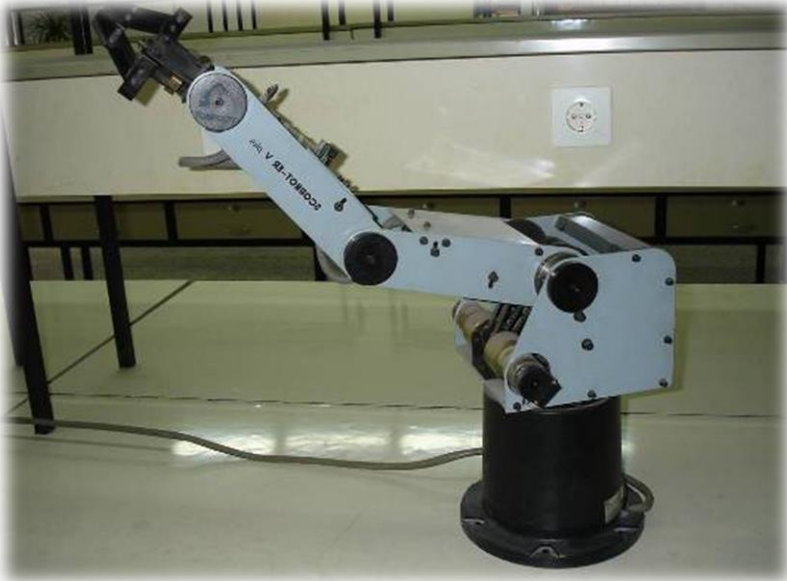




ROBOT MANİPÜLATÖRLERİN DİNAMIĞI VE KONTROLÜ



Prof. Dr. M. Kemal ÖZGÖREN



ROBOT MANİPÜLATÖRLERİN DİNAMIĞI VE KONTROLU

3-6 Şubat 2016, Ankara

Prof. Dr. M. Kemal ÖZGÖREN
Orta Doğu Teknik Üniversitesi

Makina Teorisi Derneği Yayınları
Ders Notları Serisi No: 2

ISBN 978-605-84220-2-5



Bu kitabın içeriği, Prof. Dr. M. Kemal Özgören tarafından, 3-6 Şubat 2016 tarihleri arasında düzenlenen "Robot Dinamiği ve Kontrolü Çalıştayı" (RDK 2016) kapsamında vermiş olduğu dersin notlarına dayanarak oluşturulmuştur.

Kitabın dizgisi ve elektronik kopyası, Dr. Nurdan Bilgin ve Dr. Hakan Mencek'in editörlük çalışmalarıyla hazırlanmıştır.

Makina Teorisi Derneği

Bahçelievler Mahallesi 1. Cad. TRT Haber 1 Sitesi No: C8 Gölbaşı/ANKARA

ROBOT DİNAMIĞI VE KONTROLU ÇALIŞTAYI (RDK 2016)

ÇALIŞTAY DÜZENLEME KURULU

Dr. Nurdan BİLGİN (Gazi Üniversitesi)
Yük. Müh. Ece YILDIRIM (Gazi Üniversitesi)
Yük. Müh. Fettah KODALAK (Gazi Üniversitesi)
Yük. Müh. Burcu KÜÇÜKOĞLU (Gazi Üniversitesi)
Yük. Müh. Abdurrahim DAL (Gazi Üniversitesi)

ÇALIŞTAY BİLİM KURULU

Prof. Dr. Eres Söylemez (MakTeD)
Prof. Dr. M. Kemal Özgören (MakTeD)
Prof. Dr. M. Arif Adlı (Gazi Üniversitesi)
Prof. Dr. Metin U. Salamcı (Gazi Üniversitesi)

DÜZENLEME KURULU'NUN NOTU

MakTeD'in bir geleneğe dönüşen çalıştaylarından birine ev sahipliği yapmış olmaktan onur duymaktayız. Ev sahipliğini yaptığımız bu çalıştayın düzenlenmesinde üç ayrı kurum, Türkiye'de bilimin ve bilimsel düşüncenin başat anlayış olması ortak idealiyle bizlere destek vermişlerdir. Ayrı ayrı hepsine gönül borcumuz bakidir. Bununla beraber konuşmacı olarak katkıda bulunan değerli hocalarımıza ve robotik alanında faaliyet gösteren katılımcı firmalarımıza buradan tekrar teşekkür etmek isteriz.

MakTeD Yönetim Kurulu Başkanı Prof. Dr. Eres Söylemez'in önderliğinde süre gelen bu çalıştayları, çalıştayların katılımcısı olmayı ve düzenlenmesinde görev almayı çok önemsedik ve önemsiyoruz. Çünkü bu çalıştaylar, sadece bilgi edinmemizi sağlamıyor, birlikte üretmenin, işbirliğinin, dostlukların zeminini oluşturuyor. Alanlarının en iyisi bilim insanlarının, genç bilim insanlarıyla dolaysız gönüllü ilişkisine ev sahipliği yapıyor. Planlanması, düzenlenmesi ve sonuçların yayınlanmasına kadar her aşamasında, tartışmayı, ortak aklı ve ortak çözümü yöntem ediniyor.

Son söz olarak, bu çalıştayın ana konusundaki dersleri veren ve sonrasında çalıştay ders notlarını yoğun bir emekle bu kitaba dönüştüren, sayın hocamız Prof. Dr. M. Kemal Özgören'e sonsuz teşekkürlerimizi iletiriz.

Düzenleme kurulu adına,

Dr. Nurdan Bilgin

YAZAR'IN NOTU

Bu kitap, Makine Teorisi Derneği'nin, Gazi Üniversitesi Mühendislik Fakültesi'nin ve Makine Mühendisleri Odası'nın katkı ve destekleriyle 03-06 Şubat 2016 tarihleri arasında gerçekleştirilen "Robot Dinamiği ve Kontrolü" çalıştayında verdiğim iki günlük ders için hazırlayıp katılımcılara ilettiğim ders notlarının tarafımda yeniden gözden geçirilip gerekli düzeltmeler ve yararlı olabilecek eklemeler yapıldıktan sonra uygun bir formata göre düzenlenmesiyle oluşmuştur.

Bu kitap, yine Makine Teorisi Derneği'nin önderliğiyle Gaziantep Üniversitesi, Makine Mühendisliği Bölümü tarafından 31 Ağustos-03 Eylül 2015 tarihleri arasında düzenlenen "Robot Kinematiği" çalıştayında verdiğim iki günlük derse dayanarak hazırlanmış olan "Seri ve Paralel Manipülatörlerin Analitik ve Yarı-Analitik Yöntemlerle Konum ve Hız Analizleri" başlığını taşıyan kitabın devamı niteliğindedir. Her iki kitabın da sözü edilen çalıştaylara katılanlar ve bu konularla ilgilenen diğer kişiler için faydalı birer başvuru kaynağı olacağını umuyorum.

Bu kitabın içeriğiyle ilgili değerli görüşlerini bildiren ve redaksiyonu ile düzenlenmesinde katkıda bulunan Y. Doç. Dr. Gökhan Kiper, Y. Doç. Dr. M. İ. Can Dede, Dr. Hakan Mencek ve Çalıştay Düzenleme Kurulu Başkanı Dr. Nurdan Bilgin'e özverili çabaları için çok teşekkür ederim.

Prof. Dr. M. Kemal Özgören

İÇİNDEKİLER

BÖLÜM 1. VEKTÖR İŞLEMLERİ VE TEMEL KİNEMATİK	1
1.1. Bir Noktanın Bir Eksen Takımına Göre Konumu	1
1.2. Bir Vektörün Bir Eksen Takımındaki Matris Gösterimi	2
1.3. Vektör İşlemleri ile Matris İşlemleri Arasındaki İlişkiler	2
1.4. Bir Vektörün Bir Eksen Etrafında Dönmesi	4
1.4.1. Rodrigues Formülü ve Dönme Matrisi	4
1.4.2. Temel Dikeysıra Matrisleri ve Temel Dönme Matrisleri	5
1.4.3. Dönme Matrislerinin Bazı Özellikleri	6
1.4.4. Örnek: İki aşamalı dönme işlemi	7
1.5. Bir Vektörün Değişik Eksen Takımlarındaki Matris Gösterimleri	8
1.6. Dönüşüm Matrisi İfadeleri.....	9
1.6.1. Dönüşüm Matrisinin Temel Birim Vektörler Cinsinden İfade Edilmesi.....	9
1.6.2. Dönüşüm Matrisinin Yönelim Kosinüsleri Cinsinden İfade Edilmesi	10
1.6.3. Dönüşüm Matrisinin Dönme Matrisi Olarak İfade Edilmesi.....	11
1.6.4. Dönüşüm Matrisinin Euler Açılımları Cinsinden İfade Edilmesi	12
1.7. Bir Noktanın Farklı Eksen Takımlarına Göre Konumu ve Homojen Dönüşüm Matrisleri	13
1.8. Bir Vektörün Farklı Eksen Takımlarına Göre Türevleri	16
1.8.1. Bir Vektörün Belli Bir Eksen Takımına Göre Türevi.....	16
1.8.2. Bir Vektörün Farklı Eksen Takımlarına Göre Türevlerinin Arasındaki İlişki ve Bağlı Açısız Hız Tanımı.....	17
1.8.3. Bir Vektörün Farklı Eksen Takımlarına Göre İkinci Türevlerinin Arasındaki İlişki ve Bağlı Açısız İvme Tanımı	18
1.9. Bir Noktanın Farklı Eksen Takımlarına Göre Hızı ve İvmesi.....	19
1.9.1. Bir Noktanın Farklı Eksen Takımlarına Göre Hızı.....	19
1.9.2. Bir Noktanın Farklı Eksen Takımlarına Göre İvmesi.....	20
1.9.3. Gösterimi Basitleştirilmiş Bağlı Hız ve İvme İfadeleri	20
BÖLÜM 2. İKİNCİ MERTEBEDEN TENSÖRLER: DİYADİKLER	22
2.1. Diyadiklerin Tanımı ve Kullanım Yerleri	22
2.2. Diyadiklerle Yapılan İşlemler	23
2.2.1. Nokta Çarpım.....	23
2.2.2. Çapraz Çarpım	23

2.3. Diyakiklerin Bir Eksen Takımındaki Matris Gösterimleri	24
2.4. Diyakiklerin Farklı Eksen Takımlarındaki Matris Gösterimleri	25
2.5. Vektör-Diyadik İşlemlerine Karşılık Gelen Matris İşlemleri	26
2.6. Birim Diyakik ve Ters Diyakik	26
2.7. Dönme Diyadiğı	27
BÖLÜM 3. KATI CİSİMLER İÇİN TEMEL DİNAMİK	30
3.1. Bir Katı Cismin Atalet Özellikleri	30
3.1.1. Bir Katı Cismin Kütle Kütle Merkezi	30
3.1.2. Bir Katı Cismin Kütle Merkezi	31
3.1.3. Bir Katı Cismin Kütle Merkezi Etrafındaki Atalet Tensörü ve Atalet Matrisi	31
3.1.4. Asal Eksen Takımları ve Asal Atalet Momentleri	32
3.1.5. Asal Eksenlerin ve Asal Atalet Momentlerinin Belirlenmesi	34
3.1.6. Örnek: Aynı Cisim için İki Farklı Asal Eksen Takımı	34
3.1.7. Bileşik Katı Cisimler için Atalet Tensörünün Oluşturulması	35
3.1.8. Örnek: Üç Tipik Katı Cisim ve Atalet Momentleri	37
3.1.9. Örnek: Bir Bileşik Katı Cismin Atalet Tensörü	38
3.2. Bir Katı Cisme İlişkin Kuvvet-Moment ya da Newton-Euler Denklemleri	39
3.2.1. Kuvvet Denklemi ya da Newton Denklemi	39
3.2.2. Moment Denklemi ya da Euler Denklemi	40
3.2.3. Açısal Hız Bileşenleri Sabit Olan Özel Dönme Hareketleri	42
BÖLÜM 4. KATI CİSİM SİSTEMLERİNİN DİNAMİK ANALİZİ	45
4.1. Sistemdeki Dinamik İlişkilerin Newton-Euler Denklemleriyle İfade Edilmesi	45
4.1.1. Sistemdeki Cisimlere Ait Newton-Euler Denklemleri	45
4.1.2. Etkileşim Kuvvet ve Momentlerinin Ayrıntıları	46
4.1.3. Eklem Örnekleri	48
4.2. Sistemin Hareket Denklemi ile Devinimsel ve Eyletimsel Dinamik Analizleri	53
4.2.1. Sistemin Serbestlik Derecesi	54
4.2.2. Genelleştirilmiş Koordinatlar	54
4.2.3. Genelleştirilmiş Eyletim Kuvvetleri	55
4.2.4. Genelleştirilmiş Yapısal Tepki Kuvvetleri	56
4.2.5. Yeterince Kısıtlı ve Aşırı Kısıtlı Sistemler	56
4.2.6. Tümüleşik Newton-Euler Denklemi	57
4.2.7. Hareket Denklemi ve Dinamik Analiz Amacıyla Kullanımı	59

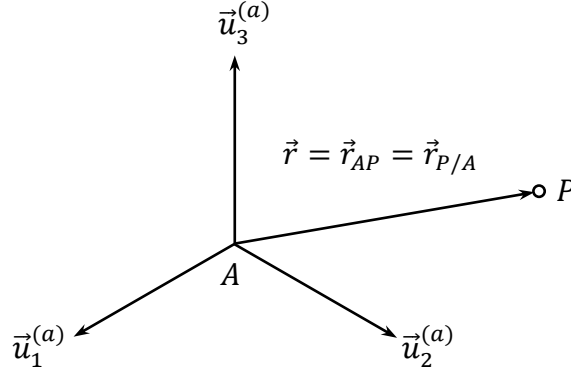
4.3. Hareket Denkleminin Newton-Euler Denklemlerinden Elde Edilmesi.....	61
4.3.1. Yöntem 1: Genelleştirilmiş Eyletim Kuvvetlerini Elde Etme Yöntemi	61
4.3.2. Yöntem 2: Genelleştirilmiş İvmeleri Elde Etme Yöntemi.....	62
4.3.3. Yöntem 3: Serbestlik ve Kısıtlama Yönlerinin Dikliğine Dayalı Yöntem	63
4.4. Örnek: Düzlemsel Bir Paralel Manipülatörün Kinematik ve Dinamik Analizi.....	64
4.4.1. Sistemin Betimlenmesi	64
4.4.2. Kinematik Analiz	64
4.4.3. Newton-Euler Denklemleri	66
4.4.4. Sayısal Uygulama	68
4.5. Hareket Denkleminin Lagrange Yöntemiyle Elde Edilmesi	69
4.5.1. Skalar Lagrange Denklemleri	69
4.5.2. Kinetik Enerji.....	70
4.5.3. Genelleştirilmiş Momentumlar	71
4.5.4. Enerji Yitirme İşlevi	71
4.5.5. Potansiyel Enerji	72
4.5.6. Genelleştirilmiş Eyletim Kuvvetleri	73
4.5.7. Genelleştirilmiş Dış Etki Kuvvetleri.....	74
4.5.8. Hareket Denklemi	74
4.5.9. Örnek: Düzlemsel Bir Paralel Manipülatörün Hareket Denklemi	75
BÖLÜM 5. SERİ MANİPÜLATÖRLERİN DİNAMİK ANALİZİ.....	78
5.1. Kinematik İlişkiler.....	78
5.1.1. Denavit-Hartenberg (D-H) Yöntemi.....	78
5.1.2. Peşpeşe Gelen İki Uzuv Arasındaki Kinematik İlişkiler	79
5.1.3. Uzuvların Zemine Göre Duruşları (Yönelimleri ve Konumları)	80
5.1.4. Uzuvların Zemine Göre Dönme ve Ötelenme Hızları	81
5.1.5. Uzuvların Zemine Göre Dönme ve Ötelenme İvmeleri.....	82
5.2. Eyletimsel Dinamik Analiz	84
5.2.1. Yenilemeli Newton-Euler (Kuvvet-Moment) Denklemleri.....	84
5.2.2. Eyletim Torkları ve Kuvvetleri	87
5.3. Devinimsel Dinamik Analiz	87
5.3.1. Hareket Denklemi	87
5.3.2. Uzuv Ağırlıklarına İlişkin Dikeysıra Matrisinin Hesaplanması	88
5.3.3. Hıza Bağlı Ataletsel Terimlere İlişkin Dikeysıra Matrisinin Hesaplanması	89
5.3.4. Görev Kuvveti ve Momentine İlişkin Dikeysıra Matrisinin Hesaplanması.....	89

5.3.5. Kütle Matrisinin Hesaplanması.....	89
5.4. Sanal İş Yöntemiyle Dinamik Analiz.....	90
5.4.1. İşlem Aygıtının Duruşundaki Sanal Değişim	90
5.4.2. Görev Kuvveti ile Momentinin İşlem Aygıtı Üzerinde Yaptıkları Sanal İş	92
5.4.3. Manipülatörün Sanki-Statik Dengesi	94
5.5. Örnek: Stanford Manipülatörü.....	95
5.5.1. Manipülatörün Kinematik Betimlenmesi.....	95
5.5.2. İşlem Aygıtının Zemine Göre Duruşu	96
5.5.3. İşlem Aygıtının Zemine Göre Hızı	97
5.5.4. Manipülatörün Jacobi Matrisleri.....	98
5.5.5. Manipülatörün Sanki-Statik Denge Durumunda Kullanımı	99
BÖLÜM 6. MANİPÜLATÖRLERİN SERBEST KONUM KONTROLU	101
6.1. Bağımsız Eklem Kontrolcuları Yöntemi	101
6.2. Hesaplanan Tork Yöntemiyle Kontrol	104
6.2.1. Yöntemin Kısa Tanıtımı ve Tercih Edilebileceği Durumlar.....	104
6.2.2. Manipülatör ile Eyletim Sisteminin Bütünleştirilmesi	105
6.2.3. Hesaplanan Tork Yönteminin Uygulanışı	106
6.2.4. İvme Komutunun Belirlenmesi.....	107
BÖLÜM 7. MANİPÜLATÖRLERİN YÜZEY TEMASLI KONUM KONTROLU.....	110
7.1. Bir Yüzeyle Esnek Temaslı Konum Kontrolünün Esasları	110
7.2. Manipülatörler İçin Bir Yüzeyle Esnek Temaslı Konum Kontrolü	114
7.2.1. Bir Manipülatörün Bir Yüzeyle Temasını Betimleyen Kinematik İlişkiler.....	114
7.2.2. Yüzeyle Esnek Temas Sağlayan Kontrol İlişkileri	117
7.2.3. Örnekler	118
7.3. Konum Kısıtlamalı İşlemlerde Birlikte Hareket ve Kuvvet-Moment Kontrolü.....	118
7.3.1. Kısıtlamalı Dinamik Formülasyon ve Kısıtlama Kuvvet ve Momentleri.....	118
7.3.2. Birlikte Hareket ve Kuvvet-Moment Kontrolü.....	119
7.3.3. Örnek: Düzlemsel Bir Paralel Manipülatörün Hareket ve Kuvvet Kontrolü.....	123
EK A: KAYNAKLAR	126
EK B: KÜÇÜK SÖZLÜK.....	127

BÖLÜM 1

VEKTÖR İŞLEMLERİ VE TEMEL KİNEMATİK

1.1. Bir Noktanın Bir Eksen Takımına Göre Konumu



Şekil 1.1 Bir Noktanın Seçilen Bir Eksen Takımına Göre Konumu

Üç boyutlu uzayda gözlemlenen herhangi bir P noktasının konumu, geleneksel olarak, Şekil 1.1'de de görüldüğü gibi, uygunca seçilen bir \mathcal{F}_a eksen takımına göre ifade edilir. \mathcal{F}_a eksen takımının orijini, A ya da O_a ile gösterilen noktayla temsil edilir. \mathcal{F}_a eksen takımının yönelimi ile eksenleri ise, aşağıda gösterilen *temel vektör üçlüsü* ile belirlenir.

$$\mathcal{U}_a = \{\vec{u}_1^{(a)}, \vec{u}_2^{(a)}, \vec{u}_3^{(a)}\} \quad (1.1.1)$$

Genelde, \mathcal{F}_a , *ortonormal* ve *sağ el kuralına uyan* ya da kısaca *sağ elli* olan bir eksen takımı olarak seçilir. Bu özellikler aşağıda açıklanmıştır.

\mathcal{F}_a eksen takımının ortonormal olabilmesi için temel vektörlerinin birbirine dik birim vektörler olması gerekir. Bu özellik, aşağıdaki skalar çarpım denklemiyle ifade edilir.

$$\vec{u}_i^{(a)} \cdot \vec{u}_j^{(a)} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \text{ ise} \\ 0, & i \neq j \text{ ise} \end{cases} \quad (1.1.2)$$

\mathcal{F}_a eksen takımının sağ el kuralına uyabilmesi için de temel vektörlerinin aşağıdaki vektörel çarpım denklemlerini sağlaması gerekir.

$$\left. \begin{aligned} \vec{u}_1^{(a)} \times \vec{u}_2^{(a)} &= \vec{u}_3^{(a)} \\ \vec{u}_2^{(a)} \times \vec{u}_3^{(a)} &= \vec{u}_1^{(a)} \\ \vec{u}_3^{(a)} \times \vec{u}_1^{(a)} &= \vec{u}_2^{(a)} \end{aligned} \right\} \quad (1.1.3)$$

Gözlemlenen P noktasının konumu, \mathcal{F}_a eksen takımının orijinine göre \overline{AP} konum vektörüyle belirlenir. Bu vektör, aşağıdaki değişik biçimlerde gösterilebilir.

$$\vec{r} = \vec{r}_P = \vec{r}_{P/A} = \vec{r}_{AP} = \overline{AP} \quad (1.1.4)$$

(1.1.4) denklemdeki \vec{r} vektörü, \mathcal{F}_a eksen takımında şöyle çözüştürülür.

$$\vec{r} = \vec{u}_1^{(a)} r_1^{(a)} + \vec{u}_2^{(a)} r_2^{(a)} + \vec{u}_3^{(a)} r_3^{(a)} = \sum_{k=1}^3 \vec{u}_k^{(a)} r_k^{(a)} \quad (1.1.5)$$

(1.1.5) denklemindeki $r_k^{(a)}$, \vec{r} vektörünün \mathcal{F}_a eksen takımındaki k -yinci bileşeni ya da P noktasının \mathcal{F}_a eksen takımındaki k -yinci koordinatı olarak tanımlanır ve şu işlemle elde edilir.

$$r_k^{(a)} = \vec{r} \cdot \vec{u}_k^{(a)} \quad (1.1.6)$$

1.2. Bir Vektörün Bir Eksen Takımındaki Matris Gösterimi

Önceki kısımda olduğu gibi, herhangi bir \vec{r} vektörü, seçilen bir \mathcal{F}_a eksen takımında şöyle çözüştürülür.

$$\vec{r} = \vec{u}_1^{(a)} r_1^{(a)} + \vec{u}_2^{(a)} r_2^{(a)} + \vec{u}_3^{(a)} r_3^{(a)} \quad (1.2.1)$$

(1.2.1) denklemindeki bileşenler, $k = 1, 2, 3$ için şöyle tanımlanmıştır.

$$r_k^{(a)} = \vec{r} \cdot \vec{u}_k^{(a)} \quad (1.2.2)$$

Söz konusu bileşenler kullanılarak aşağıdaki biçimde gösterilen bir *dikeysıra matrisi* oluşturulabilir.

$$\vec{r}^{(a)} = \begin{bmatrix} r_1^{(a)} \\ r_2^{(a)} \\ r_3^{(a)} \end{bmatrix} \quad (1.2.3)$$

Yukarıda oluşturulan $\vec{r}^{(a)}$ dikeysıra matrisi, \vec{r} vektörünün \mathcal{F}_a eksen takımındaki *matris gösterimi* olarak tanımlanır. Bu dikeysıra matrisi için aşağıdaki gösterim biçimleri de kullanılabilir.

$$\vec{r}^{(a)} = [\vec{r}]^{(a)} = [\vec{r}]|_{\mathcal{F}_a} \quad (1.2.4)$$

Eğer ilgilenilen tüm vektörler için aynı eksen takımı (örneğin \mathcal{F}_a) kullanılıyorsa, gösterim kolaylığı olsun diye, (a) üstyazıtı gizlenebilir ve aşağıdaki basitleştirilmiş gösterimler kullanılabilir.

$$\vec{u}_k^{(a)} \rightarrow \vec{u}_k, r_k^{(a)} \rightarrow r_k, \vec{r}^{(a)} \rightarrow \vec{r}$$

1.3. Vektör İşlemleri ile Matris İşlemleri Arasındaki İlişkiler

Bu kısımda göz önüne alınan tüm vektörlerin matris gösterimlerinin aynı \mathcal{F}_a eksen takımında oluşturulduğu varsayılmıştır. Dolayısıyla, önceki kısımda bahsedilen üstyazıtı basitleştirilmiş gösterim kullanılmıştır.

a) Nokta Çarpım ya da Skalar Çarpım:

\vec{p} ve \vec{q} gibi iki vektörün nokta çarpımı, \mathcal{F}_a eksen takımındaki bileşenleri cinsinden şöyle ifade edilir.

$$s = \vec{p} \cdot \vec{q} = p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3 \quad (1.3.1)$$

Aynı işlem, ilgili vektörlerin \mathcal{F}_a eksen takımındaki matris gösterimleriyle bir *iç çarpım* olarak şöyle de ifade edilebilir.

$$s = [p_1 \quad p_2 \quad p_3] \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \vec{p}^t \vec{q} \quad (1.3.2)$$

Nokta çarpım işleminde çarpanların yeri değiştirilebildiği için aynı sonuç aşağıdaki dört değişik biçimde ifade edilebilir.

$$s = \vec{p} \cdot \vec{q} = \vec{q} \cdot \vec{p} = \vec{p}^t \vec{q} = \vec{q}^t \vec{p} \quad (1.3.3)$$

Bu arada, $\vec{p}^t = [p_1 \ p_2 \ p_3]$ ve $\vec{q}^t = [q_1 \ q_2 \ q_3]$, \vec{p} ve \vec{q} vektörlerinin \mathcal{F}_a eksen takımındaki yataysıra matris gösterimleri olarak adlandırılır.

b) Çapraz Çarpım ya da Vektörel Çarpım:

\vec{p} ve \vec{q} gibi iki vektörün çapraz çarpımı, yeni bir \vec{r} vektörü verir. Şöyle ki,

$$\vec{r} = \vec{p} \times \vec{q} \quad (1.3.4)$$

İlgili vektörlerin \mathcal{F}_a eksen takımındaki bileşenleri kullanılarak (1.3.4) vektör denkleminin karşılığı olarak aşağıdaki matris denklemi yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_2 q_3 - p_3 q_2 \\ p_3 q_1 - p_1 q_3 \\ p_1 q_2 - p_2 q_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -p_3 & p_2 \\ p_3 & 0 & -p_1 \\ -p_2 & p_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \quad (1.3.5)$$

(1.3.5) denklemi, derleşik olarak kısaca şöyle de yazılabilir.

$$\vec{r} = \tilde{p} \vec{q} \quad (1.3.6)$$

Yukarıda kullanılan \tilde{p} (*p-tilde*) simgesi, \vec{p} dikeysıra matrisinden türetilen *antisimetrik* kare matrisi göstermektedir. Bu matris, "çapraz çarpım matrisi" olarak da adlandırılır ve aşağıda gösterilen biçimde "asm" (antisimetrik matris) işleci kullanılarak oluşturulur.

$$\vec{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \tilde{p} = \text{asm}(\vec{p}) = \begin{bmatrix} 0 & -p_3 & p_2 \\ p_3 & 0 & -p_1 \\ -p_2 & p_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.3.7)$$

Yukarıdaki "asm" işlecinin tersi olan "dsm" (dikeysıra matrisi) işleci ise şöyle tanımlanır.

$$\vec{p} = \text{dsm}(\tilde{p}) = \text{asm}^{-1}(\tilde{p}) \quad (1.3.8)$$

c) Çapraz Çarpım Matrislerinin Bazı Özellikleri

Çapraz çarpım matrislerinin bazı önde gelen özellikleri aşağıda gösterilmiştir.

$$\det(\tilde{p}) = 0 \quad (1.3.9)$$

$$\tilde{p} \vec{p} = \vec{0}, \quad \vec{p}^t \tilde{p} = \vec{0}^t \quad (1.3.10)$$

$$\tilde{p} \vec{q} = \vec{q} \vec{p}^t - (\vec{q}^t \vec{p}) \hat{I} \quad (1.3.11)$$

$$\tilde{p}^2 = \vec{p} \vec{p}^t - (\vec{p}^t \vec{p}) \hat{I} \quad (1.3.12)$$

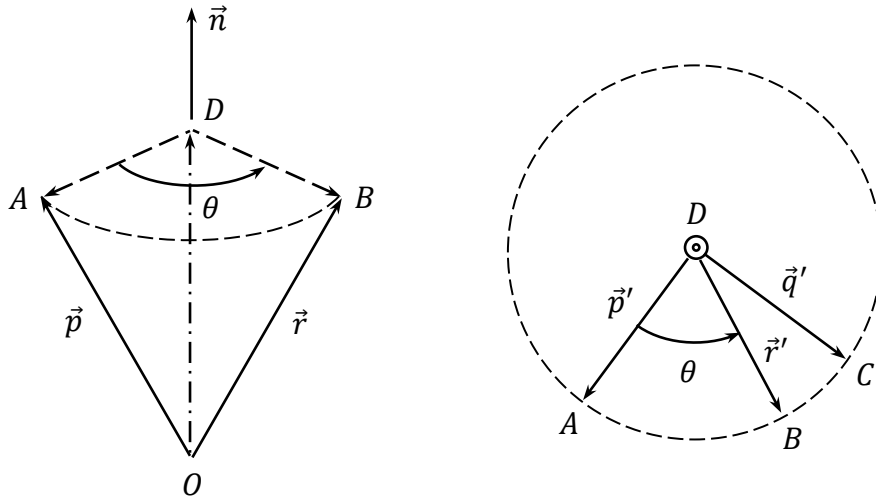
$$\text{asm}(\tilde{p} \vec{q}) = \tilde{p} \vec{q} - \vec{q} \tilde{p} = \vec{q} \vec{p}^t - \vec{p} \vec{q}^t \quad (1.3.13)$$

$$\text{asm}(\hat{R} \vec{p}) = \hat{R} \tilde{p} \hat{R}^t \quad (1.3.14)$$

Yukarıdaki denklemlerde, \hat{I} birim matristir. \hat{R} ise, $\det(\hat{R}) = 1$ olan ortonormal bir matristir. Bu matrisi ortonormal yapan özellik, $\hat{R}^{-1} = \hat{R}^t$ olmasıdır.

