position and Velocity Measures", Journal of Mechanisms and Robotics, ASME, Vol. 5, pp. 031009:1-16, August 2013.
13. M. K. Ozgoren, "Kinematic Analysis of Spatial Mechanical Systems Using a New Systematic Formulation Method for Lower and Higher Kinematic Pairs", Journal of Mechanisms and Robotics, ASME, Vol. 6, pp. 041003:1-17, November 2014.

## EK B KÜÇÜK SÖZLÜK

Mekanik sistemler ve robotik alanında kullanılan ve kullanılabilecek bazı Türkçe terimlerin İngilizce karşılıkları aşağıda belirtilmiştir. Bu terimlerin bazıları zaten kullanılmaktadır. Bazıları ise yeni önerilen ve tartışmaya açık terimlerdir. Önerilerden bazıları için esinlenme kaynakları da gösterilmiştir. Ayrıca, bazı kavramlar için birden fazla öneri de bulunmaktadır. Aynı İngilizce terim için yerine göre farklı Türkçe terimler kullanılabilir. Tabii, Bunun tersi de olabilir. Örneğin, "end-effector" terimi için "işlem aygıtı" ya da "uç işlemci" terimleri kullanılabilir. Öte yandan, "duruş" terimi için de "pose" ya da "posture" terimleri kullanılabilir. Türkçe'nin zengin ek dağarcığından kaynaklanan kelime türetme yeteneği, ilginç nüans farklılıkları da doğurabilmektedir. Örneğin, her ikisi de İngilizce'deki "translation" kelimesine karşılık gelen "öteleme" ve "ötelenme" kelimelerinin anlamları arasında azımsanmayacak bir nüans farkı vardır.

### A

Artıksıl = Redundant

(Esinlenme: Yoksul, Varsıl)

Artık eyletimli = Over actuated

Aşırı Artıksıl = Hyper Redundant

Altyazıt = Subscript

Aygıt = Tool, Device

Aygıt-Eklem Kinematiği

= Inverse Kinematics (from tool to joints)

Ayrıştırmak = To Partition

Ayrışka = Partition

(Esinlenme: Bileşke, Yerleşke)

Ayrışık = Decoupled

Atılım Açısı = Hücüm Açısı

= Angle of Attack

### B

Bağıl = Relative

Bağlanca = Network

(Esinlenme: Eğlence, İzlenme)

Bağlantı = Connection

Bağlaç = Connecting Serial Chain

(such as that between the platforms of a parallel manipulator)

Bağlaşık = Coupled

Bağlaşka = Linkage

(Esinlenme: Yerleşke)

Bağlar Uzuv = Bağlantı Uzvu

= Coupler Link (in a mechanism)

Bağlangaç

= Coupler Link (in a mechanism)

(Esinlenme: Solungaç)

Bileşen = Component

Bileşke = Combination

Boyut = Dimension

Bölüntü = Division, Partition

Bölüntülemek = To Divide, To Partition

Burulma Açısı = Twist Angle

Burgu = Vida = Screw

Burgusal Eklem = Vidasal Eklem

= Screw Joint

### C, Ç

Çalışma Hacmi = Workspace

Çözüşürmek = To Resolve (a vector)

Çözüşüm = Resolution (of a vector)

Çözünürlük = Resolution (of an image)

**D**  
 Dayanç = Strength  
 (Esinlenme: Basınç, Güvenç)  
 Derleşik = Compact  
 Devinim = Motion  
 Devinimcil Dinamik = Forward Dynamics,  
 Direct Dynamics (for finding motion)  
 Devinimsel Tekillik = Motion Singularity  
 Devrik = Transpoz = Transpose  
 Dikeysıra Matrisi = Column Matrix  
 Döner Eklem = Revolute Joint  
 Döner Uzun = Crank (in a mechanism)  
 Döngeç = Crank (in a mechanism)  
 (Esinlenme: Süzgeç, Yüzgeç)  
 Döndürgeç = Crank (for cranking)  
 (Esinlenme: Süzgeç, Yüzgeç)  
 Döndüreç = Crank (for cranking)  
 (Esinlenme: Kaldıraç)  
 Döngü = Loop  
 Döngü Kapanım Denklemi  
 = Loop Closure Equation  
 Dörtleç = Quaternion  
 Durum = Situation, State  
 Duruş = Pose, Posture