1.4. Bir Vektörün Bir Eksen Etrafında Dönmesi

1.4.1. Rodrigues Formülü ve Dönme Matrisi



Şekil 1.2 Bir Vektörün Bir Eksen Etrafında Dönmesi

Şekil 1.2'de bir \vec{p} vektörünün bir \vec{r} vektörüne dönmesi görülmektedir. Dönme açısı θ ile, dönme eksenini temsil eden birim vektör ise \vec{n} ile gösterilmiştir. \vec{p} vektörü, \vec{r} vektörüne dönerken konik bir yüzey üzerinde hareket eder. Bu dönmenin söz konusu koninin tabanındaki izdüşüm görüntüsü, Şekil 1.2'nin sağında gösterilmiştir. Bu dönmenin sonucu olan \vec{r} vektörü, Şekil 1.2 göz önüne alınarak aşağıda yazılan denklem dizisi sonunda ortaya çıkar.

$$\vec{p} = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DA} = \vec{s} + \vec{p}' \Rightarrow$$

$$\vec{p}' = \vec{p} - \vec{s} \quad (1.4.1)$$

$$\vec{r} = \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DB} = \vec{s} + \vec{r}' \Rightarrow$$

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{s} \quad (1.4.2)$$

$$\vec{s} = (\vec{p} \cdot \vec{n})\vec{n} = \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{p}) \quad (1.4.3)$$

$$\vec{q}' = \overrightarrow{DC} = \vec{n} \times \overrightarrow{DA} = \vec{n} \times \vec{p}' \Rightarrow$$

$$\vec{q}' = \vec{n} \times (\vec{p} - \vec{s}) = \vec{n} \times [\vec{p} - (\vec{p} \cdot \vec{n})\vec{n}] = \vec{n} \times \vec{p} - (\vec{p} \cdot \vec{n})(\vec{n} \times \vec{n}) \Rightarrow$$

$$\vec{q}' = \vec{n} \times \vec{p} \quad (1.4.4)$$

Şekil 1.2'nin sağındaki görüntüye göre, $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} \cos \theta + \overrightarrow{DC} \sin \theta$. Yani,

$$\vec{r}' = \vec{p}' \cos \theta + \vec{q}' \sin \theta \quad (1.4.5)$$

(1.4.5) denklemi, (1.4.1) – (1.4.4) denklemleriyle birlikte aşağıdaki denklemlere yol açar.

$$\vec{r} - \vec{s} = (\vec{p} - \vec{s}) \cos \theta + (\vec{n} \times \vec{p}) \sin \theta \Rightarrow$$

$$\vec{r} = \vec{p} \cos \theta + (\vec{n} \times \vec{p}) \sin \theta + \vec{s}(1 - \cos \theta) \Rightarrow$$

$$\vec{r} = \vec{p} \cos \theta + (\vec{n} \times \vec{p}) \sin \theta + \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{p})(1 - \cos \theta) \quad (1.4.6)$$

(1.4.6) denklemi, dönme sonucunda ortaya çıkan \vec{r} vektörünü vermektedir. Bu denklem, "Rodrigues formülü" olarak da bilinir. Rodrigues formülü, seçilen bir \mathcal{F}_a eksen takımında, $\vec{r} = \vec{r}^{(a)}$ ve benzeri kısaltmalar kullanılarak aşağıdaki matris denklemi biçiminde de yazılabilir.

$$\vec{r} = \bar{p} \cos \theta + (\tilde{n}\bar{p}) \sin \theta + \bar{n}(\bar{n}^t\bar{p})(1 - \cos \theta) \quad (1.4.7)$$

(1.4.7) denklemi, \bar{p} bir çarpan olarak ayrılıp şöyle de yazılabilir.

$$\vec{r} = \hat{R}\bar{p} \quad (1.4.8)$$

(1.4.8) denklemdeki \hat{R} matrisi, "dönme matrisi" olarak şöyle tanımlanır.

$$\hat{R} = \hat{R}(\bar{n}, \theta) = \hat{I} \cos \theta + \tilde{n} \sin \theta + \bar{n}\bar{n}^t(1 - \cos \theta) \quad (1.4.9)$$

Bu arada, \bar{n} bir birim vektör olduğu için, yani $\bar{n}^t\bar{n} = 1$ olduğu için, (1.3.11) denklemi, şu şekli alır.

$$\tilde{n}^2 = \bar{n}\bar{n}^t - \hat{I} \quad (1.4.10)$$

Böylece, \hat{R} matrisi şöyle de ifade edilebilir.

$$\hat{R} = \hat{R}(\tilde{n}, \theta) = \hat{I} + \tilde{n} \sin \theta + \tilde{n}^2(1 - \cos \theta) \quad (1.4.11)$$

\hat{R} matrisi için Taylor serisi açılımlarından yararlanarak çok daha derleşik bir ifade elde edilebilir. Bu amaçla, (1.4.11) denklemi, $\sin \theta$ ve $\cos \theta$ işlevlerinin Taylor serisi açılımları kullanılarak şöyle yazılabilir.

$$\begin{aligned} \hat{R} = \hat{I} + \tilde{n} \left(\theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 - \frac{1}{7!}\theta^7 + \dots \right) \\ + \tilde{n}^2 \left(\frac{1}{2!}\theta^2 - \frac{1}{4!}\theta^4 + \frac{1}{6!}\theta^6 - \frac{1}{8!}\theta^8 + \dots \right) \end{aligned} \quad (1.4.12)$$

Öte yandan, (1.3.9) ve (1.4.10) denklemlerine göre, \tilde{n} matrisinin çeşitli dereceden kuvvetleri yalnızca \tilde{n} ya da \tilde{n}^2 cinsinden ifade edilebilir. Şöyle ki,

$$\tilde{n}^3 = -\tilde{n}, \quad \tilde{n}^4 = -\tilde{n}^2, \quad \tilde{n}^5 = \tilde{n}, \quad \tilde{n}^6 = \tilde{n}^2, \quad \tilde{n}^7 = -\tilde{n}. \quad (1.4.13)$$

(1.4.12) ve (1.4.13) denklemleri birleştirilince, \hat{R} için aşağıdaki Taylor serisi açılımı ortaya çıkar.

$$\hat{R} = \hat{I} + \tilde{n}\theta + \frac{1}{2!}(\tilde{n}\theta)^2 + \frac{1}{3!}(\tilde{n}\theta)^3 + \frac{1}{4!}(\tilde{n}\theta)^4 + \dots \quad (1.4.14)$$

Dikkat edilirse, (1.4.14) denklemdeki açılım, üstel işlevin Taylor serisi açılımıyla aynıdır. Böylece, \hat{R} için aşağıdaki son derece derleşik ifade elde edilmiş olur.

$$\hat{R} = \hat{R}(\tilde{n}, \theta) = e^{\tilde{n}\theta} \quad (1.4.15)$$

Yukarıdaki ifade yalnızca derleşik olmayıp aynı zamanda dönme eksenini ile dönme açısını da açık olarak göstermesi nedeniyle oldukça kullanışlıdır. Bu biçimde ifade edildiğinde, \hat{R} için kısaca "üstel dönme matrisi" deyiimi kullanılabilir.

1.4.2. Temel Dikeysıra Matrisleri ve Temel Dönme Matrisleri

Temel dikeysıra matrisleri, bir üçlü grup oluşturmak üzere şöyle tanımlanırlar.

$$\bar{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.4.16)$$

Temel dikeysıra matrisleri, üç boyutlu dikeysıra matris uzayının temelini oluştururlar. Öyle ki, \bar{c} gibi herhangi bir dikeysıra matrisi, üç temel dikeysıra matrisinin doğrusal bileşimi olarak aşağıda gösterilen biçimde ifade edilebilir.

$$\bar{c} = c_1 \bar{u}_1 + c_2 \bar{u}_2 + c_3 \bar{u}_3 = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \quad (1.4.17)$$

Temel dikeysıra matrisleri, aynı zamanda, \mathcal{F}_a gibi bir eksen takımının temel birim vektörlerinin yine \mathcal{F}_a içinde ifade edilen matris gösterimleridir. Şöyle ki, $k = 1, 2, 3$ için,

$$\bar{u}_k = \bar{u}_k^{(a/a)} = [\bar{u}_k^{(a)}]^{(a)} = [\bar{u}_k^{(a)}] \Big|_{\mathcal{F}_a} \quad (1.4.18)$$

Eğer dönme işlemi, seçilen bir \mathcal{F}_a eksen takımının koordinat eksenlerinden biri, örneğin $\bar{u}_k^{(a)}$ doğrultusundaki eksen etrafında yapılıyorsa, dönme eksenini birim vektörü, $\vec{n} = \bar{u}_k^{(a)}$ olur. Bu durumda, \vec{n} vektörünün \mathcal{F}_a eksen takımındaki matris gösterimi, aşağıda görüldüğü gibi, k -yinci temel dikeysıra matrisi olur.

$$\bar{n} = \bar{n}^{(a)} = \bar{u}_k^{(a/a)} = \bar{u}_k \quad (1.4.19)$$

Bu eksen etrafında belli bir θ açısıyla dönmeyi sağlayan matris ise, k -yinci "temel dönme matrisi" olarak aşağıdaki denklemle tanımlanır.

$$\hat{R}_k = \hat{R}_k(\theta) = \hat{R}(\bar{u}_k, \theta) = e^{\bar{u}_k \theta} \quad (1.4.20)$$

Üç temel dönme matrisinin (1.4.9) denklemi kullanılarak elde edilen ayrıntılı ifadeleri aşağıda gösterilmiştir.

$$\hat{R}_1(\phi) = e^{\bar{u}_1 \phi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \quad (1.4.21)$$

$$\hat{R}_2(\theta) = e^{\bar{u}_2 \theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (1.4.22)$$

$$\hat{R}_3(\psi) = e^{\bar{u}_3 \psi} = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.4.23)$$

1.4.3. Dönme Matrislerinin Bazı Özellikleri

Dönme matrislerinin bazı önde gelen özelliklerini yansıtan formüller aşağıda gösterilmiştir.

$$\det(e^{\bar{n}\theta}) = 1 \quad (1.4.24)$$

$$(e^{\bar{n}\theta})^{-1} = (e^{\bar{n}\theta})^t = e^{-\bar{n}\theta} = e^{\bar{n}(-\theta)} = e^{(-\bar{n})\theta} \quad (1.4.25)$$

$$e^{\bar{n}\theta} \bar{n} = \bar{n}, \quad \bar{n}^t e^{\bar{n}\theta} = \bar{n}^t \quad (\text{dönme eksenini üzerinde işlevsizlik formülü}) \quad (1.4.26)$$

$$e^{\bar{n}\theta} \bar{n} = \bar{n} e^{\bar{n}\theta} \neq \bar{n} \quad (1.4.27)$$

$$e^{\bar{n}\theta} e^{\bar{n}\phi} = e^{\bar{n}\phi} e^{\bar{n}\theta} = e^{\bar{n}(\theta+\phi)} \quad (\text{paralel eksen formülü}) \quad (1.4.28)$$

$$e^{\bar{n}\theta} e^{\bar{m}\phi} \neq e^{\bar{m}\phi} e^{\bar{n}\theta} \neq e^{(\bar{n}\theta + \bar{m}\phi)} \quad (\bar{m} \neq \bar{n} \text{ ise}) \quad (1.4.29)$$

$$\partial(e^{\bar{n}\theta})/\partial\theta = e^{\bar{n}\theta} \bar{n} = \bar{n} e^{\bar{n}\theta} \quad (\text{dönme açısına göre türev formülü}) \quad (1.4.30)$$

Temel dönme ve temel dikeysıra matrisleri ise, aşağıdaki özellikleri paylaşırlar.

$$e^{\tilde{u}_k\theta}\bar{u}_k = \bar{u}_k, \bar{u}_k^t e^{\tilde{u}_k\theta} = \bar{u}_k^t \quad (1.4.31)$$

$$e^{\tilde{u}_i\theta}\bar{u}_j = \bar{u}_j \cos \theta + \sigma_{ijk}\bar{u}_k \sin \theta \quad (\text{açılım formülü}) \quad (1.4.32)$$

$$\bar{u}_i^t e^{\tilde{u}_j\theta} = \bar{u}_i^t \cos \theta + \sigma_{ijk}\bar{u}_k^t \sin \theta \quad (\text{açılım formülü}) \quad (1.4.33)$$

$$e^{\tilde{u}_i\pi/2}e^{\tilde{u}_j\theta} = e^{\sigma_{ijk}\tilde{u}_k\theta}e^{\tilde{u}_i\pi/2} \quad (i \neq j \text{ için kaydırma formülü}) \quad (1.4.34)$$

$$e^{\tilde{u}_i\pi}e^{\tilde{u}_j\theta} = e^{-\tilde{u}_j\theta}e^{\tilde{u}_i\pi} \quad (i \neq j \text{ için kaydırma formülü}) \quad (1.4.35)$$

$$e^{\tilde{u}_k\pi/2}e^{\tilde{u}_k\theta} = e^{\tilde{u}_k\theta}e^{\tilde{u}_k\pi/2} = e^{\tilde{u}_k(\theta+\pi/2)} \quad (1.4.36)$$

$$e^{\tilde{u}_k\pi}e^{\tilde{u}_k\theta} = e^{\tilde{u}_k\theta}e^{\tilde{u}_k\pi} = e^{\tilde{u}_k(\theta+\pi)} \quad (1.4.37)$$

(1.4.32), (1.4.33), (1.4.34) denklemlerinde yer alan σ_{ijk} işaret simgesi, $i \neq j \neq k$ için şöyle tanımlanmıştır.

$$\sigma_{ijk} = \begin{cases} +1, & ijk = 123, 231, 312 \text{ ise} \\ -1, & ijk = 321, 132, 213 \text{ ise} \end{cases} \quad (1.4.38)$$

1.4.4. Örnek: İki aşamalı dönme işlemi

Bu örnek, \mathcal{F}_a gibi bir eksen takımında gözlemlenen bir dönme işlemi hakkındadır. İki aşamalı bu dönme işlemi, şematik olarak aşağıda gösterilmiştir.

$$\vec{p} = b\vec{u}_1^{(a)} \xrightarrow{\text{dönme}[\vec{u}_2^{(a)}, \theta]} \vec{q} \xrightarrow{\text{dönme}[\vec{u}_3^{(a)}, \psi]} \vec{r} \quad (1.4.39)$$

Bu işlem sonucunda ortaya çıkan vektörleri belirlemek amacıyla, ilgili vektörlerin \mathcal{F}_a eksen takımındaki üstyazıtsız matris gösterimleri kullanılarak dönme işleminin iki aşaması için aşağıdaki denklemler yazılabilir.

$$\vec{q} = \hat{R}_2(\theta)\vec{p} = e^{\tilde{u}_2\theta}(b\vec{u}_1) = be^{\tilde{u}_2\theta}\vec{u}_1 \quad (1.4.40)$$

$$\vec{r} = \hat{R}_3(\psi)\vec{q} = e^{\tilde{u}_3\psi}(be^{\tilde{u}_2\theta}\vec{u}_1) = be^{\tilde{u}_3\psi}e^{\tilde{u}_2\theta}\vec{u}_1 \quad (1.4.41)$$

Kısım 1.4.3'teki açılım formülleri kullanılarak (1.4.40) ve (1.4.41) denklemleri üzerinde aşağıdaki işlemler yapılabilir.

$$\vec{q} = be^{\tilde{u}_2\theta}\vec{u}_1 = b(\vec{u}_1 \cos \theta - \vec{u}_3 \sin \theta) = \vec{u}_1(b \cos \theta) - \vec{u}_3(b \sin \theta) \quad (1.4.42)$$

$$\vec{r} = be^{\tilde{u}_3\psi}(\vec{u}_1 \cos \theta - \vec{u}_3 \sin \theta) = b[(e^{\tilde{u}_3\psi}\vec{u}_1) \cos \theta - (e^{\tilde{u}_3\psi}\vec{u}_3) \sin \theta] \Rightarrow$$

$$\vec{r} = b[(\vec{u}_1 \cos \psi + \vec{u}_2 \sin \psi) \cos \theta - \vec{u}_3 \sin \theta] \Rightarrow$$

$$\vec{r} = \vec{u}_1(b \cos \psi \cos \theta) + \vec{u}_2(b \sin \psi \cos \theta) - \vec{u}_3(b \sin \theta) \quad (1.4.43)$$

(1.4.42) ve (1.4.43) matris denklemlerinde, $\vec{q} = \vec{q}^{(a)}$, $\vec{r} = \vec{r}^{(a)}$, ve $k = 1, 2, 3$ için $\bar{u}_k = \bar{u}_k^{(a/a)}$ olduğu göz önüne alınarak söz konusu denklemlerin vektör karşılıkları şöyle yazılabilir.

$$\vec{q} = \vec{u}_1^{(a)}(b \cos \theta) - \vec{u}_3^{(a)}(b \sin \theta) \quad (1.4.44)$$

$$\vec{r} = \vec{u}_1^{(a)}(b \cos \psi \cos \theta) + \vec{u}_2^{(a)}(b \sin \psi \cos \theta) - \vec{u}_3^{(a)}(b \sin \theta) \quad (1.4.45)$$

1.5. Bir Vektörün Değişik Eksen Takımlarındaki Matris Gösterimleri

Herhangi bir \vec{r} vektörü, \mathcal{F}_a ve \mathcal{F}_b gibi iki farklı eksen takımında çözüştürülebilir. Şöyle ki,

$$\vec{r} = \vec{u}_1^{(a)} r_1^{(a)} + \vec{u}_2^{(a)} r_2^{(a)} + \vec{u}_3^{(a)} r_3^{(a)} = \vec{u}_1^{(b)} r_1^{(b)} + \vec{u}_2^{(b)} r_2^{(b)} + \vec{u}_3^{(b)} r_3^{(b)} \quad (1.5.1)$$

(1.5.1) denklemindeki bileşenler, şöyle tanımlanmıştır.

$$r_k^{(a)} = \vec{r} \cdot \vec{u}_k^{(a)}, \quad r_k^{(b)} = \vec{r} \cdot \vec{u}_k^{(b)} \quad (1.5.2)$$

Söz konusu bileşenler kullanılarak aşağıdaki biçimlerde gösterilebilen dikeysıra matrisleri oluşturulabilir.

$$\bar{r}^{(a)} = [\vec{r}]^{(a)} = [\vec{r}]|_{\mathcal{F}_a} = \begin{bmatrix} r_1^{(a)} \\ r_2^{(a)} \\ r_3^{(a)} \end{bmatrix} \quad (1.5.3)$$

$$\bar{r}^{(b)} = [\vec{r}]^{(b)} = [\vec{r}]|_{\mathcal{F}_b} = \begin{bmatrix} r_1^{(b)} \\ r_2^{(b)} \\ r_3^{(b)} \end{bmatrix} \quad (1.5.4)$$

Yukarıdaki $\bar{r}^{(a)}$ ve $\bar{r}^{(b)}$ dikeysıra matrisleri, aynı \vec{r} vektörünün \mathcal{F}_a ve \mathcal{F}_b eksen takımlarındaki matris gösterimleri olarak adlandırılırlar. Eğer \mathcal{F}_a ve \mathcal{F}_b çakışık ya da eş yönlü paralel değillerse, $\bar{r}^{(a)}$ ve $\bar{r}^{(b)}$, iki farklı matris olarak ortaya çıkar. Yani, genelde,

$$\bar{r}^{(a)} \neq \bar{r}^{(b)} \quad (1.5.5)$$

Bununla birlikte, $\bar{r}^{(a)}$ ve $\bar{r}^{(b)}$ arasında aynı \vec{r} vektörünü temsil ettikleri için bir ilinti vardır. Bu ilinti, şöyle ifade edilebilir.

$$\bar{r}^{(a)} = \hat{C}^{(a,b)} \bar{r}^{(b)} \quad (1.5.6)$$

(1.5.6) denkleminde görülen $\hat{C}^{(a,b)}$, "bileşen dönüşüm matrisi", ya da kısaca, "dönüşüm matrisi" olarak adlandırılır. Aynı denkleme göre, $\hat{C}^{(a,b)}$ matrisi, \vec{r} vektörünün \mathcal{F}_b eksen takımındaki bileşenlerini \mathcal{F}_a eksen takımındaki bileşenlerine dönüştürmektedir.

Öte yandan, (1.5.6) denklemini şöyle de yazılabilir.

$$\bar{r}^{(b)} = \hat{C}^{(b,a)} \bar{r}^{(a)} \Rightarrow \bar{r}^{(a)} = [\hat{C}^{(b,a)}]^{-1} \bar{r}^{(b)} \quad (1.5.7)$$

(1.5.6) ve (1.5.7) denklemleri karşılaştırılınca, şu sonuca varılır.

$$[\hat{C}^{(b,a)}]^{-1} = \hat{C}^{(a,b)} \quad (1.5.8)$$

Dönüşüm matrisinin bir diğer önemli özelliği de aşağıda gösterilmiştir.

Normal olarak, belli bir kinematik inceleme sürecinde göz önüne alınan eksen takımlarının tümünün eksenlerinde aynı ölçek kullanılır. Böyle bir durumda, gözlemlenen \vec{r} vektörünün büyüklüğü tüm eksen takımlarında aynı görünür. Bu olgu, \vec{r} vektörünün \mathcal{F}_a ve \mathcal{F}_b eksen takımlarındaki matris gösterimleri için şöyle ifade edilir.

$$r^2 = |\vec{r}|^2 = \vec{r} \cdot \vec{r} = \bar{r}^{(a)t} \bar{r}^{(a)} = \bar{r}^{(b)t} \bar{r}^{(b)} \quad (1.5.9)$$

(1.5.9) denklemi, (1.5.6) denklemi kullanılarak şöyle yazılabilir.

$$[\hat{C}^{(a,b)}\bar{r}^{(b)}]^t[\hat{C}^{(a,b)}\bar{r}^{(b)}] = \bar{r}^{(b)t}[\hat{C}^{(a,b)t}\hat{C}^{(a,b)}]\bar{r}^{(b)} = \bar{r}^{(b)t}\bar{r}^{(b)} \quad (1.5.10)$$

(1.5.10) denkleminde şu sonuç çıkar.

$$\hat{C}^{(a,b)t}\hat{C}^{(a,b)} = \hat{I} \Rightarrow \hat{C}^{(a,b)t} = [\hat{C}^{(a,b)}]^{-1} \quad (1.5.11)$$

(1.5.11) ve (1.5.8) denklemlerinden çıkan sonuç ise aşağıdaki özelliştir.

$$\hat{C}^{(b,a)} = [\hat{C}^{(a,b)}]^{-1} = \hat{C}^{(a,b)t} \quad (1.5.12)$$

1.6. Dönüşüm Matrisi İfadeleri

1.6.1. Dönüşüm Matrisinin Temel Birim Vektörler Cinsinden İfade Edilmesi

\mathcal{F}_b eksen takımının temel birim vektörleri, $k = 1, 2, 3$ için, \mathcal{F}_a eksen takımında aşağıdaki dikeysıra matrisleri biçiminde gösterilebilir.

$$\bar{u}_k^{(b/a)} = [\bar{u}_k^{(b)}]^{(a)} = \hat{C}^{(a,b)}[\bar{u}_k^{(b)}]^{(b)} = \hat{C}^{(a,b)}\bar{u}_k^{(b/b)} = \hat{C}^{(a,b)}\bar{u}_k \quad (1.6.1)$$

(1.6.1) denklemindeki \bar{u}_k artçarpanı, çarpılan matrisin k -yinci dikeysirasını seçer. Buna göre, $\bar{u}_k^{(b/a)}$ dikeysıra matrisi, $\hat{C}^{(a,b)}$ kare matrisinin k -yinci dikeysirası olmaktadır. Dolayısıyla, $\hat{C}^{(a,b)}$ matrisi, aşağıdaki ayrıntıyla ifade edilebilir.

$$\hat{C}^{(a,b)} = [\bar{u}_1^{(b/a)} \quad \bar{u}_2^{(b/a)} \quad \bar{u}_3^{(b/a)}] \quad (1.6.2)$$

Öte yandan, (1.6.1) denkleminde, a ve b indislerinin yeri değiştirilerek ve (1.5.12) denklemi kullanılarak şu ilişkiler elde edilir.

$$\bar{u}_k^{(a/b)} = \hat{C}^{(b,a)}\bar{u}_k \Rightarrow \bar{u}_k^{(a/b)t} = \bar{u}_k^t\hat{C}^{(b,a)t} = \bar{u}_k^t\hat{C}^{(a,b)} \quad (1.6.3)$$

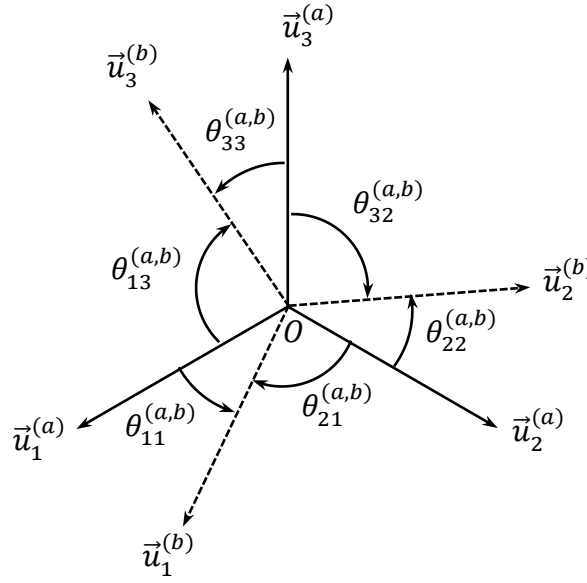
(1.6.3) denklemindeki \bar{u}_k^t önçarpanı ise, çarpılan matrisin k -yinci yataysirasını seçer. Buna göre, (1.6.3) denkleminde şu sonuç çıkar.

$$\hat{C}^{(a,b)} = \begin{bmatrix} \bar{u}_1^{(a/b)t} \\ \bar{u}_2^{(a/b)t} \\ \bar{u}_3^{(a/b)t} \end{bmatrix} \quad (1.6.4)$$

Not-1: (1.6.4) denklemindeki yataysıra matrislerinin üstyazıtlarıyla (1.6.2) denklemindeki dikeysıra matrislerinin üstyazıtları arasındaki fark, gözden kaçırılmaması gereken bir husustur.

Not-2: (1.5.12) ile (1.6.2) ve (1.6.4) denklemlerine göre, $\hat{C}^{(a,b)}$ matrisi, ortonormal bir matristir. Yani, tersi devriğine (transpozuna) eşittir. Ayrıca, bu matrisin dikey sıraları, birbirine dik olan birim vektörleri temsil eder. Yatay sıraları için de aynı özellik geçerlidir. Bu özellik nedeniyle, $\hat{C}^{(a,b)}$ matrisinin dokuz elemanı arasında *altı adet ortonormalite ilişkisi* bulunur. Dolayısıyla, $\hat{C}^{(a,b)}$ matrisini ifade edebilmek için yalnızca *üç adet bağımsız parametre* gerekli ve yeterlidir.

1.6.2. Dönüşüm Matrisinin Yönelim Kosinüsleri Cinsinden İfade Edilmesi



Şekil 1.3 İki Eksen Takımı Arasındaki Yönelim Açıları

\mathcal{F}_b ve \mathcal{F}_a eksen takımlarının temel birim vektörleri arasındaki açılar, "yönelim açıları" olarak tanımlanırlar. Altısı Şekil 1.3'te gösterilen bu dokuz açıdan her biri, \mathcal{F}_b eksen takımının \mathcal{F}_a eksen takımına göre yönelimini ifade etmek üzere şöyle ifade edilebilir.

$$\theta_{ij}^{(a,b)} = \sphericalangle[\vec{u}_i^{(a)} \rightarrow \vec{u}_j^{(b)}] \quad (1.6.5)$$

Yönelim açılarının kosinüsleri ise, "yönelim kosinüsleri" olarak tanımlanıp aşağıdaki gibi gösterilirler.

$$c_{ij}^{(a,b)} = \cos \theta_{ij}^{(a,b)} \quad (1.6.6)$$

Yönelim kosinüslerinden $c_{ij}^{(a,b)}$, $\vec{u}_i^{(a)}$ ile $\vec{u}_j^{(b)}$ birim vektörleri cinsinden şöyle ifade edilebilir.

$$c_{ij}^{(a,b)} = \vec{u}_i^{(a)} \cdot \vec{u}_j^{(b)} \quad (1.6.7)$$

(1.6.7) denklemi, ilgili vektörlerin \mathcal{F}_a eksen takımındaki matris gösterimleri kullanılarak şöyle de yazılabilir.

$$c_{ij}^{(a,b)} = \bar{u}_i^{(a/a)t} \bar{u}_j^{(b/a)} = \bar{u}_i^t \bar{u}_j^{(b/a)} \quad (1.6.8)$$

(1.6.8) denklemi ise, (1.6.1) denklemi sayesinde şöyle yazılabilir.

$$c_{ij}^{(a,b)} = \bar{u}_i^t \hat{C}^{(a,b)} \bar{u}_j \quad (1.6.9)$$

(1.6.9) denkleminde, \bar{u}_i^t ile \bar{u}_j çarpanları, $\hat{C}^{(a,b)}$ matrisinin i -yinci yataysırası ile j -yinci dikeysırasındaki elemanı seçerler. Dolayısıyla, $\hat{C}^{(a,b)}$ matrisi, yönelim kosinüsleri cinsinden aşağıda gösterilen ayrıntıyla ifade edilebilir.

$$\hat{C}^{(a,b)} = \begin{bmatrix} c_{11}^{(a,b)} & c_{12}^{(a,b)} & c_{13}^{(a,b)} \\ c_{21}^{(a,b)} & c_{22}^{(a,b)} & c_{23}^{(a,b)} \\ c_{31}^{(a,b)} & c_{32}^{(a,b)} & c_{33}^{(a,b)} \end{bmatrix} \quad (1.6.10)$$

Daha önce de belirtildiği gibi, $\hat{C}^{(a,b)}$ matrisi, ortonormal olduğu için yalnızca üç adet bağımsız parametre cinsinden ifade edilebilir. Yönelim açıları söz konusu olunca, bu üç bağımsız parametre, genellikle, "birincil yönelim açıları" diye adlandırılan $\theta_{11}^{(a,b)}$, $\theta_{22}^{(a,b)}$, $\theta_{33}^{(a,b)}$ açıları olarak seçilir. Diğer yönelim açıları ise, "ikincil yönelim açıları" diye adlandırılır.

1.6.3. Dönüşüm Matrisinin Dönme Matrisi Olarak İfade Edilmesi

\mathcal{F}_b eksen takımı, \mathcal{F}_a eksen takımının aynı orijine ötelenmesi ve daha sonra belli bir eksen etrafında döndürülmesiyle elde edilebilir. Bu durum, şematik olarak aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$\mathcal{F}_a \xrightarrow{\text{dönme}[\vec{n},\theta]} \mathcal{F}_b \quad (1.6.11)$$

Doğal olarak iki eksen takımının temel vektörleri de, $k = 1, 2, 3$ için, aşağıda gösterildiği gibi aynı dönme ilişkisi içinde olurlar.

$$\vec{u}_k^{(a)} \xrightarrow{\text{dönme}[\vec{n},\theta]} \vec{u}_k^{(b)} \quad (1.6.12)$$

Yukarıdaki şematik gösterimi ifade etmek üzere, dönme işleminin \mathcal{F}_a eksen takımında gözlemlendiği varsayılarak, aşağıdaki matris denklemi yazılabilir.

$$\begin{aligned} [\vec{u}_k^{(b)}]^{(a)} &= \hat{R}(\vec{n}^{(a)}, \theta) [\vec{u}_k^{(a)}]^{(a)} \Rightarrow \\ \bar{u}_k^{(b/a)} &= e^{\vec{n}^{(a)}\theta} \bar{u}_k^{(a/a)} = e^{\vec{n}^{(a)}\theta} \bar{u}_k \end{aligned} \quad (1.6.13)$$

Öte yandan, $\bar{u}_k^{(b/a)}$, daha önceki (1.6.1) dönüşüm denklemi ile şöyle ifade edilmişti.

$$\bar{u}_k^{(b/a)} = \hat{C}^{(a,b)} \bar{u}_k^{(b/b)} = \hat{C}^{(a,b)} \bar{u}_k \quad (1.6.14)$$

(1.6.13) ve (1.6.14) denklemleri, dönüşüm ve dönme matrislerinin, aşağıda ayrıca yazıldığı gibi, eşit olduklarını göstermektedir.

$$\hat{C}^{(a,b)} = \hat{R}(\vec{n}^{(a)}, \theta) = e^{\vec{n}^{(a)}\theta} \quad (1.6.15)$$

Yukarıdaki denklemlerde, \vec{n} vektörünün \mathcal{F}_a eksen takımındaki matris gösterimi olan $\bar{n}^{(a)}$ kullanılmıştır. Aslında, \vec{n} vektörünün \mathcal{F}_b eksen takımındaki matris gösterimi olan $\bar{n}^{(b)}$ de kullanılabilirdi. Bunun nedeni, \vec{n} vektörünün dönme eksenini üzerinde olmasından dolayı, dönme işleminden etkilenmemesi ve $\bar{n}^{(b)} = \bar{n}^{(a)}$ olmasıdır. Ancak, söz konusu dönme işlemi, \mathcal{F}_c gibi farklı bir üçüncü eksen takımında gözlemlenirse, bu eşitlik kaybolur. Yani, $\bar{n}^{(c)} \neq \bar{n}^{(b)} = \bar{n}^{(a)}$. Dolayısıyla, (1.6.15) denklemi kullanılırken, \vec{n} vektörünün ifade edildiği eksen takımının \mathcal{F}_a ya da \mathcal{F}_b eksen takımlarında biri olmasına dikkat etmek gerekir. Aksi halde, dönme matrisi, dönüşüm matrisine eşit olmaz. Bu kritik husus, şöyle ifade edilebilir.

$$\hat{C}^{(a,b)} = e^{\vec{n}^{(a)}\theta} = e^{\vec{n}^{(b)}\theta} \neq e^{\vec{n}^{(c)}\theta} \quad (1.6.16)$$

1.6.4. Dönüşüm Matrisinin Euler Açılımları Cinsinden İfade Edilmesi

Ortonormal olan $\hat{C}^{(a,b)}$ matrisinin yalnızca üç bağımsız parametre cinsinden ifade edilebileceği daha önce belirtilmişti. Euler açıları kullanıldığında, bu üç bağımsız parametre, önceden belirlenmiş eksenler etrafındaki dönmeleri gösteren birer açı olarak seçilmiş olur. Söz konusu eksenlerden her biri, geleneksel olarak, bir eksen takımının eksenlerinden biri olarak belirlenir. Belirlenen eksenlere göre, çeşitli Euler açısı sıralamaları ortaya çıkar. Bu sıralamaları genel olarak temsil eden i - j - k sıralamasına göre, \mathcal{F}_a eksen takımının \mathcal{F}_b eksen takımına dönüşü, aşağıda şematik olarak gösterilen üç aşamalı ardışık dönme işlemiyle gerçekleştirilir.

$$\mathcal{F}_a \xrightarrow{\text{dönme}[\bar{u}_i^{(a)}, \phi_1]} \mathcal{F}_m \xrightarrow{\text{dönme}[\bar{u}_j^{(m)}, \phi_2]} \mathcal{F}_n \xrightarrow{\text{dönme}[\bar{u}_k^{(n)}, \phi_3]} \mathcal{F}_b \quad (1.6.17)$$

Yukarıdaki şemada, \mathcal{F}_m ve \mathcal{F}_n , ara eksen takımlarıdır. Bu şemaya göre, $\hat{C}^{(a,b)}$ şöyle oluşur.

$$\hat{C}^{(a,b)} = \hat{C}^{(a,m)} \hat{C}^{(m,n)} \hat{C}^{(n,b)} \quad (1.6.18)$$

(1.6.18) denklemindeki dönüşüm matrisleri, (1.6.15) denklemini uyarınca, birer dönme matrisi olarak şöyle ifade edilirler.

$$\hat{C}^{(a,m)} = e^{\tilde{u}_i^{(a/a)} \phi_1} = e^{\tilde{u}_i \phi_1} = \hat{R}_i(\phi_1) \quad (1.6.19)$$

$$\hat{C}^{(m,n)} = e^{\tilde{u}_j^{(m/m)} \phi_2} = e^{\tilde{u}_j \phi_2} = \hat{R}_j(\phi_2) \quad (1.6.20)$$

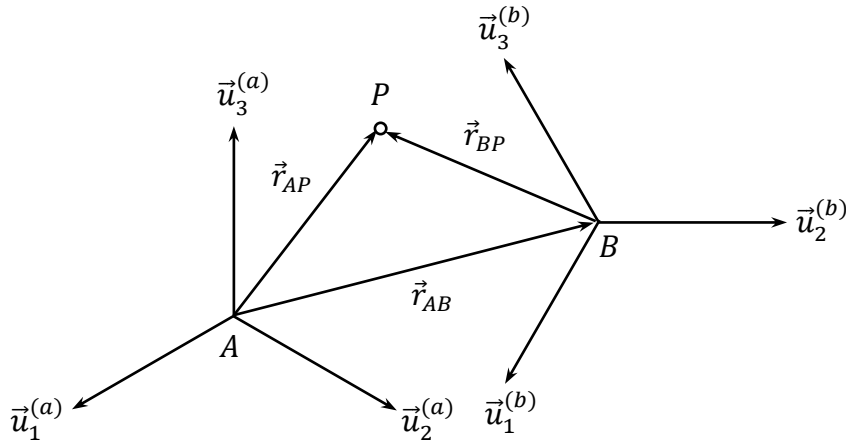
$$\hat{C}^{(n,b)} = e^{\tilde{u}_k^{(n/n)} \phi_3} = e^{\tilde{u}_k \phi_3} = \hat{R}_k(\phi_3) \quad (1.6.21)$$

Böylece, $\hat{C}^{(a,b)}$, aşağıda görülen biçimde elde edilmiş olur.

$$\hat{C}^{(a,b)} = e^{\tilde{u}_i \phi_1} e^{\tilde{u}_j \phi_2} e^{\tilde{u}_k \phi_3} = \hat{R}_i(\phi_1) \hat{R}_j(\phi_2) \hat{R}_k(\phi_3) \quad (1.6.22)$$

Robotik alanında genel olarak 1-2-3 ve 3-2-3 sıralamaları kullanılmaktadır. Araç dinamiği alanında ise, tüm kara, hava ve deniz araçlarını kapsamak üzere, neredeyse istisnasız, 3-2-1 sıralaması kullanılmaktadır. Ne var ki, Euler'in bizzat öne sürüp kullandığı sıralama, 3-1-3 sıralamasıdır. Euler bu sıralamayı, özellikle, jiroskop rotorları ve kendi etrafında dönen gök cisimleri gibi, simetrik olup simetri eksenini etrafında diğer eksenlere göre çok daha hızlı dönen cisimleri incelemek için kullanmıştır.

1.7. Bir Noktanın Farklı Eksen Takımlarına Göre Konumu ve Homojen Dönüşüm Matrisleri



Şekil 1.4 Bir Noktanın Farklı Eksen Takımlarında Gözlemlenmesi

Şekil 1.4'te gösterilen senaryoda, bir P noktası, birbirine göre *ötelenmiş* ($A \rightarrow B$) ve *dönmüş* ($a \rightarrow b$) olan $\mathcal{F}_a(A)$ ve $\mathcal{F}_b(B)$ gibi iki farklı eksen takımında gözlemlenmektedir. Bu durumda, P noktasının $\mathcal{F}_a(A)$ ve $\mathcal{F}_b(B)$ eksen takımlarına göre konumunu gösteren \vec{r}_{AP} ve \vec{r}_{BP} vektörleri arasındaki ilişki, "ötelenme vektörü" olarak adlandırılan \vec{r}_{AB} aracılığıyla şu şekilde sağlanır.

$$\vec{r}_{AP} = \vec{r}_{AB} + \vec{r}_{BP} \quad (1.7.1)$$

(1.7.1) vektör denklemi, \vec{r}_{AP} ve \vec{r}_{BP} vektörlerinin $\mathcal{F}_a(A)$ ve $\mathcal{F}_b(B)$ eksen takımlarındaki matris gösterimleri kullanılarak aşağıdaki matris denklemi biçiminde de yazılabilir.

$$\vec{r}_{AP}^{(a)} = \hat{C}^{(a,b)} \vec{r}_{BP}^{(b)} + \vec{r}_{AB}^{(a)} \quad (1.7.2)$$

(1.7.2) denklemi, P noktasının $\mathcal{F}_a(A)$ ve $\mathcal{F}_b(B)$ eksen takımlarındaki görünüşleri arasında ötelenme teriminin varlığı nedeniyle *homojen olmayan* ya da diğer bir deyişle *eklentili* (biased) bir ilişki teşkil etmektedir. Bu ilişkiyi homojenleştirmek için (1.7.2) denklemi, $1 = 1$ denklemiyle genişletilerek şöyle yazılabilir.

$$\left. \begin{aligned} \vec{r}_{AP}^{(a)} &= \hat{C}^{(a,b)} \vec{r}_{BP}^{(b)} + \vec{r}_{AB}^{(a)} \\ 1 &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (1.7.3)$$

(1.7.3) denklem çifti, tek ve homojen bir denklem biçiminde şöyle yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} \vec{r}_{AP}^{(a)} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{C}^{(a,b)} & \vec{r}_{AB}^{(a)} \\ \vec{0}^t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{r}_{BP}^{(b)} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.7.4)$$

(1.7.4) denklemi, aşağıdaki tanımlara yol açar.

$$\bar{R}_{AP}^{(a)} = \begin{bmatrix} \vec{r}_{AP}^{(a)} \\ 1 \end{bmatrix} : P \text{ noktasının } \mathcal{F}_a(A) \text{ 'daki büyütülmüş } (4 \times 1) \text{ konum matrisi} \quad (1.7.5)$$

$$\bar{R}_{BP}^{(b)} = \begin{bmatrix} \vec{r}_{BP}^{(b)} \\ 1 \end{bmatrix} : P \text{ noktasının } \mathcal{F}_b(B) \text{ 'deki büyütülmüş } (4 \times 1) \text{ konum matrisi} \quad (1.7.6)$$

$$\widehat{H}_{AB}^{(a,b)} = \begin{bmatrix} \widehat{C}^{(a,b)} & \bar{r}_{AB}^{(a)} \\ \bar{0}^t & 1 \end{bmatrix} : 4 \times 4 \text{ boyutlu homojen dönüşüm matrisi} \quad (1.7.7)$$

Yukarıdaki tanımlar kullanılınc, (1.7.4) denklemi, kısaca aşağıdaki derleşik biçimde yazılabilir.

$$\bar{R}_{AP}^{(a)} = \widehat{H}_{AB}^{(a,b)} \bar{R}_{BP}^{(b)} \quad (1.7.8)$$

Böylece, görüldüğü gibi, \mathcal{R}^3 uzayında yazılan fakat homojen olmayan (1.7.2) denklemi, bir fazla boyutlu \mathcal{R}^4 uzayında yazılma pahasına, homojen olan (1.7.8) denklemine dönüştürülmüştür.

Dikkat edilirse, $\widehat{H}_{AB}^{(a,b)}$ matrisi iki temel öğeden oluşmaktadır. Birincisi, $\widehat{C}^{(a,b)}$ ile gösterilen *dönme öğesidir*. İkincisi ise, $\bar{r}_{AB}^{(a)}$ ile gösterilen *ötelenme öğesidir*.

Eğer P noktası, üç farklı eksen takımında gözlemleniyorsa, o zaman şu denklemler yazılabilir.

Homojen olmayan denklem grubu:

$$\bar{r}_{AP}^{(a)} = \widehat{C}^{(a,b)} \bar{r}_{BP}^{(b)} + \bar{r}_{AB}^{(a)} \quad (1.7.9)$$

$$\bar{r}_{BP}^{(b)} = \widehat{C}^{(b,c)} \bar{r}_{CP}^{(c)} + \bar{r}_{BC}^{(b)} \quad (1.7.10)$$

$$\bar{r}_{AP}^{(a)} = \widehat{C}^{(a,c)} \bar{r}_{CP}^{(c)} + \bar{r}_{AC}^{(a)} = [\widehat{C}^{(a,b)} \widehat{C}^{(b,c)}] \bar{r}_{CP}^{(c)} + [\widehat{C}^{(a,b)} \bar{r}_{BC}^{(b)} + \bar{r}_{AB}^{(a)}] \quad (1.7.11)$$

Homojen denklem grubu:

$$\bar{R}_{AP}^{(a)} = \widehat{H}_{AB}^{(a,b)} \bar{R}_{BP}^{(b)} \quad (1.7.12)$$

$$\bar{R}_{BP}^{(b)} = \widehat{H}_{BC}^{(b,c)} \bar{R}_{CP}^{(c)} \quad (1.7.13)$$

$$\bar{R}_{AP}^{(a)} = \widehat{H}_{AC}^{(a,c)} \bar{R}_{CP}^{(c)} = [\widehat{H}_{AB}^{(a,b)} \widehat{H}_{BC}^{(b,c)}] \bar{R}_{CP}^{(c)} \quad (1.7.14)$$

Özellikle, (1.7.11) ve (1.7.14) denklemlerinin karşılaştırılması, homojen dönüşüm denklemlerinin peşpeşe yapılan dönüşümlerdeki derleşiklik (kısa ve toplu ifade) avantajını ortaya koymaktadır.

Homojen olmayan dönüşümlerde, bileşke dönme ve bileşke ötelenme terimlerinin ayrı ayrı ifade edilmesi gerekmektedir. Şöyle ki,

$$\widehat{C}^{(a,c)} = \widehat{C}^{(a,b)} \widehat{C}^{(b,c)} \quad (1.7.15)$$

$$\bar{r}_{AC}^{(a)} = \bar{r}_{AB}^{(a)} + \widehat{C}^{(a,b)} \bar{r}_{BC}^{(b)} \quad (1.7.16)$$

Oysa, homojen dönüşümlerde, bileşke homojen dönüşüm matrisi, tek bir yalın çarpım denklemiyle ifade edilebilmektedir. Şöyle ki,

$$\widehat{H}_{AC}^{(a,c)} = \widehat{H}_{AB}^{(a,b)} \widehat{H}_{BC}^{(b,c)} \quad (1.7.17)$$

Homojen dönüşüm matrislerine ait bazı özellikler aşağıda belirtilmiştir.

(1.7.7) denkleminde yararlanarak gösterilebilir ki,

$$\det[\widehat{H}_{AB}^{(a,b)}] = \det[\widehat{C}^{(a,b)}] = 1 \quad (1.7.18)$$

(1.7.8) denklemi, $\mathcal{F}_a(A)$ ile $\mathcal{F}_b(B)$ 'nin yeri değiştirilerek ve $\widehat{H}_{AB}^{(a,b)}$ matrisinin tersi alınarak aşağıdaki iki biçimde yazılabilir.

$$\bar{R}_{BP}^{(b)} = \widehat{H}_{BA}^{(b,a)} \bar{R}_{AP}^{(a)} \quad (1.7.19)$$

$$\bar{R}_{BP}^{(b)} = \left[\widehat{H}_{AB}^{(a,b)} \right]^{-1} \bar{R}_{AP}^{(a)} \quad (1.7.20)$$

(1.7.19) ve (1.7.20) denklemlerine göre, $\widehat{H}_{AB}^{(a,b)}$ matrisinin tersi şöyle bulunur.

$$\left[\widehat{H}_{AB}^{(a,b)} \right]^{-1} = \widehat{H}_{BA}^{(b,a)} = \begin{bmatrix} \hat{C}^{(b,a)} & \bar{r}_{BA}^{(b)} \\ \bar{0}^t & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{C}^{(a,b)t} & -\hat{C}^{(a,b)t} \bar{r}_{AB}^{(a)} \\ \bar{0}^t & 1 \end{bmatrix} \quad (1.7.21)$$

$\mathcal{F}_a(A)$ ile $\mathcal{F}_b(B)$ arasındaki ötelenme ve dönme ilişkisi, *aşamalı olarak* aşağıda gösterilen iki biçimde ifade edilebilir.

$$\mathcal{F}_a(A) \xrightarrow{\text{ötelenme}(A \rightarrow B)} \mathcal{F}_a(B) \xrightarrow{\text{dönme}(a \rightarrow b)} \mathcal{F}_b(B) \quad (1.7.22)$$

$$\mathcal{F}_a(A) \xrightarrow{\text{dönme}(a \rightarrow b)} \mathcal{F}_b(A) \xrightarrow{\text{ötelenme}(A \rightarrow B)} \mathcal{F}_b(B) \quad (1.7.23)$$

Yukarıdaki şemalara göre, $\widehat{H}_{AB}^{(a,b)}$ matrisi şu iki biçimde ayrıştırılabilir.

$$\widehat{H}_{AB}^{(a,b)} = \widehat{H}_{AB}^{(a,a)} \widehat{H}_{BB}^{(a,b)} = \widehat{H}_{AB}^{(a)} \widehat{H}_B^{(a,b)} \quad (\text{önce ötelenme, sonra dönme}) \quad (1.7.24)$$

$$\widehat{H}_{AB}^{(a,b)} = \widehat{H}_{AA}^{(a,b)} \widehat{H}_{AB}^{(b,b)} = \widehat{H}_A^{(a,b)} \widehat{H}_{AB}^{(b)} \quad (\text{önce dönme, sonra ötelenme}) \quad (1.7.25)$$

Yukarıdaki ayrıştırmalarda yer alan $\widehat{H}_{AB}^{(a)}$ ve $\widehat{H}_{AB}^{(b)}$ matrislerine "yalın ötelenme matrisleri"; $\widehat{H}_A^{(a,b)}$ ve $\widehat{H}_B^{(a,b)}$ matrislerine ise "yalın dönme matrisleri" denir. Bu matrislerin ayrıntılı ifadeleri aşağıda gösterilmiştir.

$$\widehat{H}_{AB}^{(a)} = \begin{bmatrix} \hat{I} & \bar{r}_{AB}^{(a)} \\ \bar{0}^t & 1 \end{bmatrix}, \quad \widehat{H}_{AB}^{(b)} = \begin{bmatrix} \hat{I} & \bar{r}_{AB}^{(b)} \\ \bar{0}^t & 1 \end{bmatrix} \quad (1.7.26)$$

$$\widehat{H}_A^{(a,b)} = \widehat{H}_B^{(a,b)} = \widehat{H}^{(a,b)} = \begin{bmatrix} \hat{C}^{(a,b)} & \bar{0} \\ \bar{0}^t & 1 \end{bmatrix} \quad (1.7.27)$$

(1.7.26) ve (1.7.27) denklemlerinden şu sonuçlar çıkartılabilir.

(i) Yalın dönme matrisleri, dönme noktasına bağlı değildir. Bu nedenle, bir yalın dönme matrisi, (1.7.27) denkleminde olduğu gibi, herhangi bir dönme noktası belirtmeden $\widehat{H}^{(a,b)}$ biçiminde de yazılabilir. Bu özellik, dönme işleminin etrafında yapıldığı noktanın, döndürülen nesnenin yönelimindeki değişim üzerinde herhangi bir etkisinin olmadığını göstermektedir.

(ii) Yalın ötelenme matrisleri ise, doğal olarak ötelenmenin gözlemlendiği eksen takımına bağlıdır. Çünkü, ötelenme \bar{r}_{AB} gibi bir vektörle gösterilir ve bu vektör de farklı eksen takımlarında farklı dikeysıra matrisleri biçiminde görünür.

1.8. Bir Vektörün Farklı Eksen Takımlarına Göre Türevleri

1.8.1. Bir Vektörün Belli Bir Eksen Takımına Göre Türevi

Bir vektörün türevinin alınması, seçilen eksen takımına göre bağıl bir işlemdir. Örneğin, bir \vec{r} vektörünün $\mathcal{F}_a(A)$ ve $\mathcal{F}_b(B)$ gibi iki farklı eksen takımına göre alınan türevleri aşağıdaki biçimlerde gösterilebilir.

$$D_a \vec{r} = d_a \vec{r} / dt = [d\vec{r}/dt]_{\mathcal{F}_a} \quad (1.8.1)$$

$$D_b \vec{r} = d_b \vec{r} / dt = [d\vec{r}/dt]_{\mathcal{F}_b} \quad (1.8.2)$$

Söz konusu vektörün türevi, (1.8.1) denklemine göre alınırken \mathcal{F}_a eksen takımının yönelimi; (1.8.2) denklemine göre alınırken de \mathcal{F}_b eksen takımının yönelimi sabitmiş gibi kabul edilir. Türevi alınacak vektör, $\mathcal{F}_a(A)$ ve $\mathcal{F}_b(B)$ eksen takımlarında şöyle çözüştürülebilir.

$$\vec{r} = \vec{u}_1^{(a)} r_1^{(a)} + \vec{u}_2^{(a)} r_2^{(a)} + \vec{u}_3^{(a)} r_3^{(a)} = \vec{u}_1^{(b)} r_1^{(b)} + \vec{u}_2^{(b)} r_2^{(b)} + \vec{u}_3^{(b)} r_3^{(b)} \quad (1.8.3)$$

Bu çözüştürmelere göre, $D_a \vec{r}$ ve $D_b \vec{r}$ türevleri şöyle ifade edilir.

$$D_a \vec{r} = \vec{u}_1^{(a)} \dot{r}_1^{(a)} + \vec{u}_2^{(a)} \dot{r}_2^{(a)} + \vec{u}_3^{(a)} \dot{r}_3^{(a)} \quad (1.8.4)$$

$$D_b \vec{r} = \vec{u}_1^{(b)} \dot{r}_1^{(b)} + \vec{u}_2^{(b)} \dot{r}_2^{(b)} + \vec{u}_3^{(b)} \dot{r}_3^{(b)} \quad (1.8.5)$$

(1.8.4) ve (1.8.5) denklemlerine göre, \vec{r} vektörünün ve türevlerinin $\mathcal{F}_a(A)$ ve $\mathcal{F}_b(B)$ eksen takımlarındaki matris gösterimleri şöyle ilişkilendirilir.

$$[\vec{r}]^{(a)} = \vec{r}^{(a)} = \begin{bmatrix} r_1^{(a)} \\ r_2^{(a)} \\ r_3^{(a)} \end{bmatrix} \Rightarrow [D_a \vec{r}]^{(a)} = \dot{\vec{r}}^{(a)} = \begin{bmatrix} \dot{r}_1^{(a)} \\ \dot{r}_2^{(a)} \\ \dot{r}_3^{(a)} \end{bmatrix} \quad (1.8.6)$$

$$[\vec{r}]^{(b)} = \vec{r}^{(b)} = \begin{bmatrix} r_1^{(b)} \\ r_2^{(b)} \\ r_3^{(b)} \end{bmatrix} \Rightarrow [D_b \vec{r}]^{(b)} = \dot{\vec{r}}^{(b)} = \begin{bmatrix} \dot{r}_1^{(b)} \\ \dot{r}_2^{(b)} \\ \dot{r}_3^{(b)} \end{bmatrix} \quad (1.8.7)$$

Dikkat edilirse, (1.8.6) ve (1.8.7) denklemleri, çözüştürme ve türev alma eksen takımları aynı ise geçerlidir.

Ne var ki, çözüştürme ve türev alma eksen takımlarının her zaman aynı olmaları gerekmez. Böyle bir durumda, aşağıdaki denklemler yazılabilir.

$$[D_b \vec{r}]^{(a)} = C^{(a,b)} [D_b \vec{r}]^{(b)} = C^{(a,b)} \dot{\vec{r}}^{(b)} \quad (1.8.8)$$

$$[D_a \vec{r}]^{(b)} = C^{(b,a)} [D_a \vec{r}]^{(a)} = C^{(b,a)} \dot{\vec{r}}^{(a)} \quad (1.8.9)$$

(1.8.8) ve (1.8.9) denklemlerinin herbirinde, türev alma eksen takımı, birinde \mathcal{F}_b diğeriinde \mathcal{F}_a olmak üzere, aynıdır. Bununla birlikte, söz konusu denklemlerle, türev alındıktan sonra ortaya çıkan vektörün farklı iki eksen takımındaki matris gösterimleri ilişkilendirilmiştir.