**E**  
 Eklem = Joint  
 Eklem-Aygıt Kinematiği  
 = Forward Kinematics (from joints to tool)  
 Eklem Uzayı = Joint Space  
 Eklenti = Bias Term  
 (in a nonhomogeneous expression)  
 Eksen Takımı = Reference Frame  
 Eksiksiz = Deficient  
 (Esinlenme: Yoksul, Varsıl)  
 Eksik Eyletimli = Under Actuated  
 Etkin = Effective, Dextrous  
 Etkili = Effective, Dextrous

Etki-Eylem Dinamiği  
 = Forward Dynamics, Direct Dynamics  
 Eylem-Etki Dinamiği = Inverse Dynamics  
 Eyletmek = To Actuate  
 Eyletim = Actuation  
 Eyletici = Actuator  
 Eyletimcil Dinamik = Inverse Dynamics  
 (for finding actuating forces/torques)

**F**  
 Fazla Eyletimli = Over Actuated

**G**  
 Geriye Doğru Kinematik = Ters Kinematik  
 = Inverse Kinematics  
 Gerinç  $\approx$  Gerilme = Stress  
 (Esinlenme: Basınç, Güvenç)  
 Gerinti  $\approx$  Gerinim = Strain  
 (Esinlenme: Esinti, Gezinti, Yaşantı)

**H**  
 Hücüm Açısı = Atılım Açısı  
 = Angle of Attack

**I, İ**  
 İleri Kinematik = Forward Kinematics  
 İleriye Doğru Kinematik  
 = Forward Kinematics  
 İşlem Aygıtı = End-Effector  
 İşlem Hacmi = Workspace  
 İşlem Uzayı = Task Space

**K**  
 Kaçıklık = Offset  
 Kayar Eklem = Prismatic Joint  
 Kayar Uzun = Slider (in a mechanism)  
 Kayaç = Slider (in a mechanism)  
 (Esinlenme: Kaldıraç)

Kaygaç = Slider (in a mechanism)  
(Esinlenme: Süzgeç, Yüzgeç)

Kaymalı Yuvarlanma  
= Rolling with Slipping

Kaymasız Yuvarlanma  
= Rolling without Slipping

Kapanım = Closure

Konum = Position

Konumsal Tekillik = Position Singularity

### O, Ö

Ortak Dikme = Common Normal

Öge = Element (e.g., element of a matrix)

Öteleme = Translation (driven)

Ötelenme = Translation (self driven)

### R

Rank = Rank (of a matrix)

### S, Ş

Salınmak = To Oscillate, To Rock

Salınım = Oscillation, Rocking

Salınır Uzu = Rocker (in a mechanism)

Salıngaç = Rocker (in a mechanism)  
(Esinlenme: Solungaç)

### T

Ters Kinematik = Inverse Kinematics

Ters Dinamik = Inverse Dynamics

Tutucu = Gripper

### U, Ü

Uç İşlemci = End-Effector

Uzuv = Link

Üstyazıt = superscript

### Y

Yandönme Açısı = Yaw Angle

Yankayma Açısı = Sideslip Angle

Yataysıra Matrisi = Row Matrix

Yerleşim = Location

Yenileme = Recursion

Yenilemeli Denklem = Recursive Equation

Yineleme = Iteration

Yinelemeli Çözüm = Iterative Solution

Yönelmek = To get oriented

Yöneltmek = To make oriented

Yönelim = Orientation (self driven)

Yöneltim = Orientation (driven)

Yunuslama Açısı = Pitch Angle

Yuvarlanma Açısı = Roll Angle

# ROBOT KİNEMATİĞİ ÇALIŞTAYI



**RKC 2015**

**Gaziantep**