1.8.2. Bir Vektörün Farklı Eksen Takımlarına Göre Türevlerinin Arasındaki İlişki ve Bağlı Açısal Hız Tanımı

Bir \vec{r} vektörünün $\mathcal{F}_a(A)$ ve $\mathcal{F}_b(B)$ gibi birbirlerine göre açısal olarak farklı hareket eden iki eksen takımına göre alınan türevleri, "Coriolis Teoremi" ya da "Transport Teoremi" olarak bilinen teorem sayesinde ilişkilendirilir. Bu teorem şöyle ifade edilir.

$$D_a \vec{r} = D_b \vec{r} + \vec{\omega}_{b/a} \times \vec{r} \quad (1.8.10)$$

(1.8.10) denklemindeki $\vec{\omega}_{b/a}$ vektörü, $\mathcal{F}_b(B)$ 'nin $\mathcal{F}_a(A)$ 'ya göre *bağlı açısal hızı* olarak tanımlanır. Aynı denklemden, sol tarafın $\mathcal{F}_a(A)$ 'daki, sağ tarafın ise $\mathcal{F}_b(B)$ 'deki matris gösterimleri kullanılarak aşağıdaki matris denklemi elde edilir.

$$\dot{\vec{r}}^{(a)} = \hat{C}^{(a,b)}[\dot{\vec{r}}^{(b)} + \vec{\omega}_{b/a}^{(b)} \vec{r}^{(b)}] \quad (1.8.11)$$

(1.8.11) denklemi, türev almadan önce yazılan aşağıdaki dönüşüm denkleminde yola çıkılarak da elde edilebilir.

$$\vec{r}^{(a)} = \hat{C}^{(a,b)} \vec{r}^{(b)} \quad (1.8.12)$$

(1.8.12) denkleminin taraf tarafa alınan türevi, aşağıdaki denklemi verir.

$$\dot{\vec{r}}^{(a)} = \hat{C}^{(a,b)} \dot{\vec{r}}^{(b)} + \dot{\hat{C}}^{(a,b)} \vec{r}^{(b)} = \hat{C}^{(a,b)}[\dot{\vec{r}}^{(b)} + \dot{\hat{C}}^{(a,b)} \vec{r}^{(b)}] \quad (1.8.13)$$

(1.8.11) ve (1.8.13) denklemleri karşılaştırılınca, iki eksen takımı arasındaki bağlı açısal hızı, iki eksen takımı arasındaki bağlı yönelim matrisiyle (yani dönüşüm matrisiyle) ilişkilendiren aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\vec{\omega}_{b/a}^{(b)} = \hat{C}^{(b,a)} \dot{\hat{C}}^{(a,b)} \Rightarrow \vec{\omega}_{b/a}^{(b)} = \text{dsm}[\hat{C}^{(b,a)} \dot{\hat{C}}^{(a,b)}] \quad (1.8.14)$$

(1.8.14) denkleminde de, $\vec{\omega}_{b/a}^{(a)} = \text{asm}[\vec{\omega}_{b/a}^{(b)}] = \text{asm}[\hat{C}^{(a,b)} \vec{\omega}_{b/a}^{(b)}] = \hat{C}^{(a,b)} \vec{\omega}_{b/a}^{(b)} \hat{C}^{(b,a)}$ biçiminde ifade edilen bağıntılar dizisi kullanılarak aşağıdaki denklem elde edilebilir.

$$\vec{\omega}_{b/a}^{(a)} = \dot{\hat{C}}^{(a,b)} \hat{C}^{(b,a)} \Rightarrow \vec{\omega}_{b/a}^{(a)} = \text{dsm}[\dot{\hat{C}}^{(a,b)} \hat{C}^{(b,a)}] \quad (1.8.15)$$

Hatırlatmak gerekirse, (1.8.14) ve (1.8.15) denklemlerinde kullanılmış olan "dsm" (dikeysıra matrisi) işleci, daha önce Kısım 1.3'te tanımlanan "asm" (antisimetrik matris) işlecinin tersidir. Yani, $\text{dsm} = \text{asm}^{-1}$. Buradan çıkartılan sonuca göre de, $\hat{C}^{(b,a)} \dot{\hat{C}}^{(a,b)}$ ve $\dot{\hat{C}}^{(a,b)} \hat{C}^{(b,a)}$ matrisleri, birer antisimetrik matris olmaktadır.

Eğer \vec{r} vektörünün türevleri, birbirlerinden farklı açısal hareketleri olan üç eksen takımına göre alınrsa, (1.8.10) denklemi, şu üç şekilde yazılabilir.

$$D_a \vec{r} = D_b \vec{r} + \vec{\omega}_{b/a} \times \vec{r} \quad (1.8.16)$$

$$D_b \vec{r} = D_c \vec{r} + \vec{\omega}_{c/b} \times \vec{r} \quad (1.8.17)$$

$$D_a \vec{r} = D_c \vec{r} + \vec{\omega}_{c/a} \times \vec{r} \quad (1.8.18)$$

Yukarıdaki üç denklemden şu sonuç çıkar.

$$\vec{\omega}_{c/a} = \vec{\omega}_{c/b} + \vec{\omega}_{b/a} \quad (1.8.19)$$

(1.8.19) denklemi, bağıl açısal hızların bileşkesinin yalnızca toplama yoluyla elde edilebileceğini göstermektedir. Oysa, daha önce de görüldüğü gibi, bağıl yönelim matrislerinin bileşkesi, yalnızca çarpım yoluyla elde edilmektedir. Şöyle ki,

$$\hat{C}^{(a,c)} = \hat{C}^{(a,b)}\hat{C}^{(b,c)} \quad (1.8.20)$$

1.8.3. Bir Vektörün Farklı Eksen Takımlarına Göre İkinci Türevlerinin Arasındaki İlişki ve Bağıl Açısal İvme Tanımı

Coriolis-Transport teoremi uygulanarak bu kez de (1.8.10) denkleminin türevi, taraf tarafa aşağıdaki gösterildiği gibi alınabilir.

$$\begin{aligned} D_a^2 \vec{r} &= D_a(D_a \vec{r}) = D_a(D_b \vec{r} + \vec{\omega}_{b/a} \times \vec{r}) \Rightarrow \\ D_a^2 \vec{r} &= D_b(D_b \vec{r} + \vec{\omega}_{b/a} \times \vec{r}) + \vec{\omega}_{b/a} \times (D_b \vec{r} + \vec{\omega}_{b/a} \times \vec{r}) \Rightarrow \\ D_a^2 \vec{r} &= D_b^2 \vec{r} + \vec{\omega}_{b/a} \times (D_b \vec{r}) + \vec{\alpha}_{b/a} \times \vec{r} \\ &\quad + \vec{\omega}_{b/a} \times (D_b \vec{r} + \vec{\omega}_{b/a} \times \vec{r}) \Rightarrow \\ D_a^2 \vec{r} &= D_b^2 \vec{r} + 2\vec{\omega}_{b/a} \times (D_b \vec{r}) \\ &\quad + \vec{\alpha}_{b/a} \times \vec{r} + \vec{\omega}_{b/a} \times (\vec{\omega}_{b/a} \times \vec{r}) \end{aligned} \quad (1.8.21)$$

(1.8.21) denklemindeki $\vec{\alpha}_{b/a}$ vektörü, $\mathcal{F}_b(B)$ 'nin $\mathcal{F}_a(A)$ 'ya göre "bağıl açısal ivmesi" olarak tanımlanır ve iki eksen takımı arasındaki bağıl açısal hız vektöründen aşağıdaki türev alma işlemiyle elde edilir.

$$\vec{\alpha}_{b/a} = D_b \vec{\omega}_{b/a} \quad (1.8.22)$$

Bununla birlikte, Coriolis-Transport teoremi uyarınca ve $\vec{\omega}_{b/a} \times \vec{\omega}_{b/a} = \vec{0}$ olduğu için $\vec{\alpha}_{b/a}$ aşağıdaki türev alma işlemiyle de elde edilebilir.

$$\vec{\alpha}_{b/a} = D_a \vec{\omega}_{b/a} \quad (1.8.23)$$

Ancak, dikkat etmek gerekir ki, (1.8.22) ve (1.8.23) denklemleri, yalnızca $\mathcal{F}_a(A)$ ile $\mathcal{F}_b(B)$ eksen takımları için geçerlidir. Bir başka deyişle, $\vec{\omega}_{b/a}$ vektörünün üçüncü bir $\mathcal{F}_c(C)$ eksen takımına göre alınan türevi, $\vec{\alpha}_{b/a}$ vektörünü vermez. Bu durum kısaca şöyle ifade edilebilir.

$$\vec{\alpha}_{b/a} = D_a \vec{\omega}_{b/a} = D_b \vec{\omega}_{b/a} \neq D_c \vec{\omega}_{b/a} \quad (1.8.24)$$

Yine Coriolis-Transport teoremine göre, $D_c \vec{\omega}_{b/a}$ türevi doğrudan $\vec{\alpha}_{b/a}$ vektörünü vermese de, $\vec{\alpha}_{b/a}$ vektörüyle aşağıda gösterilen biçimlerde ilişkilidir.

$$D_c \vec{\omega}_{b/a} = \vec{\alpha}_{b/a} + \vec{\omega}_{a/c} \times \vec{\omega}_{b/a} = \vec{\alpha}_{b/a} + \vec{\omega}_{b/c} \times \vec{\omega}_{b/a} \quad (1.8.25)$$

Öte yandan, daha önce, üç farklı eksen takımı söz konusu olduğunda, bağıl açısal hızların bileşkesinin yalnızca toplama yoluyla elde edilebileceği görülmüştü. Bu durum, (1.8.19) denklemiyle şöyle ifade edilmişti.

$$\vec{\omega}_{c/a} = \vec{\omega}_{c/b} + \vec{\omega}_{b/a} \quad (1.8.26)$$

(1.8.26) denkleminin türevi taraf tarafa $\mathcal{F}_a(A)$ eksen takımına göre alınır, bağıl açısal ivmelerin bileşkesi, aşağıda gösterilen biçimde elde edilir.

$$\begin{aligned} D_a \vec{\omega}_{c/a} &= D_a \vec{\omega}_{c/b} + D_a \vec{\omega}_{b/a} \Rightarrow \\ \vec{\alpha}_{c/a} &= (D_b \vec{\omega}_{c/b} + \vec{\omega}_{b/a} \times \vec{\omega}_{c/b}) + \vec{\alpha}_{b/a} \Rightarrow \\ \vec{\alpha}_{c/a} &= \vec{\alpha}_{c/b} + \vec{\alpha}_{b/a} + \vec{\omega}_{b/a} \times \vec{\omega}_{c/b} \end{aligned} \quad (1.8.27)$$

Görüldüğü gibi, bağıl açısal ivmelerin bileşkesi yalnızca toplama yoluyla elde edilememektedir. Bileşkeye ilgili bağıl açısal hızların çarpaz çarpımından oluşan bir terim daha eklenmektedir.

1.9. Bir Noktanın Farklı Eksen Takımlarına Göre Hızı ve İvmesi

1.9.1. Bir Noktanın Farklı Eksen Takımlarına Göre Hızı

Şekil 1.4'e tekrar bakıldığında, bir P noktasının birbirine göre farklı hareket eden (ötelenen ve dönen) $\mathcal{F}_a(A)$ ve $\mathcal{F}_b(B)$ gibi iki eksen takımında gözlemlenen bağıl konum vektörleri arasında aşağıdaki ilişkinin olduğu görülmektedir.

$$\vec{r}_{AP} = \vec{r}_{AB} + \vec{r}_{BP} \quad (1.9.1)$$

Eşdeğerli fakat farklı bir gösterimle, (1.9.1) denklemi, şöyle de yazılabilir.

$$\vec{r}_{P/A} = \vec{r}_{P/B} + \vec{r}_{B/A} \quad (1.9.2)$$

(1.9.1) ve (1.9.2) denklemlerindeki farklı gösterimler, matematiksel olarak eşdeğerli olmakla birlikte, sözel olarak farklı birer yorumla şöyle ifade edilirler.

\vec{r}_{AB} : A noktasından B noktasına doğru yöneltilmiş konum vektörü.

$\vec{r}_{B/A}$: B noktasının A noktasına göre bağıl konum vektörü.

P noktasının $\mathcal{F}_a(A)$ ve $\mathcal{F}_b(B)$ eksen takımlarında gözlemlenen bağıl hızları arasındaki ilişkiyi elde etmek üzere, (1.9.2) denkleminin eksen takımlarından birine göre, örneğin $\mathcal{F}_a(A)$ 'ya göre, taraf tarafa türevi alınır, aşağıdaki denklem ortaya çıkar.

$$D_a \vec{r}_{P/A} = D_a \vec{r}_{P/B} + D_a \vec{r}_{B/A} \quad (1.9.3)$$

(1.9.3) denklemindeki terimler, aşağıdaki gibi gösterilebilen genel bir hız tanımına yol açar.

$$\vec{v}_{P/B/\mathcal{F}_a} = D_a \vec{r}_{P/B} \quad (1.9.4)$$

(1.9.4) denklemi ile tanımlanan hız vektörü, şöyle adlandırılır: P noktasının B noktasına göre $\mathcal{F}_a(A)$ eksen takımına göre türev alınarak elde edilen bağıl hız vektörü.

Dikkat edilirse, genel hız tanımı, aşağıda belirtilen üç temel unsura dayanmaktadır.

1. Hızı istenen nokta: P
2. Referans noktası: B
3. Türev alma eksen takımı: $\mathcal{F}_a(A)$

(1.9.4) denklemindeki gösterim kullanılarak (1.9.3) denklemi şöyle yazılabilir.

$$\vec{v}_{P/A/\mathcal{F}_a} = \vec{v}_{P/B/\mathcal{F}_a} + \vec{v}_{B/A/\mathcal{F}_a} \quad (1.9.5)$$

Ne var ki, $\mathcal{F}_b(B)$ eksen takımını kullanan gözlemci, gözlemlediği noktaların hız vektörlerini de aynı eksen takımına göre oluşturmak ister. Bu isteği karşılamak üzere, (1.9.5) denklemi, Coriolis-Transport teoremi kullanılarak şöyle de yazılabilir.

$$\vec{v}_{P/A/\mathcal{F}_a} = \vec{v}_{P/B/\mathcal{F}_b} + \vec{\omega}_{b/a} \times \vec{r}_{P/B} + \vec{v}_{B/A/\mathcal{F}_a} \quad (1.9.6)$$

1.9.2. Bir Noktanın Farklı Eksen Takımlarına Göre İvmesi

(1.9.4) denklemdeki genel hız tanımına benzer bir biçimde genel ivme tanımı da aşağıdaki gibi yapılabilir.

$$\vec{a}_{P/B/\mathcal{F}_a} = D_a^2 \vec{r}_{P/B} \quad (1.9.7)$$

Görüldüğü gibi, genel ivme tanımı da, aşağıda belirtilen üç temel unsura dayanmaktadır.

1. İvmesi istenen nokta: P
2. Referans noktası: B
3. Türev alma eksen takımı: $\mathcal{F}_a(A)$

(1.9.7) denklemdeki gösterim kullanılarak (1.9.3) denklemi, bir kez daha türevi alınarak şöyle yazılabilir.

$$\vec{a}_{P/A/\mathcal{F}_a} = \vec{a}_{P/B/\mathcal{F}_a} + \vec{a}_{B/A/\mathcal{F}_a} \quad (1.9.8)$$

Hız denkleminde olduğu gibi, $\mathcal{F}_b(B)$ eksen takımını kullanan gözlemci, gözlemlediği noktaların ivme vektörlerini de yine aynı eksen takımına göre oluşturmak ister. Bu isteği karşılamak üzere, (1.9.8) denklemi, Coriolis-Transport teoremi kullanılarak şöyle de yazılabilir.

$$\begin{aligned} \vec{a}_{P/A/\mathcal{F}_a} &= \vec{a}_{P/B/\mathcal{F}_b} + 2\vec{\omega}_{b/a} \times \vec{v}_{P/B/\mathcal{F}_b} + \vec{\alpha}_{b/a} \times \vec{r}_{P/B} \\ &+ \vec{\omega}_{b/a} \times (\vec{\omega}_{b/a} \times \vec{r}_{P/B}) + \vec{a}_{B/A/\mathcal{F}_a} \end{aligned} \quad (1.9.9)$$

(1.9.9) denklemdeki terimlerden ikisi, birinci türevlerden oluşmuştur. Bu terimler, aşağıdaki özel adlarla anılırlar.

$$\text{Coriolis İvmesi: } 2\vec{\omega}_{b/a} \times \vec{v}_{P/B/\mathcal{F}_b} \quad (1.9.10)$$

$$\text{Merkezcil İvme: } \vec{\omega}_{b/a} \times (\vec{\omega}_{b/a} \times \vec{r}_{P/B}) \quad (1.9.11)$$

1.9.3. Gösterimi Basitleştirilmiş Bağlı Hız ve İvme İfadeleri

Eğer kinematik inceleme süresince yalnızca $\mathcal{F}_a(A)$ ve $\mathcal{F}_b(B)$ gibi iki eksen takımı kullanılıyorsa, yukarıdaki ayrıntılı gösterim yerine, aşağıdaki basitleştirilmiş gösterim de kullanılabilir.

$$\vec{r}_{P/A} = \vec{r}, \quad \vec{r}_{P/B} = \vec{r}', \quad \vec{r}_{B/A} = \vec{r}^\circ \quad (1.9.12)$$

$$\vec{v}_{P/A/\mathcal{F}_a} = \vec{v}, \quad \vec{v}_{P/B/\mathcal{F}_b} = \vec{v}', \quad \vec{v}_{B/A/\mathcal{F}_a} = \vec{v}^\circ \quad (1.9.13)$$

$$\vec{a}_{P/A/\mathcal{F}_a} = \vec{a}, \quad \vec{a}_{P/B/\mathcal{F}_b} = \vec{a}', \quad \vec{a}_{B/A/\mathcal{F}_a} = \vec{a}^\circ \quad (1.9.14)$$

$$\vec{\omega}_{b/a} = \vec{\omega}, \quad \vec{\alpha}_{b/a} = \vec{\alpha} \quad (1.9.15)$$

Yukarıdaki basitleştirilmiş gösterim kullanılarak konum, hız, ve ivme denklemleri, aşağıdaki sade görünümleriyle yazılabilir.

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{r}^\circ \quad (1.9.16)$$

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}' + \vec{v}^\circ \quad (1.9.17)$$

$$\vec{a} = \vec{a}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\alpha} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + \vec{a}^\circ \quad (1.9.18)$$

(1.9.16,17,18) denklemlerini, terimlerin yerine göre $\mathcal{F}_a(A)$ ve $\mathcal{F}_b(B)$ eksen takımlarındaki matris gösterimlerini kullanarak da yazmak mümkündür. Bu amaçla, $\{\vec{r}, \vec{v}, \vec{a}\}$ ve $\{\vec{r}^\circ, \vec{v}^\circ, \vec{a}^\circ\}$ üçlülerinin $\mathcal{F}_a(A)$ 'daki üstyazıtısız matris gösterimleri ile $\{\vec{r}', \vec{v}', \vec{a}', \vec{\omega}, \vec{\alpha}\}$ beşlisinin $\mathcal{F}_b(B)$ 'deki üstyazıtısız matris gösterimleri, $\hat{C} = \hat{C}^{(a,b)}$ dönüşüm matrisi eşliğinde kullanılabilir. Bu şekilde yazılan denklemler, aşağıda gösterilmiştir.

$$\bar{r} = \hat{C}\bar{r}' + \bar{r}^\circ \quad (1.9.19)$$

$$\bar{v} = \hat{C}(\bar{v}' + \tilde{\omega}\bar{r}') + \bar{v}^\circ \quad (1.9.20)$$

$$\bar{a} = \hat{C}[\bar{a}' + 2\tilde{\omega}\bar{v}' + (\tilde{\alpha} + \tilde{\omega}^2)\bar{r}'] + \bar{a}^\circ \quad (1.9.21)$$

(1.9.21) denkleminde şu husus dikkat çekicidir: $\vec{\alpha}$ ve $\vec{\omega}$ vektörlerine $\mathcal{F}_b(B)$ eksen takımında karşılık gelen $\tilde{\alpha}$ ve $\tilde{\omega}$ matrisleri kullanıldığında, $\tilde{\alpha}$ ile $\tilde{\omega}^2$ birbiriyle toplanabilir terimler haline gelmektedir.

BÖLÜM 2

İKİNCİ MERTEBEDEN TENSÖRLER: DİYADİKLER

2.1. Diyadiklerin Tanımı ve Kullanım Yerleri

Bir *diyadik*, ya da bir *temel diyadik*, iki vektörün yanyana getirilmesiyle oluşturulur. Şöyle ki,

$$\check{D} = \vec{p}\vec{q} \quad (2.1.1)$$

Yukarıdaki diyadik oluşumunda, \vec{p} vektörü, *öncül vektör* (anterior vector); \vec{q} vektörü ise, *artçıl vektör* (posterior vector) olarak adlandırılır.

Bir *diyadik* ise, birden çok diyadın bir *doğrusal bileşimi* biçiminde oluşturulur. Şöyle ki,

$$\check{D} = \sum_{k=1}^n d_k \check{D}_k = \sum_{k=1}^n d_k \vec{p}_k \vec{q}_k \quad (2.1.2)$$

Bir diyadığın eşleniği (conjugate of a dyadic), o diyadığı oluşturan öncül ve artçıl vektörlerin yerleri değiştirilerek elde edilir. Şöyle ki,

$$\check{D}^* = \text{conj}(\check{D}) = \text{conj}(\vec{p}\vec{q}) = \vec{q}\vec{p} \quad (2.1.3)$$

$$\check{D}^* = \text{conj}(\check{D}) = \sum_{k=1}^n d_k \vec{q}_k \vec{p}_k \quad (2.1.4)$$

Diyadikler, vektörlerin hem yönlerini hem de büyüklüklerini değiştirebilen işleçler (operatörler) olarak kullanılırlar. Diyadiklerin bu kullanımını, vektör işlemlerinden olan *nokta çarpım* aracılığıyla gerçekleştirilir. Kinematik ve dinamik alanında kullanılan diyadikler aşağıda belirtilmiştir.

a) Dönme ya da Döndürme Diyadiği: \check{R}

Bu diyadik aracılığıyla bir vektör (\vec{p}) döndürülerek bir başka vektör (\vec{r}) elde edilir. Yani,

$$\vec{r} = \check{R} \cdot \vec{p} \quad (2.1.5)$$

b) Atalet Diyadiği: \check{J}

Bu diyadik aracılığıyla bir katı cismin açısal hız vektörü ($\vec{\omega}$) ile açısal momentum vektörü (\vec{H}) ilişkilendirilir. Yani,

$$\vec{H} = \check{J} \cdot \vec{\omega} \quad (2.1.6)$$

Tensör Terminolojisi:

Diyadikleri, vektörleri, hatta skalarları da kapsayan genel bir *tensör* terminolojisi uyarınca, diyadikler ikinci mertebeden tensörler; vektörler birinci mertebeden tensörler; skalarlar ise sıfırıncı mertebeden tensörler olarak da adlandırılırlar. Bununla birlikte, skalarların ve vektörlerin ikinci bir adlandırmaya pek ihtiyaçları olmadığı için, tensör terimi tek başına kullanıldığında genel olarak ikinci mertebeden bir tensör, yani bir diyadik anlaşılır. Diğer bir deyişle, çoğu kez, *atalet diyadiği* yerine *atalet tensörü*, *dönme diyadiği* yerine de *dönme tensörü* terimleri kullanılabilir.

2.2. Diyardiklerle Yapılan İşlemler

Diyadikler vektörlerden oluştuğu için vektörlere uygulanan *nokta çarpım* ve *çapraz çarpım* işlemleri, diyadiklere de uygulanabilir. Bu işlemlerin diyadiklere uygulanışı aşağıda gösterilmiştir.

2.2.1. Nokta Çarpım

Bir diyadikle bir vektörün nokta çarpımı, diyadiğin önden ya da arkadan çarpılmasına göre farklı bir vektör verir. Bu durum aşağıda gösterilmiştir.

$$\begin{aligned}\check{D} \cdot \vec{r} &= (\sum_{k=1}^n d_k \vec{p}_k \vec{q}_k) \cdot \vec{r} = \sum_{k=1}^n d_k \vec{p}_k (\vec{q}_k \cdot \vec{r}) = \sum_{k=1}^n [d_k (\vec{q}_k \cdot \vec{r})] \vec{p}_k \Rightarrow \\ \check{D} \cdot \vec{r} &= \sum_{k=1}^n b_k \vec{p}_k = \vec{x}\end{aligned}\quad (2.2.1)$$

$$\begin{aligned}b_k &= d_k (\vec{q}_k \cdot \vec{r}) \\ \vec{r} \cdot \check{D} &= \vec{r} \cdot (\sum_{k=1}^n d_k \vec{p}_k \vec{q}_k) = \sum_{k=1}^n d_k (\vec{r} \cdot \vec{p}_k) \vec{q}_k = \sum_{k=1}^n [d_k (\vec{r} \cdot \vec{p}_k)] \vec{q}_k \Rightarrow \\ \vec{r} \cdot \check{D} &= \sum_{k=1}^n c_k \vec{q}_k = \vec{y}\end{aligned}\quad (2.2.2)$$

$$c_k = d_k (\vec{r} \cdot \vec{p}_k)$$

Benzer biçimde gösterilebilir ki,

$$\check{D}^* \cdot \vec{r} = \vec{r} \cdot \check{D} = \sum_{k=1}^n c_k \vec{q}_k = \vec{y}\quad (2.2.3)$$

$$\vec{r} \cdot \check{D}^* = \check{D} \cdot \vec{r} = \sum_{k=1}^n b_k \vec{p}_k = \vec{x}\quad (2.2.4)$$

Eğer $\check{D}^* = \check{D}$ ise, böyle bir diyadiğe *simetrik diyadik* denir. Genel bir simetrik diyadik, aşağıda gösterilen biçimde ifade edilebilir.

$$\check{D} = \check{D}^* = \sum_{k=1}^n d_k \vec{p}_k \vec{p}_k + \sum_{k=1}^m c_k (\vec{q}_k \vec{r}_k + \vec{r}_k \vec{q}_k)\quad (2.2.5)$$

Öte yandan, iki diyadiğin nokta çarpımı, aşağıda gösterildiği gibi, yine bir diyadik verir.

$$\begin{aligned}\check{D} \cdot \check{E} &= (\sum_{i=1}^n d_i \vec{p}_i \vec{q}_i) \cdot (\sum_{j=1}^m e_j \vec{r}_j \vec{s}_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m d_i e_j \vec{p}_i (\vec{q}_i \cdot \vec{r}_j) \vec{s}_j \Rightarrow \\ \check{D} \cdot \check{E} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m [d_i e_j (\vec{q}_i \cdot \vec{r}_j)] \vec{p}_i \vec{s}_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f_{ij} \vec{p}_i \vec{s}_j = \check{F}\end{aligned}\quad (2.2.6)$$

$$f_{ij} = d_i e_j (\vec{q}_i \cdot \vec{r}_j)$$

2.2.2. Çapraz Çarpım

Bir diyadikle bir vektörün çapraz çarpımı, diyadiğin önden ya da arkadan çarpılmasına göre farklı bir diyadik verir. Bu durum aşağıda gösterilmiştir.

$$\begin{aligned}\check{D} \times \vec{r} &= (\sum_{k=1}^n d_k \vec{p}_k \vec{q}_k) \times \vec{r} = \sum_{k=1}^n d_k \vec{p}_k (\vec{q}_k \times \vec{r}) \Rightarrow \\ \check{D} \times \vec{r} &= \sum_{k=1}^n d_k \vec{p}_k \vec{x}_k = \check{E}\end{aligned}\quad (2.2.7)$$

$$\begin{aligned}\vec{r} \times \check{D} &= \vec{r} \times (\sum_{k=1}^n d_k \vec{p}_k \vec{q}_k) = \sum_{k=1}^n d_k (\vec{r} \times \vec{p}_k) \vec{q}_k \Rightarrow \\ \vec{r} \times \check{D} &= \sum_{k=1}^n d_k \vec{y}_k \vec{q}_k = \check{F}\end{aligned}\quad (2.2.8)$$

İki diyadiğin çapraz çarpımı ise, bir triyadik (yani üçüncü mertebeden bir tensör) verir. Ancak, triyadikler normal olarak dinamik sistem çalışmalarında pek görülmezler.

2.3. Diyardiklerin Bir Eksen Takımındaki Matris Gösterimleri

Bir diyadik, seçilen bir \mathcal{F}_a eksen takımında şöyle çözüştürülür.

$$\check{D} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 D_{ij}^{(a)} \vec{u}_i^{(a)} \vec{u}_j^{(a)} \quad (2.3.1)$$

(2.3.1) denkleminde, \check{D} diyadiği, \mathcal{F}_a eksen takımının temel vektörlerinden oluşan diyatların doğrusal bileşimi olarak ifade edilmiştir. Bu ifadede yer alan $D_{ij}^{(a)}$, \check{D} diyadiğinin \mathcal{F}_a eksen takımındaki i - j bileşenidir ve ikili nokta çarpım işlemiyle şöyle elde edilir.

$$D_{ij}^{(a)} = \vec{u}_i^{(a)} \cdot \check{D} \cdot \vec{u}_j^{(a)} \quad (2.3.2)$$

\check{D} diyadiğinin yukarıdaki bileşenleri kullanılarak aşağıda gösterilen biçimde bir *kare matris* oluşturulabilir.

$$\hat{D}^{(a)} = \begin{bmatrix} D_{11}^{(a)} & D_{12}^{(a)} & D_{13}^{(a)} \\ D_{21}^{(a)} & D_{22}^{(a)} & D_{23}^{(a)} \\ D_{31}^{(a)} & D_{32}^{(a)} & D_{33}^{(a)} \end{bmatrix} \quad (2.3.3)$$

Yukarıda oluşturulan $\hat{D}^{(a)}$ kare matrisi, \check{D} diyadiğinin \mathcal{F}_a eksen takımındaki matris gösterimi olarak tanımlanır. Bu matris için aşağıdaki gösterim biçimleri de kullanılabilir.

$$\hat{D}^{(a)} = [\check{D}]^{(a)} = [\check{D}]|_{\mathcal{F}_a} \quad (2.3.4)$$

Eğer $\check{A} = \vec{p}\vec{q}$ gibi bir diyat söz konusuysa, bu diyadın \mathcal{F}_a eksen takımındaki bileşenleri ve matris gösterimi şöyle elde edilir.

$$\begin{aligned} \Delta_{ij}^{(a)} &= \vec{u}_i^{(a)} \cdot \check{A} \cdot \vec{u}_j^{(a)} = \vec{u}_i^{(a)} \cdot \vec{p}\vec{q} \cdot \vec{u}_j^{(a)} \Rightarrow \\ \Delta_{ij}^{(a)} &= [\vec{u}_i^{(a)} \cdot \vec{p}][\vec{q} \cdot \vec{u}_j^{(a)}] = p_i^{(a)} q_j^{(a)} \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

$$\hat{\Delta}^{(a)} = [\check{A}]^{(a)} = \begin{bmatrix} p_1^{(a)} q_1^{(a)} & p_1^{(a)} q_2^{(a)} & p_1^{(a)} q_3^{(a)} \\ p_2^{(a)} q_1^{(a)} & p_2^{(a)} q_2^{(a)} & p_2^{(a)} q_3^{(a)} \\ p_3^{(a)} q_1^{(a)} & p_3^{(a)} q_2^{(a)} & p_3^{(a)} q_3^{(a)} \end{bmatrix} \quad (2.3.6)$$

Dikkat edilirse, $\hat{\Delta}^{(a)}$, aşağıda olduğu gibi iki çarpana ayrıştırılarak daha derleşik bir biçimde, yani $\vec{p}^{(a)}$ ile $\vec{q}^{(a)}$ dikeysıra matrislerinin *dış çarpımı* biçiminde de ifade edilebilir.

$$\hat{\Delta}^{(a)} = \begin{bmatrix} p_1^{(a)} \\ p_2^{(a)} \\ p_3^{(a)} \end{bmatrix} [q_1^{(a)} \quad q_2^{(a)} \quad q_3^{(a)}] = \vec{p}^{(a)} \vec{q}^{(a)t} \quad (2.3.7)$$

(2.3.7) denklemini, (2.1.2) denkleminde ifade edilen bir genel diyadik için şu şekli alır.

$$\hat{D}^{(a)} = \sum_{k=1}^n d_k \vec{p}_k^{(a)} \vec{q}_k^{(a)t} \quad (2.3.8)$$

Öte yandan, Bölüm 1'de de belirtildiği üzere, \mathcal{F}_a gibi bir eksen takımının temel birim vektörlerinin yine \mathcal{F}_a içinde ifade edilen matris gösterimleri, temel dikeysıra matrisleridir. Yani,

$$[\vec{u}_k^{(a)}]^{(a)} = \vec{u}_k^{(a/a)} = \vec{u}_k \quad (2.3.9)$$

Bu özellik ve yanısıra (2.3.1), (2.3.7) ve (2.3.8) denklemleri kullanılarak $\widehat{D}^{(a)}$ matrisi şöyle de ifade edilebilir.

$$\widehat{D}^{(a)} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 D_{ij}^{(a)} \bar{u}_i^{(a/a)} \bar{u}_j^{(a/a)t} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 D_{ij}^{(a)} \bar{u}_i \bar{u}_j^t \quad (2.3.10)$$

2.4. Diyardıkların Farklı Eksen Takımlarındaki Matris Gösterimleri

Aynı bir \check{D} diyadiği, \mathcal{F}_a ve \mathcal{F}_b gibi farklı iki eksen takımında şöyle çözüştürülür.

$$\check{D} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 D_{ij}^{(a)} \bar{u}_i^{(a)} \bar{u}_j^{(a)} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 D_{ij}^{(b)} \bar{u}_i^{(b)} \bar{u}_j^{(b)} \quad (2.4.1)$$

(2.3.1) ve (2.3.11) denklemlerine göre, \check{D} diyadiğinin \mathcal{F}_a ve \mathcal{F}_b eksen takımlarındaki matris gösterimleri, aşağıda gösterilen biçimde ortaya çıkarlar.

$$\widehat{D}^{(a)} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 D_{ij}^{(a)} \bar{u}_i \bar{u}_j^t \quad (2.4.2)$$

$$\widehat{D}^{(b)} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 D_{ij}^{(b)} \bar{u}_i \bar{u}_j^t \quad (2.4.3)$$

Bununla birlikte, $\widehat{D}^{(a)}$ matrisi, \check{D} diyadiğinin \mathcal{F}_b eksen takımındaki çözüştürümü kullanılarak şöyle de ifade edilebilir.

$$\widehat{D}^{(a)} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 D_{ij}^{(b)} \bar{u}_i^{(b/a)} \bar{u}_j^{(b/a)t} \quad (2.4.4)$$

Öte yandan, \mathcal{F}_a ve \mathcal{F}_b eksen takımları arasındaki $\hat{C}^{(a,b)}$ dönüşüm matrisi kullanılarak $\bar{u}_k^{(b/a)}$ için şu ifade yazılabilir.

$$\bar{u}_k^{(b/a)} = \hat{C}^{(a,b)} \bar{u}_k^{(b/b)} = \hat{C}^{(a,b)} \bar{u}_k \quad (2.4.5)$$

(2.4.5) denklemi yerine konunca, (2.4.4) denklemi şu şekli alır.

$$\begin{aligned} \widehat{D}^{(a)} &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 D_{ij}^{(b)} \hat{C}^{(a,b)} \bar{u}_i \bar{u}_j^t \hat{C}^{(a,b)t} \Rightarrow \\ \widehat{D}^{(a)} &= \hat{C}^{(a,b)} \left[\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 D_{ij}^{(b)} \bar{u}_i \bar{u}_j^t \right] \hat{C}^{(a,b)t} \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

Bilindiği üzere, $\hat{C}^{(a,b)t} = \hat{C}^{(b,a)}$. Ayrıca, görüldüğü üzere, yukarıdaki köşeli parantezin içi, (2.4.3) denkleme göre $\widehat{D}^{(b)}$ matrisine eşittir. Dolayısıyla, $\widehat{D}^{(a)}$ ile $\widehat{D}^{(b)}$ arasında aşağıdaki dönüşüm denklemi elde edilir.

$$\widehat{D}^{(a)} = \hat{C}^{(a,b)} \widehat{D}^{(b)} \hat{C}^{(b,a)} \quad (2.4.7)$$

Bu arada, hatırlanacağı üzere, bir \vec{r} vektörünün \mathcal{F}_a ve \mathcal{F}_b eksen takımlarındaki dikeysıra matris gösterimleri ise şöyle ilişkilendirilir.

$$\vec{r}^{(a)} = \hat{C}^{(a,b)} \vec{r}^{(b)} \quad (2.4.8)$$

(2.4.8) ve (2.4.7) denklemlerine göre, bir vektörün (yani, birinci mertebeden bir tensörün) iki eksen takımı arasındaki matris gösterimlerini ilişkilendirmek için dönüşüm matrisi bir kez kullanılırken, bir diyadiğinin (yani, ikinci mertebeden bir tensörün) iki eksen takımı arasındaki matris gösterimlerini ilişkilendirmek için dönüşüm matrisi iki kez kullanılmaktadır.

2.5. Vektör-Diyadik İşlemlerine Karşılık Gelen Matris İşlemleri

Bir diyadikle bir vektörün nokta çarpımı, seçilen bir \mathcal{F}_a eksen takımında şöyle ifade edilir.

$$\begin{aligned}
 \vec{q} &= \vec{D} \cdot \vec{p} \Rightarrow \\
 \sum_{i=1}^3 q_i^{(a)} \vec{u}_i^{(a)} &= \left[\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 D_{ij}^{(a)} \vec{u}_i^{(a)} \vec{u}_j^{(a)} \right] \left[\sum_{k=1}^3 p_k^{(a)} \vec{u}_k^{(a)} \right] \Rightarrow \\
 \sum_{i=1}^3 q_i^{(a)} \vec{u}_i^{(a)} &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 D_{ij}^{(a)} p_k^{(a)} \vec{u}_i^{(a)} \vec{u}_j^{(a)} \cdot \vec{u}_k^{(a)} \Rightarrow \\
 \sum_{i=1}^3 q_i^{(a)} \vec{u}_i^{(a)} &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 D_{ij}^{(a)} p_k^{(a)} \vec{u}_i^{(a)} \delta_{jk} \Rightarrow \\
 \sum_{i=1}^3 q_i^{(a)} \vec{u}_i^{(a)} &= \sum_{i=1}^3 \left[\sum_{j=1}^3 D_{ij}^{(a)} p_j^{(a)} \right] \vec{u}_i^{(a)} \Rightarrow \\
 q_i^{(a)} &= \sum_{j=1}^3 D_{ij}^{(a)} p_j^{(a)} \tag{2.5.1}
 \end{aligned}$$

(2.5.1) denklemi, aşağıdaki matris denkleminin eleman ayrıntısıyla yazılmış biçimindedir.

$$\vec{q}^{(a)} = \hat{D}^{(a)} \vec{p}^{(a)} \tag{2.5.2}$$

Benzer biçimde yapılacak işlemlerle, aşağıda özetlenen karşılıklı ifadeler elde edilebilir.

$$\vec{q} = \vec{D} \cdot \vec{p} = \vec{p} \cdot \vec{D}^* \Rightarrow \vec{q}^{(a)} = \hat{D}^{(a)} \vec{p}^{(a)} \tag{2.5.3}$$

$$\vec{r} = \vec{D}^* \cdot \vec{p} = \vec{p} \cdot \vec{D} \Rightarrow \vec{r}^{(a)} = \hat{D}^{(a)t} \vec{p}^{(a)} \tag{2.5.4}$$

$$\vec{E} = \vec{D} \times \vec{p} \Rightarrow \vec{E}^{(a)} = \hat{D}^{(a)} \vec{p}^{(a)} \tag{2.5.5}$$

$$\vec{F} = \vec{p} \times \vec{D} \Rightarrow \vec{F}^{(a)} = \vec{p}^{(a)} \hat{D}^{(a)} \tag{2.5.6}$$

$$\vec{H} = \vec{D} \cdot \vec{G} \Rightarrow \vec{H}^{(a)} = \hat{D}^{(a)} \vec{G}^{(a)} \tag{2.5.7}$$

$$\vec{w} = \vec{q} \times \vec{D} \cdot \vec{p} \Rightarrow \vec{w}^{(a)} = \vec{q}^{(a)} \hat{D}^{(a)} \vec{p}^{(a)} \tag{2.5.8}$$

$$s = \vec{q} \cdot \vec{D} \cdot \vec{p} \Rightarrow s = \vec{q}^{(a)t} \hat{D}^{(a)} \vec{p}^{(a)} \tag{2.5.9}$$

2.6. Birim Diyadik ve Ters Diyadik

Nokta çarpımla ilişkili olarak \hat{I} simgesiyle gösterilen *birim diyadik* öylesine tanımlanır ki, çarpıldığı vektörü ya da diyadığı değiştirmez. Şöyle ki,

$$\hat{I} \cdot \vec{r} = \vec{r} \cdot \hat{I} = \vec{r} \tag{2.6.1}$$

$$\hat{I} \cdot \vec{D} = \vec{D} \cdot \hat{I} = \vec{D} \tag{2.6.2}$$

Yukarıdaki vektör-diyadik denklemlerine seçilen bir \mathcal{F}_a eksen takımında karşılık gelen matris denklemleri şunlardır.

$$\hat{I}^{(a)} \vec{r}^{(a)} = \vec{r}^{(a)} \hat{I}^{(a)} = \vec{r}^{(a)} \tag{2.6.3}$$

$$\hat{I}^{(a)} \hat{D}^{(a)} = \hat{D}^{(a)} \hat{I}^{(a)} = \hat{D}^{(a)} \tag{2.6.4}$$

Yukarıdaki denklemlere göre, $\hat{I}^{(a)}$ matrisi, \hat{I} ile gösterilen birim matrise eşittir. Yani,

$$\hat{I}^{(a)} = \hat{I} = \vec{u}_1 \vec{u}_1^t + \vec{u}_2 \vec{u}_2^t + \vec{u}_3 \vec{u}_3^t \tag{2.6.5}$$

Bu arada, $\vec{u}_k = \vec{u}_k^{(a/a)} = [\vec{u}_k^{(a)}]^{(a)}$ olduğu göz önüne alınırsa, (2.6.5) denkleminde birim diyadik için şu ifade elde edilir.

$$\check{I} = \vec{u}_1^{(a)}\vec{u}_1^{(a)} + \vec{u}_2^{(a)}\vec{u}_2^{(a)} + \vec{u}_3^{(a)}\vec{u}_3^{(a)} \quad (2.6.6)$$

Öte yandan, \mathcal{F}_a rastgele seçilmiş bir eksen takımı olduğu için (2.6.5) ve (2.6.6) denklemleri, doğal olarak bütün eksen takımları için geçerlidir. Diğer bir deyişle, birim diyadik bütün eksen takımlarında birim matris olarak görünür ve bütün eksen takımlarının temel vektörlerine aynı ifadeyle bağlıdır. Yani,

$$\hat{I}^{(a)} = \hat{I}^{(b)} = \dots = \hat{I}^{(y)} = \hat{I}^{(z)} = \hat{I} \quad (2.6.7)$$

$$\check{I} = \sum_{k=1}^3 \vec{u}_k^{(a)}\vec{u}_k^{(a)} = \sum_{k=1}^3 \vec{u}_k^{(b)}\vec{u}_k^{(b)} = \dots = \sum_{k=1}^3 \vec{u}_k^{(z)}\vec{u}_k^{(z)} \quad (2.6.8)$$

Yine nokta çarpımla ilişkili olarak bir diyadığın tersi, eğer determinantı sıfır değilse, aşağıda görüldüğü gibi tanımlanır.

$$\check{D} \cdot \check{D}^{-1} = \check{D}^{-1} \cdot \check{D} = \check{I} \quad (2.6.9)$$

(2.6.9) denkleminde herhangi bir \mathcal{F}_a eksen takımında karşı gelen matris denkleminin şudur.

$$\widehat{D}^{(a)}[\widehat{D}^{(a)}]^{-1} = [\widehat{D}^{(a)}]^{-1}\widehat{D}^{(a)} = \hat{I} \quad (2.6.10)$$

(2.6.9) ve (2.6.10) denklemleri, şu özelliği ima etmektedirler: Bir diyadığın determinantı, o diyadığın herhangi bir eksen takımındaki matris gösteriminin determinantına eşittir. Yani,

$$\det(\check{D}) = \det[\widehat{D}^{(a)}] = \det[\widehat{D}^{(b)}] = \dots = \det[\widehat{D}^{(z)}] \quad (2.6.11)$$

2.7. Dönme Diyadığı

Bölüm 1'den hatırlanacağı üzere, bir \vec{p} vektörünün \vec{n} birim vektörüyle temsil edilen bir eksen etrafında θ açısıyla dönmesi sonucunda ortaya çıkan \vec{r} vektörü, aşağıda tekrar yazılan Rodrigues formülüyle belirlenir.

$$\vec{r} = \vec{p} \cos \theta + (\vec{n} \times \vec{p}) \sin \theta + \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{p})(1 - \cos \theta) \quad (2.7.1)$$

Rodrigues formülündeki vektörel terimler, birim diyadik (\check{I}) ve $\vec{n}\vec{n}$ diyadı kullanılarak şöyle ifade edilebilir.

$$\vec{p} = \check{I} \cdot \vec{p} \quad (2.7.2)$$

$$\vec{n} \times \vec{p} = \vec{n} \times (\check{I} \cdot \vec{p}) = (\vec{n} \times \check{I}) \cdot \vec{p} \quad (2.7.3)$$

$$\vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{p}) = (\vec{n}\vec{n}) \cdot \vec{p} \quad (2.7.4)$$

Yukarıdaki üç denklem sayesinde, (2.7.1) denkleminin sağ tarafındaki ifade aşağıdaki iki çarpıma ayrıştırılabilir.

$$\vec{r} = [\check{I} \cos \theta + (\vec{n} \times \check{I}) \sin \theta + (\vec{n}\vec{n})(1 - \cos \theta)] \cdot \vec{p} \quad (2.7.5)$$

(2.7.5) denkleminde dayanarak *dönme diyadığı* (\check{R}) şöyle tanımlanır.

$$\check{R} = \check{R}(\vec{n}, \theta) = \check{I} \cos \theta + (\vec{n} \times \check{I}) \sin \theta + (\vec{n}\vec{n})(1 - \cos \theta) \quad (2.7.6)$$

Böylece, dönme işlemi, kısaca şöyle ifade edilmiş olur.

$$\vec{r} = \check{R} \cdot \vec{p} \quad (2.7.7)$$

(2.7.7) sayılı vektör-diyadik denklemi, seçilen bir \mathcal{F}_a eksen takımında aşağıdaki matris denklemi biçiminde yazılabilir.

$$\vec{r}^{(a)} = \hat{R}^{(a)} \vec{p}^{(a)} \quad (2.7.8)$$

(2.7.8) denklemindeki $\hat{R}^{(a)}$ matrisi, \check{R} dönme diyadığını \mathcal{F}_a eksen takımında temsil eden *dönme matrisidir*. Birim diyadığın her eksen takımında birim matrisle temsil edildiği göz önüne alınarak sözü edilen dönme matrisi şöyle ifade edilir.

$$\hat{R}^{(a)} = \hat{I} \cos \theta + \vec{n}^{(a)} \sin \theta + \vec{n}^{(a)} \vec{n}^{(a)t} (1 - \cos \theta) \quad (2.7.9)$$

Eğer dönme işlemi, seçilen \mathcal{F}_a eksen takımının koordinat eksenlerinden biri, örneğin $\vec{u}_k^{(a)}$ doğrultusundaki eksen etrafında yapılıyorsa, dönme eksenini birim vektörü, $\vec{n} = \vec{u}_k^{(a)}$ olur. Bu durumda, dönme diyadığı, \mathcal{F}_a eksen takımına ait k -yinci *temel dönme diyadığı* olarak şöyle ifade edilir.

$$\check{R}_k^{(a)}(\theta) = \check{R}(\vec{u}_k^{(a)}, \theta) = \hat{I} \cos \theta + \vec{u}_k^{(a)} \times \hat{I} \sin \theta + \vec{u}_k^{(a)} \vec{u}_k^{(a)t} (1 - \cos \theta) \quad (2.7.10)$$

Dikkat edilirse,

$$\hat{I} = \vec{u}_1^{(a)} \vec{u}_1^{(a)t} + \vec{u}_2^{(a)} \vec{u}_2^{(a)t} + \vec{u}_3^{(a)} \vec{u}_3^{(a)t} \quad (2.7.11)$$

Ayrıca, $k \in \{1, 2, 3\}$ için,

$$\vec{u}_1^{(a)} \times \hat{I} = \vec{u}_3^{(a)} \vec{u}_2^{(a)t} - \vec{u}_2^{(a)} \vec{u}_3^{(a)t} \quad (2.7.12)$$

$$\vec{u}_2^{(a)} \times \hat{I} = \vec{u}_1^{(a)} \vec{u}_3^{(a)t} - \vec{u}_3^{(a)} \vec{u}_1^{(a)t} \quad (2.7.13)$$

$$\vec{u}_3^{(a)} \times \hat{I} = \vec{u}_2^{(a)} \vec{u}_1^{(a)t} - \vec{u}_1^{(a)} \vec{u}_2^{(a)t} \quad (2.7.14)$$

(2.7.11) – (2.7.14) denklemleri kullanılıncaya, \mathcal{F}_a eksen takımına ait temel dönme diyadıkları, aşağıdaki ifadelerle elde edilirler.

$$\begin{aligned} \check{R}_1^{(a)}(\theta) &= \vec{u}_1^{(a)} \vec{u}_1^{(a)t} + [\vec{u}_2^{(a)} \vec{u}_2^{(a)t} + \vec{u}_3^{(a)} \vec{u}_3^{(a)t}] \cos \theta \\ &\quad + [\vec{u}_3^{(a)} \vec{u}_2^{(a)t} - \vec{u}_2^{(a)} \vec{u}_3^{(a)t}] \sin \theta \end{aligned} \quad (2.7.15)$$

$$\begin{aligned} \check{R}_2^{(a)}(\theta) &= \vec{u}_2^{(a)} \vec{u}_2^{(a)t} + [\vec{u}_3^{(a)} \vec{u}_3^{(a)t} + \vec{u}_1^{(a)} \vec{u}_1^{(a)t}] \cos \theta \\ &\quad + [\vec{u}_1^{(a)} \vec{u}_3^{(a)t} - \vec{u}_3^{(a)} \vec{u}_1^{(a)t}] \sin \theta \end{aligned} \quad (2.7.16)$$

$$\begin{aligned} \check{R}_3^{(a)}(\theta) &= \vec{u}_3^{(a)} \vec{u}_3^{(a)t} + [\vec{u}_1^{(a)} \vec{u}_1^{(a)t} + \vec{u}_2^{(a)} \vec{u}_2^{(a)t}] \cos \theta \\ &\quad + [\vec{u}_2^{(a)} \vec{u}_1^{(a)t} - \vec{u}_1^{(a)} \vec{u}_2^{(a)t}] \sin \theta \end{aligned} \quad (2.7.17)$$

\mathcal{F}_a eksen takımına ait temel dönme diyadıklarının yine \mathcal{F}_a eksen takımındaki matris gösterimleri, *temel dönme matrisleri* olarak tanımlanır. Yukarıdaki denklemlerden yola çıkarak ve $k \in \{1, 2, 3\}$ için $\vec{u}_k^{(a/a)} = \vec{u}_k$ ve $\hat{R}_k^{(a/a)}(\theta) = \hat{R}_k(\theta)$ olduğu göz önüne alınarak temel dönme matrisleri için aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$\hat{R}_1(\theta) = \bar{u}_1 \bar{u}_1^t + (\bar{u}_2 \bar{u}_2^t + \bar{u}_3 \bar{u}_3^t) \cos \theta + (\bar{u}_3 \bar{u}_2^t - \bar{u}_2 \bar{u}_3^t) \sin \theta \quad (2.7.18)$$

$$\hat{R}_2(\theta) = \bar{u}_2 \bar{u}_2^t + (\bar{u}_3 \bar{u}_3^t + \bar{u}_1 \bar{u}_1^t) \cos \theta + (\bar{u}_1 \bar{u}_3^t - \bar{u}_3 \bar{u}_1^t) \sin \theta \quad (2.7.19)$$

$$\hat{R}_3(\theta) = \bar{u}_3 \bar{u}_3^t + (\bar{u}_1 \bar{u}_1^t + \bar{u}_2 \bar{u}_2^t) \cos \theta + (\bar{u}_2 \bar{u}_1^t - \bar{u}_1 \bar{u}_2^t) \sin \theta \quad (2.7.20)$$

Tabii, farklı bir ifade seçeneği olarak, temel dönme matrisleri, (2.7.9) denklemine göre, aşağıdaki gibi de ifade edilebilirler.

$$\hat{R}_1(\theta) = \hat{I} \cos \theta + \tilde{u}_1 \sin \theta + \bar{u}_1 \bar{u}_1^t (1 - \cos \theta) \quad (2.7.21)$$

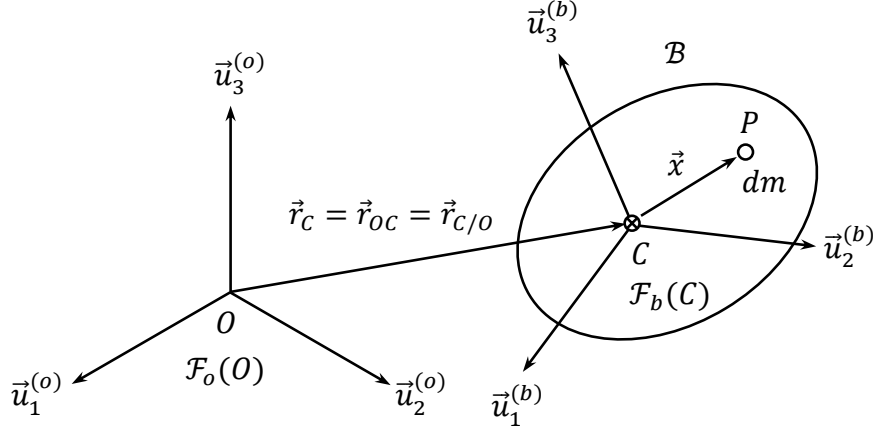
$$\hat{R}_2(\theta) = \hat{I} \cos \theta + \tilde{u}_2 \sin \theta + \bar{u}_2 \bar{u}_2^t (1 - \cos \theta) \quad (2.7.22)$$

$$\hat{R}_3(\theta) = \hat{I} \cos \theta + \tilde{u}_3 \sin \theta + \bar{u}_3 \bar{u}_3^t (1 - \cos \theta) \quad (2.7.23)$$

BÖLÜM 3

KATI CİSİMLER İÇİN TEMEL DİNAMİK

3.1. Bir Katı Cismin Atalet Özellikleri



Şekil 3.1 Bir Katı Cisim ve İlgili Eksen Takımları

Şekil 3.1'de görülen katı cisim (\mathcal{B}), $\mathcal{F}_o(O)$ ile gösterilen ve *ataletsel* olduğu varsayılan bir eksen takımında gözlenmektedir. $\mathcal{F}_o(O)$ eksen takımının ataletsel olup olmadığı ise, aşağıda açıklanan basit deneyle anlaşılabilir.

Eğer $\mathcal{F}_o(O)$ eksen takımı ataletsel ise, bu eksen takımına sabitlenen birbirine dik eksenli üç ivmeölçerin ve üç dönmeölçerin tümü sürekli sıfır değeri gösterir.

Şekil 3.1'deki katı cisme $\mathcal{F}_b(C)$ ile gösterilen bir eksen takımı bağlanmıştır. Bu eksen takımının orijini, genellikle, burada olduğu gibi, katı cismin kütle merkezi olan C noktasına yerleştirilir. Şekil 3.1'de katı cismin herhangi bir noktası P ile, katı cismin bu noktadaki bir parçacığının kütlesi ise $dm = \rho dV$ ile gösterilmiştir. Burada, ρ ve dV , sözü edilen parçacığın yoğunluğu ve hacmidir.

Tanım gereği, bir katı cismin noktaları arasındaki mesafeler, katı cisim nasıl hareket ederse etsin, sabit kalır. Bu tanım uyarınca, gözlemlenen katı cisme ait P noktasının, katı cisme bağlı olan $\mathcal{F}_b(C)$ eksen takımına göre konumu zamanla değişmez. Diğer bir deyişle, $\vec{x} = \vec{r}_{CP}$ konum vektörü için aşağıda yazılan türev denklemi, katı cismin her türlü hareketi için geçerliliğini korur.

$$D_b \vec{x} = [d\vec{x}/dt]_{\mathcal{F}_b} = \vec{0} \quad (3.1.1)$$

3.1.1. Bir Katı Cismin Kütlesi

Bir katı cismin (örneğin \mathcal{B} 'nin) kütlesi, aşağıdaki denklem kullanılarak bulunur.

$$m = \int_0^V \rho dV = \int_{x_3^o}^{x_3^*} \int_{x_2^o}^{x_2^*} \int_{x_1^o}^{x_1^*} \rho dx_1 dx_2 dx_3 \quad (3.1.2)$$

(3.1.2) denkleminde, $\{x_1, x_2, x_3\}$ üçlüsü, $x_k = x_k^{(b)}$ kısaltmasıyla, P noktasının $\mathcal{F}_b(C)$ eksen takımındaki koordinatlarını, x_k^o ve x_k^* bu koordinatların alt ve üst sınırlarını, $\rho = \rho(x_1, x_2, x_3)$ katı cismin P noktasındaki yoğunluğunu, V ise katı cismin hacmini göstermektedir.

3.1.2. Bir Katı Cismin Kütle Merkezi

Bir katı cismin (örneğin \mathcal{B} 'nin) kütle merkezinin (yani C noktasının) $\mathcal{F}_o(O)$ eksen takımına göre konum vektörü, aşağıdaki denklemle tanımlanır.

$$\vec{r}_C = \frac{1}{m} \int_0^V \vec{r}_P \rho dV \quad (3.1.3)$$

(3.1.3) denklemi üzerinde, $\vec{r}_P = \vec{r}_C + \vec{x}$ olduğu göz önüne alınarak yapılan işlemlerle, aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$\begin{aligned} \vec{r}_C &= \frac{1}{m} \int_0^V (\vec{r}_C + \vec{x}) \rho dV = \frac{1}{m} \int_0^V \vec{r}_C \rho dV + \frac{1}{m} \int_0^V \vec{x} \rho dV \Rightarrow \\ \vec{r}_C &= \frac{1}{m} \vec{r}_C \int_0^V \rho dV + \frac{1}{m} \int_0^V \vec{x} \rho dV = \vec{r}_C + \frac{1}{m} \int_0^V \vec{x} \rho dV \Rightarrow \\ \int_0^V \vec{x} \rho dV &= \vec{0} \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

(3.1.4) denklemi, bir katı cismin kütle merkezi etrafında dengeli olarak dağıldığını göstermektedir.

3.1.3. Bir Katı Cismin Kütle Merkezi Etrafındaki Atalet Tensörü ve Atalet Matrisi

Bir katı cismin (örneğin \mathcal{B} 'nin) kütle merkezi (yani C noktası) etrafındaki *atalet tensörü* ya da *atalet diyadiği*, aşağıdaki denklemle tanımlanır.

$$\check{J}_C = \check{J}(C) = \int_0^V (x^2 \check{I} - \vec{x} \vec{x}) \rho dV \quad (3.1.5)$$

(3.1.5) denklemde, $x^2 = \vec{x} \cdot \vec{x} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. Aynı denklemdeki \check{I} ise, birim tensördür. Bölüm 2'de açıklandığı gibi, birim tensör, bütün eksen takımlarının temel vektörleri cinsinden aynı formülle ifade edilir. Bu formül, katı cisme bağlı $\mathcal{F}_b(C)$ eksen takımı için şöyledir.

$$\check{I} = \vec{u}_1^{(b)} \vec{u}_1^{(b)} + \vec{u}_2^{(b)} \vec{u}_2^{(b)} + \vec{u}_3^{(b)} \vec{u}_3^{(b)} = \sum_{k=1}^3 \vec{u}_k^{(b)} \vec{u}_k^{(b)} \quad (3.1.6)$$

Aynı eksen takımında, katı cismin atalet tensörü şöyle çözüştürülebilir.

$$\check{J}_C = \check{J}(C) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 J_{ij} \vec{u}_i^{(b)} \vec{u}_j^{(b)} \quad (3.1.7)$$

(3.1.7) denklemdeki J_{ij} simgesi, \check{J}_C tensörünün $\mathcal{F}_b(C)$ eksen takımındaki i - j bileşenini kısaca göstermek üzere kullanılmıştır. Diğer bir deyişle, J_{ij} şöyle tanımlanmıştır.

$$J_{ij} = J_{ij}^{(b)}(C) = J_{Cij}^{(b)} = \vec{u}_i^{(b)} \cdot \check{J}_C \cdot \vec{u}_j^{(b)} \quad (3.1.8)$$

Katı cismin atalet tensörünün $\mathcal{F}_b(C)$ eksen takımındaki bileşenleri kullanılarak katı cismin aynı eksen takımındaki *atalet matrisi* şöyle oluşturulur.

$$\hat{J}_C^{(b)} = [\check{J}_C]^{(b)} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix} \quad (3.1.9)$$

Atalet tensörünün bileşenleri, $x^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ olduğu göz önüne alınarak, $i \in \{1, 2, 3\}$ ve $j \in \{1, 2, 3\}$ için aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$J_{ij} = \vec{u}_i^{(b)} \cdot \check{J}_C \cdot \vec{u}_j^{(b)} = \int_0^V [x^2 \vec{u}_i^{(b)} \cdot \check{I} \cdot \vec{u}_j^{(b)} - \vec{u}_i^{(b)} \cdot \vec{x} \vec{x} \cdot \vec{u}_j^{(b)}] \rho dV \Rightarrow$$

$$J_{ij} = \int_0^V [(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \delta_{ij} - x_i x_j] \rho dV \quad (3.1.10)$$

(3.1.10) denklemindeki δ_{ij} (Kronecker delta simgesi), daha önce de görüldüğü gibi, aşağıdaki denklemlerle tanımlanmıştır.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \text{ ise} \\ 0, & i \neq j \text{ ise} \end{cases} \quad (3.1.11)$$

(3.1.10) ve (3.1.5) denklemlerinden atalet tensörünün her bir bileşeni için aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$J_{11} = \int_0^V (x_2^2 + x_3^2) \rho dV \quad (3.1.12)$$

$$J_{22} = \int_0^V (x_3^2 + x_1^2) \rho dV \quad (3.1.13)$$

$$J_{33} = \int_0^V (x_1^2 + x_2^2) \rho dV \quad (3.1.14)$$

$$J_{12} = J_{21} = - \int_0^V (x_1 x_2) \rho dV \quad (3.1.15)$$

$$J_{23} = J_{32} = - \int_0^V (x_2 x_3) \rho dV \quad (3.1.16)$$

$$J_{31} = J_{13} = - \int_0^V (x_3 x_1) \rho dV \quad (3.1.17)$$

Görüldüğü gibi, $J_{ji} = J_{ij}$ olduğu için, atalet tensörü simetrik bir tensördür. Dolayısıyla, atalet matrisi de simetriktir. Atalet tensörünün bileşenleri, aşağıda belirtilen özel deyimlerle anılırlar.

a) Atalet Momentleri ya da Eksencil Atalet Terimleri:

$$J_{11}, J_{22}, J_{33}$$

b) Atalet Çarpımsalları ya da Düzlemcil Atalet Terimleri:

$$J_{12}, J_{23}, J_{31}$$

3.1.4. Asal Eksen Takımları ve Asal Atalet Momentleri

Bir katı cismin (örneğin \mathcal{B} 'nin) atalet tensörü, eğer \mathcal{B} 'nin asal eksen takımlarından birinde, örneğin $\mathcal{F}_p(C)$ eksen takımında, ifade edilirse, ortaya çıkan atalet matrisi köşegensel (diyagonal) olur. Bu matrisin yalnızca ana köşegen üzerinde yer alan elemanlarına "asal atalet momentleri" denir. $\mathcal{F}_p(C)$ ve $\mathcal{F}_b(C)$ simgeleriyle gösterilen asal ve kullanımdaki eksen takımları ile bu eksen takımlarında ifade edilen atalet matrisleri arasındaki ilişkiler aşağıda açıklanmıştır.

Katı cismin \check{J}_C atalet tensörünün $\mathcal{F}_b(C)$ ve $\mathcal{F}_p(C)$ eksen takımlarındaki çözümleri, aşağıdaki denklemlerle ilişkilidir.

$$\check{J}_C = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 J_{ij} \vec{u}_i^{(b)} \vec{u}_j^{(b)} = \sum_{k=1}^3 J_k^* \vec{u}_k^{(p)} \vec{u}_k^{(p)} \quad (3.1.18)$$

(3.1.18) denkleminde göre, \check{J}_C tensörü, $\mathcal{F}_b(C)$ ve $\mathcal{F}_p(C)$ eksen takımlarında aşağıdaki atalet matrisleriyle ifade edilir.

$$[\check{J}_C]^{(b)} = \hat{f}_C^{(b)} = \hat{J}_C = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix} \quad (3.1.19)$$

$$[\check{J}_C]^{(p)} = \hat{f}_C^{(p)} = \hat{J}_C^* = \begin{bmatrix} J_1^* & 0 & 0 \\ 0 & J_2^* & 0 \\ 0 & 0 & J_3^* \end{bmatrix} \quad (3.1.20)$$

Yukarıdaki denklemlerde şu tanımlar kullanılmıştır.

$\hat{J}_C = \hat{f}_C^{(b)}$: \mathcal{B} cisminin kullarımdaki atalet matrisi

$\hat{J}_C^* = \hat{f}_C^{(p)}$: \mathcal{B} cisminin asal atalet matrisi

J_k^* : \mathcal{B} cisminin k -yinci asal atalet momenti

$\vec{u}_k^{(p)}$: \mathcal{B} cisminin k -yinci asal eksenini belirleyen birim vektör

(3.1.18) denkleminde taraf tarafa $\vec{u}_k^{(p)}$ ile nokta çarpım işlemi uygulanırsa, aşağıdaki denklem elde edilir. Not: Bu işlem yapılırken indis karışıklığı olmaması için (3.1.18) denkleminin en sağındaki toplamada k indisi yerine l indisi kullanılmıştır.

$$\check{J}_C \cdot \vec{u}_k^{(p)} = \sum_{l=1}^3 J_l^* \vec{u}_l^{(p)} \vec{u}_l^{(p)} \cdot \vec{u}_k^{(p)} = \sum_{l=1}^3 J_l^* \vec{u}_l^{(p)} \delta_{lk}$$

Kronecker delta simgesinin varlığı nedeniyle yukarıdaki denklem, şu şekilde indirgenir.

$$\check{J}_C \cdot \vec{u}_k^{(p)} = J_k^* \vec{u}_k^{(p)} \quad (3.1.21)$$

(3.1.21) denklemini, şöyle de yazılabilir.

$$(\check{J}_C - J_k^* \hat{I}) \cdot \vec{u}_k^{(p)} = \vec{0} \quad (3.1.22)$$

(3.1.21) ve (3.1.22) denklemlerine göre, J_k^* ve $\vec{u}_k^{(p)}$, \check{J}_C tensörünün k -yinci özdeğeri ve ona karşılık gelen k -yinci özvektörü olmaktadır.

(3.1.22) sayılı vektör-diyadik denklemi, $\mathcal{F}_b(C)$ eksen takımında aşağıdaki matris denklemini biçiminde de yazılabilir.

$$\begin{aligned} [\hat{J}_C^{(b)} - J_k^* \hat{I}^{(b)}] \vec{u}_k^{(p/b)} &= \vec{0} \Rightarrow \\ (\hat{J}_C - J_k^* \hat{I}) \vec{u}_k^* &= \vec{0} \end{aligned} \quad (3.1.23)$$

(3.1.23) denkleminde, $\hat{J}_C = \hat{J}_C^{(b)}$ tanımı ile $\hat{I}^{(a)} = \hat{I}^{(b)} = \hat{I}^{(c)} = \dots = \hat{I}$ olma özelliği kullanılmıştır. Aynı denklemdeki \vec{u}_k^* ise şöyle tanımlanmıştır.

$$\vec{u}_k^* = \vec{u}_k^{(p/b)} = [\vec{u}_k^{(p)}]^{(b)} \quad (3.1.24)$$

(3.1.23) denkleminde göre, asal atalet momentlerini bulmak için aşağıdaki determinant denklemini $k = 1, 2, 3$ için çözümlenmelidir.

$$\det(\hat{J}_C - J_k^* \hat{I}) = 0 \quad (3.1.25)$$

3.1.5. Asal Eksenlerin ve Asal Atalet Momentlerinin Belirlenmesi

(3.1.25) ve (3.1.23) denklemleri, üç adet asal atalet momenti (J_1^* , J_2^* , J_3^*) ve üç adet asal eksenleri temsil eden dikeysıra matrisi (\bar{u}_1^* , \bar{u}_2^* , \bar{u}_3^*) verir. Ne var ki, burada bir *sıralama sorunu* ortaya çıkar. Şöyle ki, (3.1.25) denklemi, asal atalet momentlerinin sayısal değerlerini verir ama hangisinin birinci, ikinci, ya da üçüncü olacağını söyleyemez. Dolayısıyla, (3.1.23) denklemi de her bir asal atalet momentine karşılık gelen asal eksen doğrultusunu verir ama hangisinin birinci, ikinci, ya da üçüncü olacağını söyleyemez. Bununla birlikte, asal atalet momentleri için bir sıralama seçilirse, asal eksenlerin sıralaması da doğal olarak belirlenmiş olur.

Sıralama seçimi, genel olarak, aşağıda açıklanan iki değişik seçeneğe göre yapılmaktadır.

a) Küçükten Büyüğe Doğru Sıralama Seçeneği:

Bu seçeneğe göre, J_1^* "küçük atalet momenti", J_2^* "ortanca atalet momenti", J_3^* ise "büyük atalet momenti" olarak adlandırılır. Yani, sıralama şöyle yapılır.

$$J_1^* \leq J_2^* \leq J_3^*$$

b) Asal Eksen Takımının Kullanımdaki Eksen Takımına En Yakın Olması Seçeneği:

Bu seçeneğe göre, $\mathcal{F}_p(C)$ eksen takımının temel vektörleri öylesine sıralanırlar ki, $\mathcal{F}_b(C)$ eksen takımının temel vektörleri ile oluşturdukları *birincil yönelim açıları* en küçük olur. Diğer bir deyişle, aşağıdaki açıların en küçük olması sağlanır.

$$\theta_{11} = \angle[\bar{u}_1^{(b)}, \bar{u}_1^{(p)}], \quad \theta_{22} = \angle[\bar{u}_2^{(b)}, \bar{u}_2^{(p)}], \quad \theta_{33} = \angle[\bar{u}_3^{(b)}, \bar{u}_3^{(p)}]$$

3.1.6. Örnek: Aynı Cisim için İki Farklı Asal Eksen Takımı

Bir katı cismin atalet matrisi, kullanımdaki $\mathcal{F}_b(C)$ eksen takımına göre şöyle verilmiştir.

$$\hat{J}_C = \begin{bmatrix} 2.4604 & -1.0516 & 0.2818 \\ -1.0516 & 5.4365 & 0.7698 \\ 0.2818 & 0.7698 & 4.1031 \end{bmatrix} (\text{kg-m}^2)$$

a) Asal atalet momentlerinin küçükten büyüğe doğru sıralanması:

Söz konusu katı cismin asal atalet momentleri küçükten büyüğe doğru sıralanırsa, asal atalet matrisi ile asal eksenleri temsil eden dikeysıra matrisleri şöyle belirlenir.

$$\hat{J}_C^* = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} (\text{kg-m}^2)$$
$$\bar{u}_1^* = \begin{bmatrix} 0.9107 \\ 0.3333 \\ -0.2440 \end{bmatrix}, \quad \bar{u}_2^* = \begin{bmatrix} 0.3333 \\ -0.2440 \\ 0.9107 \end{bmatrix}, \quad \bar{u}_3^* = \begin{bmatrix} -0.2440 \\ 0.9107 \\ 0.3333 \end{bmatrix}$$

Bu belirlemeye göre, $\mathcal{F}_b(C)$ ile $\mathcal{F}_p(C)$ eksen takımları arasındaki birincil yönelim açıları, aşağıdaki değerlerle ortaya çıkar.

$$\cos \theta_{11} = \bar{u}_1^t \bar{u}_1^* = 0.9107 \Rightarrow \theta_{11} = 24.4^\circ$$

$$\cos \theta_{22} = \bar{u}_2^t \bar{u}_2^* = -0.244 \Rightarrow \theta_{22} = 104.1^\circ$$

$$\cos \theta_{33} = \bar{u}_3^t \bar{u}_3^* = 0.3333 \Rightarrow \theta_{33} = 70.5^\circ$$

b) Asal atalet momentlerinin $\mathcal{F}_b(C)$ ile $\mathcal{F}_p(C)$ en yakın olacak biçimde sıralanması:

Söz konusu katı cismin asal atalet momentleri, $\mathcal{F}_b(C)$ ile $\mathcal{F}_p(C)$ eksen takımları arasındaki birincil yönelim açıları en küçük olacak biçimde sıralanırsa, asal atalet matrisi ile asal eksenleri temsil eden dikeysıra matrisleri bu kez şöyle belirlenir.

$$\hat{J}_C^* = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} (\text{kg-m}^2)$$

$$\bar{u}_1^* = \begin{bmatrix} 0.9107 \\ 0.3333 \\ -0.2440 \end{bmatrix}, \quad \bar{u}_2^* = \begin{bmatrix} -0.2440 \\ 0.9107 \\ 0.3333 \end{bmatrix}, \quad \bar{u}_3^* = \begin{bmatrix} 0.3333 \\ -0.2440 \\ 0.9107 \end{bmatrix}$$

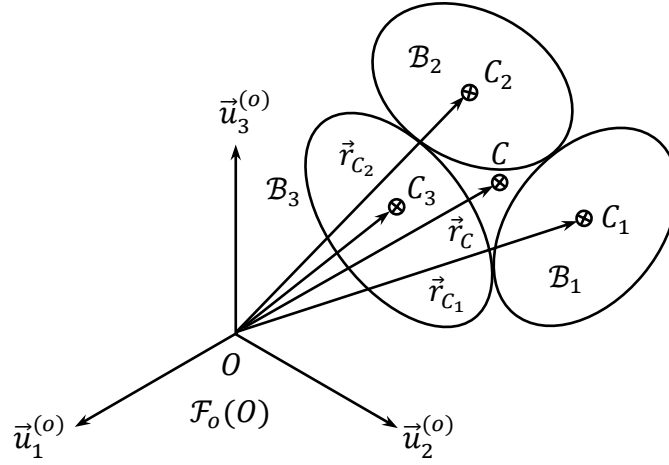
Bu belirlemeye göre ise, $\mathcal{F}_b(C)$ ile $\mathcal{F}_p(C)$ eksen takımları arasındaki birincil yönelim açıları, gerçekten de aşağıdaki en küçük değerleri almış olurlar.

$$\cos \theta_{11} = \bar{u}_1^t \bar{u}_1^* = 0.9107 \Rightarrow \theta_{11} = 24.4^\circ$$

$$\cos \theta_{22} = \bar{u}_2^t \bar{u}_2^* = 0.9107 \Rightarrow \theta_{22} = 24.4^\circ$$

$$\cos \theta_{33} = \bar{u}_3^t \bar{u}_3^* = 0.9107 \Rightarrow \theta_{33} = 24.4^\circ$$

3.1.7. Bileşik Katı Cisimler için Atalet Tensörünün Oluşturulması



Şekil 3.2 Bir Bileşik Katı Cisim

Bir çok katı cisim, atalet tensörü zaten bilinen ya da kolayca belirlenebilecek n sayıda katı cismin bileşimi biçiminde modellenebilir. Şekil 3.2'de gösterilen böyle bir katı cismin kütlesi, kütle merkezi, ve kütle merkezi etrafındaki atalet tensörü, aşağıdaki gibi belirlenir.

$$m = \sum_{k=1}^n m_k \quad (3.1.26)$$

$$\vec{r}_C = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^n m_k \vec{r}_k \quad (3.1.27)$$

$$\vec{r}_k = \vec{r}_{C_k} = \vec{r}_{OC_k} \quad (3.1.28)$$

$$\check{J}_C = \check{J}(C) = \sum_{k=1}^n \check{J}_k(C) \quad (3.1.29)$$

(3.1.29) denklemindeki $\check{J}_k(C)$ simgesi, bileşik katı cismin ögelerinden \mathcal{B}_k cisminin ortak kütle merkezi olan C noktası etrafındaki atalet tensörünü göstermektedir. Bu tensörün ifadesi şöyledir.

$$\check{J}_k(C) = \int_0^{V_k} (x_{CP}^2 \check{I} - \vec{x}_{CP} \vec{x}_{CP}) \rho_k dV \quad (3.1.30)$$

(3.1.30) denklemindeki \vec{x}_{CP} konum vektörü şöyle ayrıştırılabilir.

$$\vec{x}_{CP} = \vec{x}_{CC_k} + \vec{x}_{C_kP} = \vec{x}_k + \vec{x} \quad (3.1.31)$$

Bunun üzerine, (3.1.30) denklemi şöyle yazılabilir.

$$\begin{aligned} \check{J}_k(C) &= \int_0^{V_k} [(\vec{x}_k + \vec{x}) \cdot (\vec{x}_k + \vec{x}) \check{I} - (\vec{x}_k + \vec{x})(\vec{x}_k + \vec{x})] \rho_k dV \Rightarrow \\ \check{J}_k(C) &= \int_0^{V_k} (\vec{x}_k \cdot \vec{x}_k + 2\vec{x}_k \cdot \vec{x} + \vec{x} \cdot \vec{x}) \check{I} \rho_k dV \\ &\quad - \int_0^{V_k} (\vec{x}_k \vec{x}_k + \vec{x}_k \vec{x} + \vec{x} \vec{x}_k + \vec{x} \vec{x}) \rho_k dV \Rightarrow \\ \check{J}_k(C) &= \check{I} x_k^2 (\int_0^{V_k} \rho_k dV) + 2\check{I} \vec{x}_k \cdot (\int_0^{V_k} \vec{x} \rho_k dV) + \check{I} (\int_0^{V_k} x^2 \rho_k dV) \\ &\quad - \vec{x}_k \vec{x}_k (\int_0^{V_k} \rho_k dV) - \int_0^{V_k} \vec{x} \vec{x} \rho_k dV \\ &\quad - \vec{x}_k (\int_0^{V_k} \vec{x} \rho_k dV) - (\int_0^{V_k} \vec{x} \rho_k dV) \vec{x}_k \end{aligned} \quad (3.1.32)$$

(3.1.32) denklemindeki tümlevlerden ikisi, (3.1.2) ve (3.1.4) denklemlerine göre, aşağıdaki değerlere sahiptir.

$$\int_0^{V_k} \rho_k dV = m_k \quad (3.1.33)$$

$$\int_0^{V_k} \vec{x} \rho_k dV = \vec{0} \quad (3.1.34)$$

Yukarıdaki eşitlikler kullanılıncaya, (3.1.32) denklemi şu şekli alır.

$$\check{J}_k(C) = m_k (x_k^2 \check{I} - \vec{x}_k \vec{x}_k) + \int_0^{V_k} (x^2 \check{I} - \vec{x} \vec{x}) \rho_k dV \quad (3.1.35)$$

(3.1.35) denklemindeki tümlevli terim ise, (3.1.5) denklemi uyarınca, \mathcal{B}_k cisminin kendi kütle merkezi etrafındaki atalet tensörüne eşittir. Yani,

$$\check{J}_k = \int_0^{V_k} (x^2 \check{I} - \vec{x} \vec{x}) \rho_k dV \quad (3.1.36)$$

(3.1.36) denkleminde şu kısaltma kullanılmıştır.

$$\check{J}_k = \check{J}_k(C_k) \quad (3.1.37)$$

(3.1.36) denklemi kullanılıncaya, (3.1.35), (3.1.30) ve (3.1.29) denklemlerinden aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\check{J}_k(C) = \check{J}_k(C_k) + m_k (x_k^2 \check{I} - \vec{x}_k \vec{x}_k) \quad (3.1.38)$$

$$\check{J}(C) = \sum_{k=1}^n \check{J}_k(C_k) + \sum_{k=1}^n m_k (x_k^2 \check{I} - \vec{x}_k \vec{x}_k) \quad (3.1.39)$$

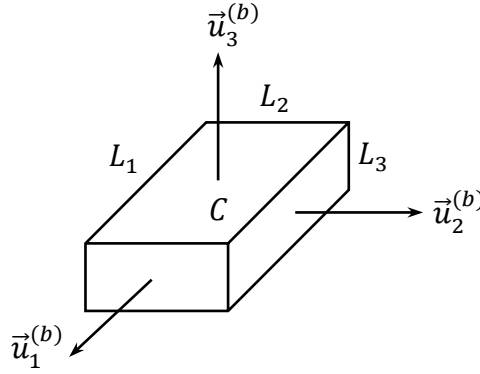
Böylece, (3.1.29) ve (3.1.37) denklemlerindeki kısaltmalarla birlikte, bileşik cismin kütle merkezi etrafındaki atalet tensörü için aşağıdaki denklem elde edilmiş olur.

$$\check{J}_C = \sum_{k=1}^n \check{J}_k + \sum_{k=1}^n m_k (x_k^2 \check{I} - \vec{x}_k \vec{x}_k) \quad (3.1.40)$$

3.1.8. Örnek: Üç Tipik Katı Cisim ve Atalet Momentleri

Burada, örnek olarak, üç tipik katı cismin atalet momentleri verilmiştir. Her üç cisim için de kullanıldığı gösterilen eksen takımları aynı zamanda asal eksen takımlarıdır. Yani, $\mathcal{F}_p(C) = \mathcal{F}_b(C)$. Dolayısıyla, her üç cismin de kullarındaki eksen takımlarına göre yalnızca atalet momentleri ($J_{11} = J_1$, $J_{22} = J_2$, $J_{33} = J_3$) vardır; atalet çarpımsalları sıfırdır. Bu cisimlerin yoğunluklarının kendi hacimleri içinde sabit olduğu varsayılmıştır.

a) Dikdörtgenler Prizması:

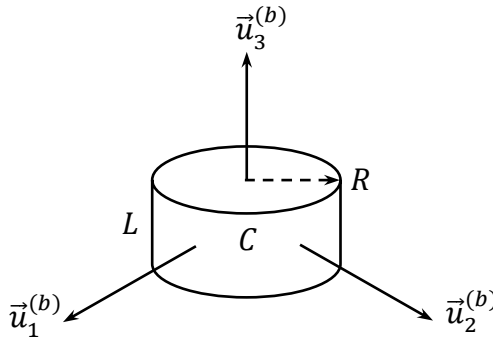


Şekil 3.3 Dikdörtgenler Prizması

Şekil 3.3'te dikdörtgenler prizması biçiminde içi dolu bir katı cisim görülmektedir. Boyutları, L_1 , L_2 , L_3 olan cismin atalet momentleri aşağıda verilmiştir.

$$J_1 = \frac{1}{12} m(L_2^2 + L_3^2), \quad J_2 = \frac{1}{12} m(L_3^2 + L_1^2), \quad J_3 = \frac{1}{12} m(L_1^2 + L_2^2) \quad (3.1.41)$$

b) Dairesel Silindir:



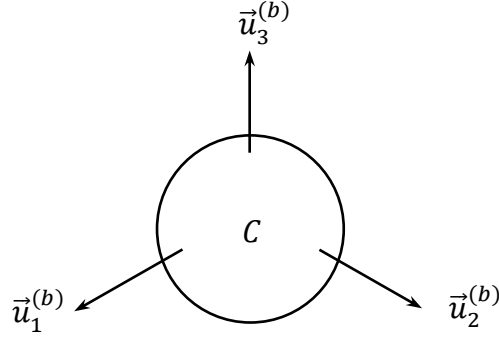
Şekil 3.4 Dairesel Silindir

Şekil 3.4'te dairesel silindir biçiminde içi dolu bir katı cisim görülmektedir. Boyu L , yarıçapı ise R olan bu cismin atalet momentleri aşağıda verilmiştir.

$$J_1 = J_2 = \frac{1}{12} m(3R^2 + L^2) \quad (3.1.42)$$

$$J_3 = \frac{1}{2} mR^2 \quad (3.1.43)$$

c) Küre:

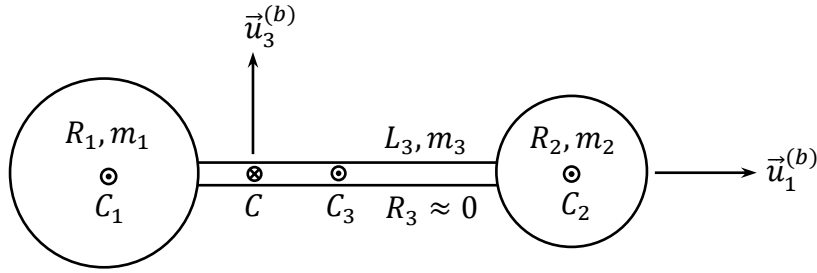


Şekil 3.5 Küre

Şekil 3.5'te küre biçiminde içi dolu bir katı cisim görülmektedir. Yarıçapı R olan bu cismin atalet momentleri aşağıda verilmiştir.

$$J_1 = J_2 = J_3 = \frac{2}{5}mR^2 \quad (3.1.44)$$

3.1.9. Örnek: Bir Bileşik Katı Cismin Atalet Tensörü



Şekil 3.6 İki Küre ve Bir Silindrsel Çubuktan Oluşan Bir Bileşik Katı Cisim

Şekil 3.6'da iki küre ve ince bir silindrsel çubuktan oluşan bir katı cisim görülmektedir. Kütlesi $m = m_1 + m_2 + m_3$ olan bileşik katı cismin kütle merkezi, $\mathcal{F}_b(C)$ eksen takımına göre aşağıdaki denklemleri sağlayacak biçimde belirlenir.

$$x_C = 0 = \frac{1}{m}(m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3) \quad (3.1.45)$$

Öge cisimlerin kütle merkezlerinin koordinatları arasında şu ilişkiler vardır.

$$x_1 = x_3 - (L_3/2 + R_1) \quad (3.1.46)$$

$$x_2 = x_3 + (L_3/2 + R_2) \quad (3.1.47)$$

(3.1.46) ve (3.1.47) denklemleri, (3.1.45) denkleminde yerine konduktan sonra yapılan işlemlerle x_3 koordinatı şöyle elde edilir.

$$\begin{aligned} m_1[x_3 - (L_3/2 + R_1)] + m_2[x_3 + (L_3/2 + R_2)] + m_3x_3 &= 0 \Rightarrow \\ x_3 &= [(m_1 - m_2)(L_3/2) + (m_1R_1 - m_2R_2)]/m \end{aligned} \quad (3.1.48)$$

Böylece, (3.1.46) ve (3.1.47) denklemleri aracılığıyla x_1 ve x_2 koordinatları da bulunmuş olur.

Bileşik cismin C noktası etrafındaki atalet tensörü ise şöyle bulunur.

$$\begin{aligned} \check{J}_C = \check{J}(C) &= \check{J}_1(C_1) + \check{J}_2(C_2) + \check{J}_3(C_3) + m_1[x_1^2\check{I} - x_1^2\vec{u}_1^{(b)}\vec{u}_1^{(b)}] \\ &+ m_2[x_2^2\check{I} - x_2^2\vec{u}_1^{(b)}\vec{u}_1^{(b)}] + m_3[x_3^2\check{I} - x_3^2\vec{u}_1^{(b)}\vec{u}_1^{(b)}] \end{aligned} \quad (3.1.49)$$

(3.1.49) denkleminde yer alan $\check{J}_1(C_1)$, $\check{J}_2(C_2)$, ve $\check{J}_3(C_3)$ atalet tensörleri, öge cisimler için Kısım 3.1.8'deki örneklere bakılarak şöyle ifade edilebilir.

$$\check{J}_1 = \check{J}_1(C_1) = \frac{2}{5}m_1R_1^2[\vec{u}_1^{(b)}\vec{u}_1^{(b)} + \vec{u}_2^{(b)}\vec{u}_2^{(b)} + \vec{u}_3^{(b)}\vec{u}_3^{(b)}] \quad (3.1.50)$$

$$\check{J}_2 = \check{J}_2(C_2) = \frac{2}{5}m_2R_2^2[\vec{u}_1^{(b)}\vec{u}_1^{(b)} + \vec{u}_2^{(b)}\vec{u}_2^{(b)} + \vec{u}_3^{(b)}\vec{u}_3^{(b)}] \quad (3.1.51)$$

$$\check{J}_3 = \check{J}_3(C_3) = \frac{1}{12}m_3L_3^2[\vec{u}_2^{(b)}\vec{u}_2^{(b)} + \vec{u}_3^{(b)}\vec{u}_3^{(b)}] \quad (3.1.52)$$

(3.1.52) denkleminde, $R_3 \approx 0$ olmasının sağladığı yaklaşık ifade kullanılmıştır. Öte yandan, birim tensör de şöyle ifade edilebilir.

$$\check{I} = \vec{u}_1^{(b)}\vec{u}_1^{(b)} + \vec{u}_2^{(b)}\vec{u}_2^{(b)} + \vec{u}_3^{(b)}\vec{u}_3^{(b)} \quad (3.1.53)$$

(3.1.50) – (3.1.53) denklemleri, (3.1.49) denkleminde yerine konunca, bileşik cismin atalet tensörü şöyle elde edilir.

$$\begin{aligned} \check{J}_C &= \frac{2}{5}m_1R_1^2[\vec{u}_1^{(b)}\vec{u}_1^{(b)} + \vec{u}_2^{(b)}\vec{u}_2^{(b)} + \vec{u}_3^{(b)}\vec{u}_3^{(b)}] \\ &+ \frac{2}{5}m_2R_2^2[\vec{u}_1^{(b)}\vec{u}_1^{(b)} + \vec{u}_2^{(b)}\vec{u}_2^{(b)} + \vec{u}_3^{(b)}\vec{u}_3^{(b)}] \\ &+ \frac{1}{12}m_3L_3^2[\vec{u}_2^{(b)}\vec{u}_2^{(b)} + \vec{u}_3^{(b)}\vec{u}_3^{(b)}] + m_3x_3^2[\vec{u}_2^{(b)}\vec{u}_2^{(b)} + \vec{u}_3^{(b)}\vec{u}_3^{(b)}] \\ &+ m_1x_1^2[\vec{u}_2^{(b)}\vec{u}_2^{(b)} + \vec{u}_3^{(b)}\vec{u}_3^{(b)}] + m_2x_2^2[\vec{u}_2^{(b)}\vec{u}_2^{(b)} + \vec{u}_3^{(b)}\vec{u}_3^{(b)}] \Rightarrow \\ \check{J}_C &= \frac{2}{5}(m_1R_1^2 + m_2R_2^2)\vec{u}_1^{(b)}\vec{u}_1^{(b)} \\ &+ [\frac{2}{5}(m_1R_1^2 + m_2R_2^2) + \frac{1}{12}m_3L_3^2 + m_1x_1^2 + m_2x_2^2 + m_3x_3^2]\vec{u}_2^{(b)}\vec{u}_2^{(b)} \\ &+ [\frac{2}{5}(m_1R_1^2 + m_2R_2^2) + \frac{1}{12}m_3L_3^2 + m_1x_1^2 + m_2x_2^2 + m_3x_3^2]\vec{u}_3^{(b)}\vec{u}_3^{(b)} \end{aligned} \quad (3.1.54)$$

3.2. Bir Katı Cisme İlişkin Kuvvet-Moment ya da Newton-Euler Denklemleri

3.2.1. Kuvvet Denklemi ya da Newton Denklemi

Şekil 3.1'de görülen katı cisim için kuvvet denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$m\vec{a}_C = \Sigma\vec{F} \quad (3.2.1)$$

(3.2.1) denklemindeki $\Sigma\vec{F}$ simgesi, katı cisme etki eden toplam kuvveti göstermektedir. Aynı denklemdeki \vec{a}_C simgesi ise, katı cismin kütle merkezinin ataletsel olduğu varsayılan $\mathcal{F}_o(O)$ eksen takımına göre tanımlanmış olan ivmesini göstermektedir. Bu ivme şöyle tanımlanmıştır.

$$\vec{a}_C = \vec{a}_{C/O/\mathcal{F}_o} = D_o^2\vec{r}_{C/O} = D_o^2\vec{r}_C = [d^2\vec{r}_C/dt^2]|_{\mathcal{F}_o} \quad (3.2.2)$$

(3.2.1) denklemi, $\mathcal{F}_o(O)$ ya da $\mathcal{F}_b(C)$ eksen takımlarında aşağıdaki matris denklemleri biçiminde de yazılabilir.

$\mathcal{F}_o(O)$ eksen takımındaki matris denklemi:

$$m\bar{a}_C^{(o)} = \Sigma \bar{F}^{(o)} \quad (3.2.3)$$

$\mathcal{F}_b(C)$ eksen takımındaki matris denklemi:

$$m\bar{a}_C^{(b)} = \Sigma \bar{F}^{(b)} \quad (3.2.4)$$

(3.2.3) ve (3.2.4) denklemlerindeki dikeysıra matrisleri arasında, iki eksen takımı arasındaki dönüşüm matrisi olan $\hat{C}^{(b,o)}$ aracılığıyla ifade edilen aşağıdaki ilişkiler vardır.

$$\Sigma \bar{F}^{(b)} = \hat{C}^{(b,o)}[\Sigma \bar{F}^{(o)}] \quad (3.2.5)$$

$$\bar{a}_C^{(o)} = \ddot{r}_C^{(o)} \quad (3.2.6)$$

$$\bar{a}_C^{(b)} = \hat{C}^{(b,o)}\bar{a}_C^{(o)} = \hat{C}^{(b,o)}\ddot{r}_C^{(o)} \quad (3.2.7)$$

Katı cismin kütle merkezinin koordinatları doğal olarak $\mathcal{F}_o(O)$ eksen takımına göre belirtilir. Diğer bir deyişle, \vec{r}_C vektörü, $\mathcal{F}_o(O)$ eksen takımında ifade edilir. Bu ifade kısaca şöyle gösterilebilir.

$$\vec{r}_C = \sum_{k=1}^3 r_k \vec{u}_k^{(o)} \quad (3.2.8)$$

(3.2.8) denkleminin $\mathcal{F}_o(O)$ eksen takımındaki matris karşılığı şudur.

$$\bar{r}_C^{(o)} = \sum_{k=1}^3 r_k \bar{u}_k^{(o/o)} = \sum_{k=1}^3 r_k \bar{u}_k \quad (3.2.9)$$

(3.2.9) denklemindeki $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$ simgeleri, Bölüm 1'den hatırlanacağı üzere, aşağıdaki gibi tanımlanmış olan temel dikeysıra matrislerini göstermektedir.

$$\bar{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.2.10)$$

Yukarıdaki denklemlere göre, \vec{a}_C ile $\bar{a}_C^{(o)}$ şöyle elde edilirler.

$$\vec{a}_C = D_o^2 \vec{r}_C = \sum_{k=1}^3 \ddot{r}_k \vec{u}_k^{(o)} \quad (3.2.11)$$

$$\bar{a}_C^{(o)} = \ddot{r}_C^{(o)} = \sum_{k=1}^3 \ddot{r}_k \bar{u}_k \quad (3.2.12)$$

3.2.2. Moment Denklemi ya da Euler Denklemi

Şekil 3.1'de görülen katı cisim için moment denklemi, kütle merkezi olan C noktası etrafında, aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$D_o \vec{H}_C = [d\vec{H}_C/dt]_{\mathcal{F}_o} = \Sigma \vec{M}_C \quad (3.2.13)$$

(3.2.13) denklemindeki $\Sigma \vec{M}_C$ simgesi, katı cisme C noktası etrafında etki eden toplam momenti göstermektedir. Aynı denklemdeki \vec{H}_C simgesi ise, katı cismin kütle merkezi etrafındaki *açısız momentum* vektörünü göstermektedir. Bu vektör şöyle tanımlanmıştır.

$$\vec{H}_C = \check{J}_C \cdot \vec{\omega} \quad (3.2.14)$$

(3.2.14) denklemindeki \check{J}_C katı cismin kütle merkezi etrafındaki atalet tensörüdür. Aynı denklemindeki $\vec{\omega}$ ise, katı cismin, yani $\mathcal{F}_b(C)$ eksen takımının, $\mathcal{F}_o(O)$ eksen takımına göre tanımlanmış olan *açısal hız* vektörüdür. Daha ayrıntılı bir gösterimle,

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_{b/o} \quad (3.2.15)$$

Öte yandan, Kısım 3.1'de belirtildiği gibi, \check{J}_C tensörü, $\mathcal{F}_b(C)$ eksen takımında sabit bileşenlerle ifade edilir. Diğer bir deyişle, aşağıdaki ifadedeki J_{ij} atalet terimleri sabittir.

$$\check{J}_C = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 J_{ij} \vec{u}_i^{(b)} \vec{u}_j^{(b)} \quad (3.2.16)$$

Dolayısıyla,

$$D_b \check{J}_C = [d\check{J}_C/dt]_{\mathcal{F}_b} = \check{0} \quad (3.2.17)$$

Atalet tensörünün yukarıda belirtilen özelliğinden yararlanmak amacıyla, *Coriolis-Transport teoremi* kullanılarak (3.2.13) denklemi şöyle yazılabilir.

$$D_o \vec{H}_C = D_b \vec{H}_C + \vec{\omega}_{b/o} \times \vec{H}_C = \Sigma \vec{M}_C \quad (3.2.18)$$

(3.2.14) ve (3.2.15) denklemleri yerine konunca, (3.2.18) denklemi şu şekli alır.

$$\check{J}_C \cdot \vec{\alpha} + \vec{\omega} \times \check{J}_C \cdot \vec{\omega} = \Sigma \vec{M}_C \quad (3.2.19)$$

Euler denklemi olarak da anılan yukarıdaki moment denklemi şöyle de yazılabilir.

$$\check{J}_C \cdot \vec{\alpha} = \vec{M}_{Cg} + \Sigma \vec{M}_C \quad (3.2.20)$$

(3.2.20) denklemindeki \vec{M}_{Cg} terimi, *jiroskopik moment* olarak adlandırılır ve şöyle tanımlanır.

$$\vec{M}_{Cg} = -\vec{\omega} \times \check{J}_C \cdot \vec{\omega} \quad (3.2.21)$$

(3.2.19) ve (3.2.20) denklemlerindeki $\vec{\alpha}$, katı cismin $\mathcal{F}_o(O)$ eksen takımına göre tanımlanan *açısal ivme* vektörüdür. Ancak, Coriolis-Transport teoremi sayesinde, $\vec{\omega} = \vec{\omega}_{b/o}$ vektörünün $\mathcal{F}_b(C)$ eksen takımına göre türevi alınarak da elde edilebilmektedir. Yani,

$$\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_{b/o} = D_o \vec{\omega}_{b/o} = D_b \vec{\omega}_{b/o} = D_b \vec{\omega} \quad (3.2.22)$$

Eğer (3.2.19) sayılı vektör denklemi, matris denklemi biçiminde yazılmak istenirse, bu amaçla seçilebilecek en uygun eksen takımı $\mathcal{F}_b(C)$ olur, çünkü \check{J}_C tensörünün $\mathcal{F}_b(C)$ eksen takımındaki matris gösterimi sabittir. $\mathcal{F}_b(C)$ seçilince, istenen matris denklemi şöyle elde edilir.

$$\hat{J}_C^{(b)} \vec{\alpha}^{(b)} + \vec{\omega}^{(b)} \hat{J}_C^{(b)} \vec{\omega}^{(b)} = \Sigma \vec{M}_C^{(b)} \quad (3.2.23)$$

Bu arada, (3.2.22) denklemine göre,

$$\vec{\alpha}^{(b)} = [D_b \vec{\omega}]^{(b)} = \dot{\vec{\omega}}^{(b)} \quad (3.2.24)$$

Dolayısıyla, (3.2.23) denklemi şöyle de yazılabilir.

$$\hat{J}_C^{(b)} \dot{\vec{\omega}}^{(b)} + \vec{\omega}^{(b)} \hat{J}_C^{(b)} \vec{\omega}^{(b)} = \Sigma \vec{M}_C^{(b)} \quad (3.2.25)$$

Eğer katı cisme bağlı eksen takımı asal bir eksen takımıysa, yani $\mathcal{F}_b(C) = \mathcal{F}_p(C)$ ise, (3.2.25) denklemi, matrislerin elemanları görünecek biçimde şöyle yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \\ \dot{\omega}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma M_1 \\ \Sigma M_2 \\ \Sigma M_3 \end{bmatrix} \quad (3.2.26)$$

(3.2.26) denkleminde aşağıdaki *skalar Euler denklemleri* elde edilir.

$$J_1 \dot{\omega}_1 + (J_3 - J_2) \omega_2 \omega_3 = \Sigma M_1 \quad (3.2.27)$$

$$J_2 \dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3) \omega_3 \omega_1 = \Sigma M_2 \quad (3.2.28)$$

$$J_3 \dot{\omega}_3 + (J_2 - J_1) \omega_1 \omega_2 = \Sigma M_3 \quad (3.2.29)$$

Yukarıdaki denklemler şöyle de yazılabilir.

$$\dot{\omega}_1 = \tau_1 - \gamma_1 \omega_2 \omega_3 \quad (3.2.30)$$

$$\dot{\omega}_2 = \tau_2 + \gamma_2 \omega_3 \omega_1 \quad (3.2.31)$$

$$\dot{\omega}_3 = \tau_3 - \gamma_3 \omega_1 \omega_2 \quad (3.2.32)$$

Son yazılan denklemler, şu tanımları içermektedir.

a) Birimsiz Atalet Katsayıları:

$$\gamma_1 = (J_3 - J_2)/J_1 \quad (3.2.33)$$

$$\gamma_2 = (J_3 - J_1)/J_2 \quad (3.2.34)$$

$$\gamma_3 = (J_2 - J_1)/J_3 \quad (3.2.35)$$

Not: Yukarıdaki katsayılar, $J_1 \leq J_2 \leq J_3$ olduğu varsayımıyla, $k = 1, 2, 3$ için $\gamma_k \geq 0$ olacak biçimde tanımlanmışlardır.

b) Özgül Momentler:

$$\tau_k = (\Sigma M_k)/J_k ; k = 1, 2, 3 \quad (3.2.36)$$

(3.2.27) – (3.2.29) ya da (3.2.30) – (3.2.32) denklem grupları, jiroskopik moment terimlerinin, katı cismin asal eksenleri etrafındaki açısal hareketleri arasında genelde nasıl bir bağlaşıklık oluşturduğunu göstermektedir.

3.2.3. Açısal Hız Bileşenleri Sabit Olan Özel Dönme Hareketleri

Bir katı cisim, ataletsel simetri durumuna bağlı olarak, asal eksenleri etrafında sabit açısal hız bileşenleriyle dönme hareketleri yapabilir. Bu tür özel dönme hareketleri, üç farklı ataletsel simetri durumu için aşağıda incelenmiştir.

a) Tam Ataletsel Simetrik Katı Cisimler:

Böyle bir katı cismin her üç atalet momenti birbirine eşittir. Yani,

$$J_1 = J_2 = J_3 = J_0 \quad (3.2.37)$$

Dolayısıyla, skalar Euler denklemleri, aşağıda görüldüğü gibi, ayrışık hale gelir.

$$J_0 \dot{\omega}_1 = \Sigma M_1 \Rightarrow \dot{\omega}_1 = \tau_1 \quad (3.2.38)$$

$$J_0 \dot{\omega}_2 = \Sigma M_2 \Rightarrow \dot{\omega}_2 = \tau_2 \quad (3.2.39)$$

$$J_0 \dot{\omega}_3 = \Sigma M_3 \Rightarrow \dot{\omega}_3 = \tau_3 \quad (3.2.40)$$

Yukarıdaki denklemlere göre, söz konusu olan katı cismin kendine bağlı eksenlerden birinin etrafındaki açısal hareketi, yalnızca o eksen etrafında uygulanan bir momentle, kendine bağlı diğer iki eksen etrafındaki açısal hareketlerini etkilemeden kontrol edilebilir.

Aynı denklemlere göre, eğer bu cisme uygulanan net moment vektörü sıfırsa, yani $\Sigma M_1 = \Sigma M_2 = \Sigma M_3 = 0$ ise, bu cisim, açısal hız vektörü hiç değişmeden sürekli dönebilir.

a) Yarı Ataletsel Simetrik Katı Cisimler:

Böyle bir katı cismin atalet momentlerinden ikisi, üçüncüden farklı olmak üzere, birbirine eşittir. Böyle bir katı cismin asal eksenleri, üçüncü asal eksen simetri eksenine olacak biçimde düzenlenebilir. Bu düzenlemeye göre, cismin atalet momentleri, aşağıdaki gibi tanımlanıp gösterilebilir.

$$J_1 = J_2 = J_n \neq J_3 = J_s \quad (3.2.41)$$

Böyle bir katı cisim için genel skalar Euler denklemleri, aşağıdaki özel biçimlere dönüşür.

$$J_n \dot{\omega}_1 + (J_s - J_n) \omega_3 \omega_2 = \Sigma M_1 \quad (3.2.42)$$

$$J_n \dot{\omega}_2 + (J_n - J_s) \omega_3 \omega_1 + \Sigma M_2 \quad (3.2.43)$$

$$J_s \dot{\omega}_3 = \Sigma M_3 \quad (3.2.44)$$

Yukarıdaki denklemler şöyle de yazılabilir.

$$\dot{\omega}_1 = \tau_1 - \gamma \omega_3 \omega_2 \quad (3.2.45)$$

$$\dot{\omega}_2 = \tau_2 + \gamma \omega_3 \omega_1 \quad (3.2.46)$$

$$\dot{\omega}_3 = \tau_3 \quad (3.2.47)$$

(3.2.45) ve (3.2.46) denklemlerindeki γ parametresi şöyle tanımlanmıştır.

$$\gamma = (J_s - J_n)/J_n = (J_s/J_n) - 1 \quad (3.2.48)$$

(3.2.45) – (3.2.47) denklemlerine göre, söz konusu cismin simetri eksenine etrafındaki açısal hareketi, diğer iki eksen etrafındaki açısal hareketlerinden bağımsız olarak kontrol edilebilir. Bu cismin diğer iki eksen etrafındaki açısal hareketleri ise, γ parametresinin varlığı nedeniyle birbirlerine bağlıdır.

Söz konusu cismin açısal hız bileşenlerinin sıfırdan farklı fakat sabit olduğu bir hareket yapması mümkündür. Ancak, böyle bir hareket, bu cisme simetri eksenine etrafında sıfır net moment, diğer eksenleri etrafında ise sıfırdan farklı fakat sabit birer moment uygulanarak sağlanabilir. Böyle bir hareket esnasında (3.2.45) – (3.2.47) denklemleri, aşağıdaki denklemlere indirgenir.

$$\tau_3 = 0 \Rightarrow \omega_3 = \text{sabit} \quad (3.2.49)$$

$$\tau_1 = +(\gamma \omega_3) \omega_2 = +k_3 \omega_2 \quad (3.2.50)$$

$$\tau_2 = -(\gamma \omega_3) \omega_1 = -k_3 \omega_1 \quad (3.2.51)$$

(3.2.50) ve (3.2.51) denklemlerine göre, birinci eksen etrafında sabit bir açısal hız (ω_1) elde edebilmek için ikinci eksen etrafında sabit bir özgül moment (τ_2) uygulamak gerekmektedir. Benzer biçimde, ikinci eksen etrafında sabit bir açısal hız (ω_2) elde edebilmek için birinci eksen etrafında sabit bir özgül moment (τ_1) uygulamak gerekmektedir. Bu olay, "jirasyon" olarak adlandırılır. Bu olaydaki çapraz ilişkiyi betimleyen $k_3 = \gamma\omega_3$ parametresi ise, "jirasyon katsayısı" olarak tanımlanır. Jirasyon olayı sayesinde bir topacın devrilmeden dönmesi ya da bir metal paranın devrilmeden yuvarlanarak ilerlemesi mümkün olabilmektedir.

c) Ataletsel Simetrisi Olmayan Katı Cisimler:

(3.2.30) – (3.2.32) denlemlerine göre, ataletsel simetriye sahip olmayan bir katı cismin asal eksenleri etrafında sabit açısal hız bileşenleriyle hareket edebilmesi için, bu cisme asal eksenleri etrafında aşağıdaki denklemleri sağlayan sabit özgül momentlerin uygulanması gerekir.

$$\tau_1 = +\gamma_1\omega_2\omega_3 \quad (3.2.52)$$

$$\tau_2 = -\gamma_2\omega_3\omega_1 \quad (3.2.53)$$

$$\tau_3 = +\gamma_3\omega_1\omega_2 \quad (3.2.54)$$

Yukarıdaki denklemlere göre, aşağıda belirtilen özel açısal hareket biçimleri ortaya çıkabilir.

(i) Eğer açısal hız bileşenlerinden biri sıfır, diğer ikisi sıfırdan farklıysa, aşağıdaki durumlar ortaya çıkar. Bu durumlar öyledir ki, sıfır olmayan açısal hız bileşenleri, ancak, sıfır olan açısal hız bileşeninin eksenini etrafında uygulanan sıfırdan farklı tek bir özgül moment ile sağlanabilir.

$$\omega_3 = 0 \Rightarrow \tau_1 = \tau_2 = 0, \tau_3 = +\gamma_3\omega_1\omega_2 \neq 0 \quad (3.2.55)$$

$$\omega_1 = 0 \Rightarrow \tau_2 = \tau_3 = 0, \tau_1 = +\gamma_1\omega_2\omega_3 \neq 0 \quad (3.2.56)$$

$$\omega_2 = 0 \Rightarrow \tau_3 = \tau_1 = 0, \tau_2 = -\gamma_2\omega_3\omega_1 \neq 0 \quad (3.2.57)$$

(ii) Eğer $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 0$ ve açısal hız bileşenlerinden ikisi sıfır ise, üçüncü açısal hız bileşeni sıfırdan farklı olabilir. Ne var ki, böyle bir açısal hareket, $\{\omega_1 \neq 0, \omega_2 \approx \omega_3 \approx 0\}$ ya da $\{\omega_3 \neq 0, \omega_1 \approx \omega_2 \approx 0\}$ için kararlı olurken, $\{\omega_2 \neq 0, \omega_3 \approx \omega_1 \approx 0\}$ için kararlı olamaz. Bunu görebilmek için (3.2.30) – (3.2.32) denklemleri, $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 0$ için şöyle yazılır.

$$\dot{\omega}_1 = -\gamma_1\omega_2\omega_3, \dot{\omega}_2 = +\gamma_2\omega_3\omega_1, \dot{\omega}_3 = -\gamma_3\omega_1\omega_2 \quad (3.2.58)$$

(3.2.58) denklem grubundan ikili bileşimlerle aşağıdaki denklemler elde edilebilir.

$$\gamma_2\omega_1\dot{\omega}_1 + \gamma_1\omega_2\dot{\omega}_2 = 0 \Rightarrow \gamma_2\omega_1^2 + \gamma_1\omega_2^2 = c_{12} = \text{sabit} \quad (3.2.59)$$

$$\gamma_3\omega_2\dot{\omega}_2 + \gamma_2\omega_3\dot{\omega}_3 = 0 \Rightarrow \gamma_3\omega_2^2 + \gamma_2\omega_3^2 = c_{23} = \text{sabit} \quad (3.2.60)$$

$$\gamma_1\omega_3\dot{\omega}_3 - \gamma_3\omega_1\dot{\omega}_1 = 0 \Rightarrow \gamma_1\omega_3^2 - \gamma_3\omega_1^2 = c_{31} = \text{sabit} \quad (3.2.61)$$

(3.2.59) denklemine göre, ω_1 ve ω_2 bileşenleri, asal eksen takımının 1-2 düzlemindeki bir *elips* üzerinde yer alır. Dolayısıyla, $\omega_1 \approx \omega_2 \approx 0$ olduğu için, $\vec{\omega} \approx \omega_3\vec{u}_3$ yakınlığı devam eder.

(3.2.60) denklemine göre, ω_2 ve ω_3 bileşenleri, asal eksen takımının 2-3 düzlemindeki bir *elips* üzerinde yer alır. Dolayısıyla, $\omega_2 \approx \omega_3 \approx 0$ olduğu için, $\vec{\omega} \approx \omega_1\vec{u}_1$ yakınlığı da devam eder.

(3.2.61) denklemine göre ise, ω_3 ve ω_1 bileşenleri, asal eksen takımının 3-1 düzlemindeki bir *hiperbol* üzerinde yer alır. Bu nedenle, ω_3 ve ω_1 hareketin başlangıcında küçük olsalar bile, küçük kalamazlar. Dolayısıyla, $\vec{\omega}$ vektörü, başlangıçta yakın olduğu $\omega_2\vec{u}_2$ vektöründen giderek uzaklaşır.

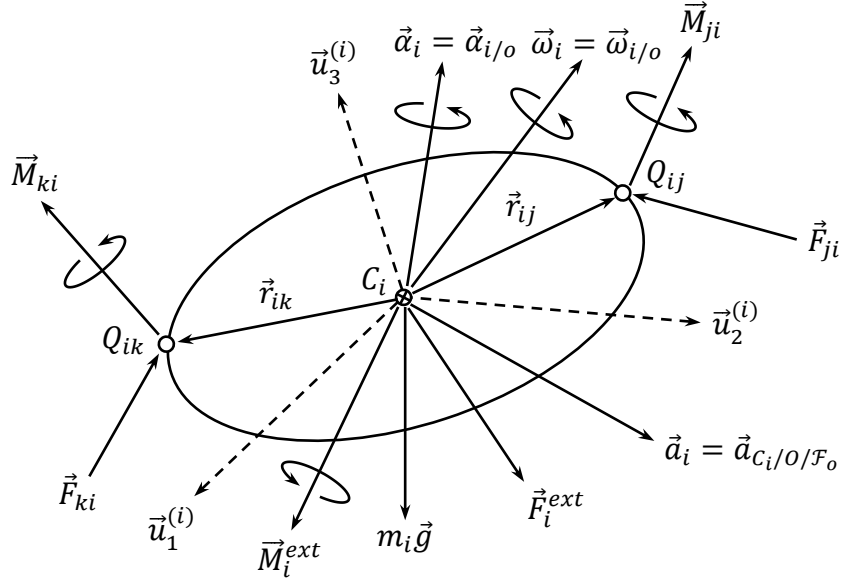
Bu sonuca göre, bir katı cismin serbest (moment uygulaması olmayan) dönme hareketleri, atalet momentlerinin en küçük ve en büyük olduğu asal eksenler etrafında kararlı olabilirken atalet momentinin ortanca olduğu asal eksen etrafında kararlı olamamaktadır.

BÖLÜM 4

KATI CİSİM SİSTEMLERİNİN DİNAMİK ANALİZİ

4.1. Sistemdeki Dinamik İlişkilerin Newton-Euler Denklemleriyle İfade Edilmesi

4.1.1. Sistemdeki Cisimlere Ait Newton-Euler Denklemleri



Şekil 4.1 Bir Katı Cisim Sisteminin Tipik bir Ögesi

Şekil 4.1'de bir katı cisim sisteminin tipik bir ögesi (B_i) görülmektedir. Şekilde, B_i cisminin B_j ve B_k gibi iki başka cisimle etkileşim halinde olduğu gösterilmiştir. Ancak, genelde, daha farklı sayıda cisimle de etkileşim halinde olabilir. B_i cismine ait çeşitli tanımlamalar aşağıda verilmiştir.

m_i : B_i cisminin kütlesi

$m_i \vec{g}$: B_i cisminin ağırlığı

C_i : B_i cisminin kütle merkezi

$\vec{J}_i = \vec{J}_i(C_i)$: B_i cisminin kendi kütle merkezi etrafındaki atalet tensörü

Q_{ij} : B_i cisminin B_j cismiyle etkileştiği temas noktası

Not: Eğer B_i ile B_j arasında birden çok temas noktası varsa ve mekanikçe eşdeğerli tek noktalı temas modeli kullanılmak istenmiyorsa, temas noktaları, Q'_{ij} , Q''_{ij} , ... gibi simgelerle gösterilebilir.

\vec{r}_{ij} : Q_{ij} noktasının C_i noktasına göre konum vektörü

\vec{F}_{ji} : B_j cisminin B_i cismine Q_{ij} noktasında uyguladığı etkileşim kuvveti

\vec{M}_{ji} : B_j cisminin B_i cismine Q_{ij} noktası etrafında uyguladığı etkileşim momenti

\vec{F}_i^{ext} : \mathcal{B}_i cisminin sistem dışından C_i noktasında uygulanan net kuvvet

\vec{M}_i^{ext} : \mathcal{B}_i cisminin sistem dışından C_i noktası etrafında uygulanan net moment

Dinamik analizi yapabilmek için, sistemdeki toplam $n^* = n + 1$ adet katı cisimden biri (\mathcal{B}_0) zemin olarak tanımlanır. Bu bölümde, zeminin $\mathcal{F}_a(A)$ gibi bir *ataletsel* eksen takımına göre ya hareketsiz durduğu ya da yalnızca sabit bir ötelenme hızıyla hareket ettiği varsayılmaktadır. Bu varsayıma göre, zemine bağlanan $\mathcal{F}_0(O)$ eksen takımı da ataletsel olmaktadır.

Zemine göre hareket edebilen katı cisimlerin her biri için, örneğin \mathcal{B}_i cisimi için, Newton-Euler denklemleri (ya da kuvvet ve moment denklemleri) aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$m_i \vec{a}_i = m_i \vec{g} + \vec{F}_i^{ext} + \sum_{j=0}^n \vec{F}_{ji} \quad (4.1.1)$$

$$\check{J}_i \cdot \vec{\alpha}_i + \vec{\omega}_i \times \check{J}_i \cdot \vec{\omega}_i = \vec{M}_i^{ext} + \sum_{j=0}^n (\vec{M}_{ji} + \vec{r}_{ij} \times \vec{F}_{ji}) \quad (4.1.2)$$

(4.1.1) ve (4.1.2) denklemleri, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ için yazılmıştır. Bu denklemlerde, $j = 0$ durumu, \mathcal{B}_i cisminin zeminle (yani \mathcal{B}_0 cismiyle) etkileşimi varsa ortaya çıkar. Tabii, \vec{F}_{ji} ile \vec{M}_{ji} ancak \mathcal{B}_i ile \mathcal{B}_j cisimleri arasında temas varsa sıfırdan farklı olur. Ayrıca, \mathcal{B}_i cisimi doğal olarak kendisiyle etkileşemediği için $\vec{F}_{ii} = \vec{0}$ ve $\vec{M}_{ii} = \vec{0}$ olur. Öte yandan, Newton'un üçüncü yasasına göre, \mathcal{B}_i ile \mathcal{B}_j cisimleri arasındaki etkileşimler, *eşit büyüklüklü ve eşdoğrusal fakat zıt yönlüdür*. Yani,

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji} \quad (4.1.3)$$

$$\vec{M}_{ij} = -\vec{M}_{ji} \quad (4.1.4)$$

Sistemin hareketi zemine bağlı olan $\mathcal{F}_0(O)$ eksen takımına göre ölçümlendiği için (4.1.1) ve (4.1.2) denklemlerindeki hareket gösteren vektörler şöyle tanımlanmıştır.

$$\vec{\omega}_i = \vec{\omega}_{i/0} : \mathcal{B}_i \text{ cisminin } \mathcal{F}_0(O) \text{ 'ya göre açısal hızı} \quad (4.1.5)$$

$$\vec{\alpha}_i = \vec{\alpha}_{i/0} : \mathcal{B}_i \text{ cisminin } \mathcal{F}_0(O) \text{ 'ya göre açısal ivmesi} \quad (4.1.6)$$

$$\vec{a}_i = \vec{a}_{C_i/O/\mathcal{F}_0} = D_0^2 \vec{r}_{C_i/O} : C_i \text{ kütle merkezinin } \mathcal{F}_0(O) \text{ 'ya göre ivmesi} \quad (4.1.7)$$

4.1.2. Etkileşim Kuvvet ve Momentlerinin Ayrıntıları

(4.1.1) ve (4.1.2) denklemlerinde, \mathcal{B}_j cisminin \mathcal{B}_i cisimi üzerindeki etkisini gösteren \vec{F}_{ji} kuvveti ile \vec{M}_{ji} momentinin bileşenleri, \mathcal{B}_i cisminin uygulandıkları için doğal olarak $\mathcal{F}_{ij}(O_{ij})$ eksen takımında ifade edilirler. Bu eksen takımı, \mathcal{J}_{ij} ekleminin \mathcal{B}_i cisimi üzerindeki \mathcal{E}_{ij} kinematik elemanına bağlanmıştır. $\mathcal{F}_{ij}(O_{ij})$ ile $\mathcal{F}_{ji}(O_{ji})$ eksen takımlarının yönelimleri ve yerleşimleri öylesine seçilir ki, \mathcal{E}_{ji} ile \mathcal{E}_{ij} kinematik elemanları arasındaki bağıl hareketin kinematik ifadesinin en basit olması sağlanır.

Birbirleriyle anlık ya da sürekli olarak aynı konumu paylaşan Q_{ij} ile Q_{ji} temas noktaları ise, genelde, O_{ij} ile O_{ji} orijin noktalarından farklı yerlerde bulunurlar.

\vec{F}_{ji} kuvveti ile \vec{M}_{ji} momentini, $\mathcal{F}_{ij}(O_{ij})$ eksen takımında şöyle ifade edilebilir.

$$\vec{F}_{ji} = \sum_{k=1}^3 F_{jik}^{(ij)} \vec{u}_k^{(ij)} \quad (4.1.8)$$

$$\vec{M}_{ji} = \sum_{k=1}^3 M_{jik}^{(ij)} \vec{u}_k^{(ij)} \quad (4.1.9)$$

J_{ij} eklemının tipine bağılı olarak $F_{jik}^{(ij)}$ ve $M_{jik}^{(ij)}$ bileşenleri, aşağıda belirtilen türlerden biriyle karakterize edilebilir.

a) Yapısal (Strüktürel) Tepki Kuvveti

Bu kuvvet, $\vec{u}_k^{(ij)}$ doğrultusunda ötelenme serbestliğı yoksa ortaya çıkar. Bu kuvvet, gerektiğinde, "str" üstyazıtıyla şöyle gösterilebilir.

$$F_{jik}^{(ij)} = F_{jik}^{str(ij)} \quad (4.1.10)$$

b) Yapısal (Strüktürel) Tepki Momenti

Bu moment, $\vec{u}_k^{(ij)}$ etrafında dönme serbestliğı yoksa ortaya çıkar. Bu moment, gerektiğinde, "str" üstyazıtıyla şöyle gösterilebilir.

$$M_{jik}^{(ij)} = M_{jik}^{str(ij)} \quad (4.1.11)$$

c) Bağılı Harekete Direnç (Rezistans) Kuvveti

Eğer $\vec{u}_k^{(ij)}$ doğrultusunda ötelenme serbestliğı varsa ve eklem dirençsizse, böyle bir kuvvet oluşmaz. Fakat, eklemde, bağılı yerdeğıştirmeye karşı bir esneme direnci ve/veya bağılı hıza karşı bir sürtünme direnci varsa, bir direnç kuvveti oluşur. Bu kuvvet, gerektiğinde, "res" üstyazıtıyla şöyle gösterilebilir.

$$F_{jik}^{(ij)} = F_{jik}^{res(ij)} = F_{jik}^{res(ij)}(s_{jik}, \dot{s}_{jik}) \quad (4.1.12)$$

(4.1.12) denkleminde, s_{jik} simgesi, \mathcal{B}_i cisminin \mathcal{B}_j cismine göre $\vec{u}_k^{(ij)}$ doğrultusundaki bağılı ötelenme yerdeğıştirmesini göstermektedir.

Eğer esneme direnci eklemın kinematik elemanları arasına yerleştirilmiş olan bir doğrusal yayla sağlanıyorsa, sürtünme direnci ise eklemın kinematik elemanları arasındaki viskoz bir yağlayıcıdan kaynaklanıyorsa, (4.1.12) denklemini şu şekli alır.

$$F_{jik}^{(ij)} = F_{jik}^{res(ij)} = -k_{jik}(s_{jik} - s_{jik}^{\circ}) - b_{jik}\dot{s}_{jik} \quad (4.1.13)$$

(4.1.13) denkleminde, b_{jik} doğrusal viskoz sönüm katsayısını, k_{jik} doğrusal yay katsayısını, s_{jik}° ise yayın serbest boyunu göstermektedir.

d) Bağılı Harekete Direnç (Rezistans) Momenti

Eğer $\vec{u}_k^{(ij)}$ etrafında dönme serbestliğı varsa ve eklem dirençsizse, böyle bir moment oluşmaz. Fakat, eklemde, bağılı yerdeğıştirmeye karşı bir esneme direnci ve/veya bağılı hıza karşı bir sürtünme direnci varsa, bir direnç momentini oluşur. Bu moment, gerektiğinde, "res" üstyazıtıyla şöyle gösterilebilir.

$$M_{jik}^{(ij)} = M_{jik}^{res(ij)} = M_{jik}^{res(ij)}(\theta_{jik}, \dot{\theta}_{jik}) \quad (4.1.14)$$

(4.1.14) denkleminde, θ_{jik} simgesi, \mathcal{B}_i cisminin \mathcal{B}_j cismine göre $\vec{u}_k^{(ij)}$ etrafındaki bağıl dönme yerdeğiştirmesini göstermektedir.

Eğer esneme direnci eklem kinematik elemanları arasına yerleştirilmiş olan bir burgusal ya da spiral yayla sağlanıyorsa, sürtünme direnci ise eklem kinematik elemanları arasındaki viskoz bir yağlayıcıdan kaynaklanıyorsa, (4.1.14) denklemi şu şekli alır.

$$M_{jik}^{(ij)} = M_{jik}^{res(ij)} = -\kappa_{jik}(\theta_{jik} - \theta_{jik}^o) - \beta_{jik}\dot{\theta}_{jik} \quad (4.1.15)$$

(4.1.15) denkleminde, β_{jik} açısal viskoz sönüm katsayısını, κ_{jik} açısal yay katsayısını, θ_{jik}^o ise yayın serbest açısal konumunu göstermektedir.

e) Eyletim (Tahrik/Aktüasyon) Kuvveti

Bu kuvvet, $\vec{u}_k^{(ij)}$ doğrultusunda ötelenme serbestliği varsa ve bu serbestlik bir eyleticiyle kontrol ediliyorsa ortaya çıkar. Bu kuvvet, gerektiğinde, "act" üstyazıtıyla şöyle gösterilebilir.

$$F_{jik}^{(ij)} = F_{jik}^{act(ij)} \quad (4.1.16)$$

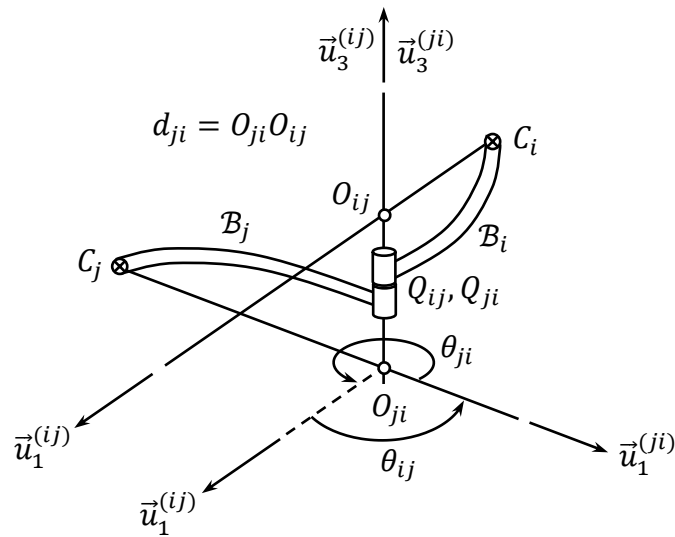
f) Eyletim (Tahrik/Aktüasyon) Momenti

Bu moment, $\vec{u}_k^{(ij)}$ etrafında dönme serbestliği varsa ve bu serbestlik bir eyleticiyle kontrol ediliyorsa ortaya çıkar. Bu moment, gerektiğinde, "act" üstyazıtıyla şöyle gösterilebilir.

$$M_{jik}^{(ij)} = M_{jik}^{act(ij)} \quad (4.1.17)$$

4.1.3. Eklem Örnekleri

a) Döner Eklem



Şekil 4.2 İki Cisim Arasındaki Döner Eklem

Şekil 4.2, birbirleriyle bir döner eklem ($J_{ij} = J_{ji}$) aracılığıyla bağlanmış iki cisimi (\mathcal{B}_i ve \mathcal{B}_j) göstermektedir. Bir döner eklemden, genel olarak, $\vec{u}_3^{(ij)} = \vec{u}_3^{(ji)}$ dönme eksenini temsil etmek üzere seçilir. Bu eksen etrafında tanımlanan dönme açılarından θ_{ij} açısı, $\vec{u}_1^{(ij)}$ vektöründen $\vec{u}_1^{(ji)}$ vektörüne doğru; θ_{ji} açısı ise, $\vec{u}_1^{(ji)}$ vektöründen $\vec{u}_1^{(ij)}$ vektörüne doğru ölçülür. Dikkat edilirse, bu iki açı arasında şu ilişki vardır: $\theta_{ij} + \theta_{ji} = 2\pi$. Bu döner ekleme ilişkin birim vektörlerden $\vec{u}_1^{(ij)}$, $C_i O_{ij}$ doğrultusunda; $\vec{u}_1^{(ji)}$ ise, $C_j O_{ji}$ doğrultusunda seçilir. O_{ij} ile O_{ji} noktaları ise, döner eklemin eksenini üzerinde, $\vec{u}_1^{(ij)} \perp \vec{u}_3^{(ij)}$ ve $\vec{u}_1^{(ji)} \perp \vec{u}_3^{(ji)}$ olacak biçimde seçilirler. İki orijin arasında sabit olan $d_{ji} = O_{ji} O_{ij}$ ya da $d_{ij} = O_{ij} O_{ji}$ mesafesi, döner eklemden "kaçıklık" olarak adlandırılır.

Bir döner eklemden, eklemin kinematik elemanlarının eklemin merkezinde birbirlerine temas ettikleri varsayılır. Sürekli çakışık olan bu temas noktaları, Şekil 4.2'den Q_{ij} ve Q_{ji} simgeleriyle gösterilmiştir.

Bu örnekteki döner eklemin eyletimli ve sürtünmeli olduğu fakat bir yayla desteklenmediği varsayılmıştır. Dolayısıyla, \mathcal{B}_i ile \mathcal{B}_j cisimleri arasındaki etkileşim kuvvet ve momentleri şöyle ifade edilebilir.

$$\vec{F}_{ji} = F_{ji1}^{(ij)} \vec{u}_1^{(ij)} + F_{ji2}^{(ij)} \vec{u}_2^{(ij)} + F_{ji3}^{(ij)} \vec{u}_3^{(ij)} \quad (4.1.18)$$

$$\vec{F}_{ij} = F_{ij1}^{(ji)} \vec{u}_1^{(ji)} + F_{ij2}^{(ji)} \vec{u}_2^{(ji)} + F_{ij3}^{(ji)} \vec{u}_3^{(ji)} \quad (4.1.19)$$

$$\vec{M}_{ji} = M_{ji1}^{(ij)} \vec{u}_1^{(ij)} + M_{ji2}^{(ij)} \vec{u}_2^{(ij)} + (T_{ji} - \beta_{ji} \dot{\theta}_{ji}) \vec{u}_3^{(ij)} \quad (4.1.20)$$

$$\vec{M}_{ij} = M_{ij1}^{(ji)} \vec{u}_1^{(ji)} + M_{ij2}^{(ji)} \vec{u}_2^{(ji)} + (T_{ij} - \beta_{ij} \dot{\theta}_{ij}) \vec{u}_3^{(ji)} \quad (4.1.21)$$

(4.1.18) – (4.1.21) denklemlerinde, dönme eksenini etrafındaki moment bileşenleri hariç, diğer bütün kuvvet ve moment bileşenleri yapısal tepkileri yansıttığı için ayrıca "str" üstyazıtıyla belirtilmemişlerdir. (4.1.20) ve (4.1.21) denklemlerindeki T_{ji} ve T_{ij} simgeleri, eklem eyleticisinin \mathcal{B}_i ile \mathcal{B}_j cisimlerine uyguladığı eyletim torklarını göstermektedir. Aynı denklemlerdeki β_{ji} ve β_{ij} simgeleri ise, açısal viskoz sürtünme katsayılarını göstermektedir. Tabii, bu katsayılar birbirine eşittir. Yani, $\beta_{ji} = \beta_{ij}$.

Öte yandan, Newton'un üçüncü yasasına göre, etkileşim kuvvet ve momentleri arasında şu eşitlikler vardır: $\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}$ ve $\vec{M}_{ji} = -\vec{M}_{ij}$. Bu eşitliklerin ayrıntılı yazılmış biçimleri aşağıda gösterilmiştir.

$$\begin{aligned} & F_{ji1}^{(ij)} \vec{u}_1^{(ij)} + F_{ji2}^{(ij)} \vec{u}_2^{(ij)} + F_{ji3}^{(ij)} \vec{u}_3^{(ij)} \\ &= - F_{ij1}^{(ji)} \vec{u}_1^{(ji)} - F_{ij2}^{(ji)} \vec{u}_2^{(ji)} - F_{ij3}^{(ji)} \vec{u}_3^{(ji)} \end{aligned} \quad (4.1.22)$$

$$\begin{aligned} & M_{ji1}^{(ij)} \vec{u}_1^{(ij)} + M_{ji2}^{(ij)} \vec{u}_2^{(ij)} + (T_{ji} - \beta_{ji} \dot{\theta}_{ji}) \vec{u}_3^{(ij)} \\ &= - M_{ij1}^{(ji)} \vec{u}_1^{(ji)} - M_{ij2}^{(ji)} \vec{u}_2^{(ji)} - (T_{ij} - \beta_{ij} \dot{\theta}_{ij}) \vec{u}_3^{(ji)} \end{aligned} \quad (4.1.23)$$

Bu arada, $\mathcal{F}_{ij}(Q_{ij})$ ile $\mathcal{F}_{ji}(Q_{ji})$ eksen takımlarının temel vektörleri arasındaki ilişkiler, aşağıda açıklanan biçimde elde edilebilir.

$$[\vec{u}_k^{(ij)}]^{(ji)} = \hat{C}^{(ji,ij)}[\vec{u}_k^{(ij)}]^{(ij)} \Rightarrow \vec{u}_k^{(ij/ji)} = \hat{C}^{(ji,ij)}\vec{u}_k^{(ij/ij)} = \hat{C}^{(ji,ij)}\vec{u}_k \quad (4.1.24)$$

$\mathcal{F}_{ij}(Q_{ij})$ ile $\mathcal{F}_{ji}(Q_{ji})$ arasındaki dönme, $\vec{u}_3^{(ij)} = \vec{u}_3^{(ji)}$ etrafında olduğuna göre,

$$\hat{C}^{(ji,ij)} = e^{\vec{u}_3 \theta_{ji}} \quad (4.1.25)$$

Böylece, $k = \{1, 2, 3\}$ için şu ilişkiler elde edilir.

$$\begin{aligned} \vec{u}_1^{(ij/ji)} &= e^{\vec{u}_3 \theta_{ji}} \vec{u}_1 = \vec{u}_1 \cos \theta_{ji} + \vec{u}_2 \sin \theta_{ji} \Rightarrow \\ \vec{u}_1^{(ij)} &= \vec{u}_1^{(ji)} \cos \theta_{ji} + \vec{u}_2^{(ji)} \sin \theta_{ji} \end{aligned} \quad (4.1.26)$$

$$\begin{aligned} \vec{u}_2^{(ij/ji)} &= e^{\vec{u}_3 \theta_{ji}} \vec{u}_2 = \vec{u}_2 \cos \theta_{ji} - \vec{u}_1 \sin \theta_{ji} \Rightarrow \\ \vec{u}_2^{(ij)} &= \vec{u}_2^{(ji)} \cos \theta_{ji} - \vec{u}_1^{(ji)} \sin \theta_{ji} \end{aligned} \quad (4.1.27)$$

$$\begin{aligned} \vec{u}_3^{(ij/ji)} &= e^{\vec{u}_3 \theta_{ji}} \vec{u}_3 = \vec{u}_3 \Rightarrow \\ \vec{u}_3^{(ij)} &= \vec{u}_3^{(ji)} \end{aligned} \quad (4.1.28)$$

(4.1.26) – (4.1.28) denklemleri, (4.1.22) ve (4.1.23) denklemlerinde yerlerine konunca aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\begin{aligned} F_{ji1}^{(ij)} [\vec{u}_1^{(ji)} c \theta_{ji} + \vec{u}_2^{(ji)} s \theta_{ji}] + F_{ji2}^{(ij)} [\vec{u}_2^{(ji)} c \theta_{ji} - \vec{u}_1^{(ji)} s \theta_{ji}] + F_{ji3}^{(ij)} \vec{u}_3^{(ji)} \\ = -F_{ij1}^{(ji)} \vec{u}_1^{(ji)} - F_{ij2}^{(ji)} \vec{u}_2^{(ji)} - F_{ij3}^{(ji)} \vec{u}_3^{(ji)} \end{aligned} \quad (4.1.29)$$

$$\begin{aligned} M_{ji1}^{(ij)} [\vec{u}_1^{(ji)} c \theta_{ji} + \vec{u}_2^{(ji)} s \theta_{ji}] + M_{ji2}^{(ij)} [\vec{u}_2^{(ji)} c \theta_{ji} - \vec{u}_1^{(ji)} s \theta_{ji}] + (T_{ji} - \beta_{ji} \dot{\theta}_{ji}) \vec{u}_3^{(ji)} \\ = -M_{ij1}^{(ji)} \vec{u}_1^{(ji)} - M_{ij2}^{(ji)} \vec{u}_2^{(ji)} - (T_{ij} - \beta_{ij} \dot{\theta}_{ij}) \vec{u}_3^{(ji)} \end{aligned} \quad (4.1.30)$$

Yukarıdaki denklemler taraf tarafa karşılaştırılınca, kuvvet ve moment bileşenleri arasında aşağıdaki ilişkiler ortaya çıkar.

$$F_{ij1}^{(ji)} = -[F_{ji1}^{(ij)} \cos \theta_{ji} - F_{ji2}^{(ij)} \sin \theta_{ji}] \quad (4.1.31)$$

$$F_{ij2}^{(ji)} = -[F_{ji2}^{(ij)} \cos \theta_{ji} + F_{ji1}^{(ij)} \sin \theta_{ji}] \quad (4.1.32)$$

$$F_{ij3}^{(ji)} = -F_{ji3}^{(ij)} \quad (4.1.33)$$

$$M_{ij1}^{(ji)} = -[M_{ji1}^{(ij)} \cos \theta_{ji} - M_{ji2}^{(ij)} \sin \theta_{ji}] \quad (4.1.34)$$

$$M_{ij2}^{(ji)} = -[M_{ji2}^{(ij)} \cos \theta_{ji} + M_{ji1}^{(ij)} \sin \theta_{ji}] \quad (4.1.35)$$

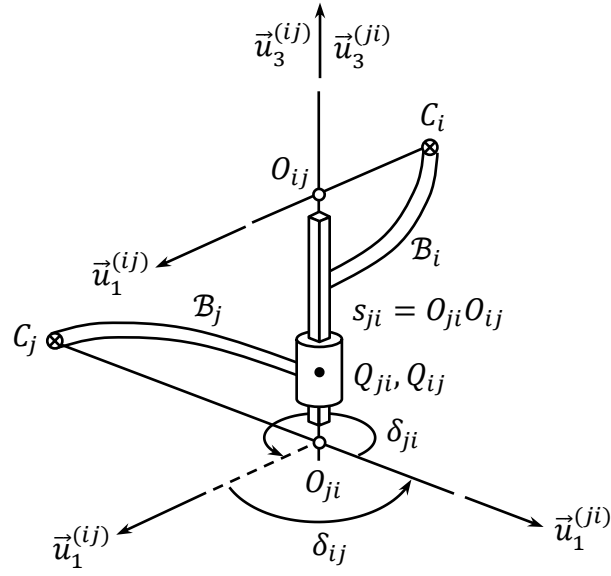
$$T_{ij} - \beta_{ij} \dot{\theta}_{ij} = -(T_{ji} - \beta_{ji} \dot{\theta}_{ji}) \quad (4.1.36)$$

(4.1.36) denklemini ise, $\beta_{ji} = \beta_{ij}$ olduğu için, aşağıdaki zaten bilinen ilişkileri doğrulamaktadır.

$$T_{ij} = -T_{ji} \quad (4.1.37)$$

$$\dot{\theta}_{ij} = -\dot{\theta}_{ji} \quad (4.1.38)$$

b) Kayar Eklem



Şekil 4.3 İki Cisim Arasındaki Kayar Eklem

Şekil 4.3, birbirleriyle bir kayar eklem ($J_{ij} = J_{ji}$) aracılığıyla bağlanmış iki cisim (\mathcal{B}_i ve \mathcal{B}_j) göstermektedir. Bir kayar ekleme, genel olarak, $\vec{u}_3^{(ij)} = \vec{u}_3^{(ji)}$ kayma eksenini temsil etmek üzere seçilir. Bir kayar ekleme, δ_{ij} ve δ_{ji} dönme açıları sabittir. Bu açılardan δ_{ij} açısı, $\vec{u}_1^{(ij)}$ vektöründen $\vec{u}_1^{(ji)}$ vektörüne doğru; δ_{ji} açısı ise, $\vec{u}_1^{(ji)}$ vektöründen $\vec{u}_1^{(ij)}$ vektörüne doğru ölçülür. Bu iki açı arasında şu ilişki vardır: $\delta_{ij} + \delta_{ji} = 2\pi$. Bu ekleme özgü olarak, s_{ji} kayma mesafesi, $\vec{u}_3^{(ij)} = \vec{u}_3^{(ji)}$ ekseninde O_{ji} orijininin O_{ij} orijinine doğru; s_{ij} kayma mesafesi ise, tersine O_{ij} orijininin O_{ji} orijinine doğru ölçülür. Bir döner ekleme olduğu gibi, $\vec{u}_1^{(ij)}$, $C_i O_{ij}$ doğrultusunda; $\vec{u}_1^{(ji)}$ ise, $C_j O_{ji}$ doğrultusunda seçilir. O_{ij} ile O_{ji} noktaları ise, kayar eklemin ekseninde, $\vec{u}_1^{(ij)} \perp \vec{u}_3^{(ij)}$ ve $\vec{u}_1^{(ji)} \perp \vec{u}_3^{(ji)}$ olacak biçimde seçilirler.

Dinamik analizi kolaylaştırmak için, çoğu kez, özellikle de kuru sürtünmenin etkin olmadığı durumlarda, kayar eklemin kinematik elemanlarının Q_{ji} ve Q_{ij} gibi tek bir noktalarıyla birbirlerine temas ettikleri varsayılır. Şekil 4.3'te, kuşatıcı kinematik elemana ait olan Q_{ji} temas noktası, bu elemanın sabit bir noktası (orta noktası) olarak alınmıştır. Kayar kinematik elemana ait olan Q_{ij} temas noktası ise, hareket esnasında bu eleman üzerindeki yeri sürekli değişebilen geçici bir nokta olarak alınmıştır. Yerine göre, temas noktaları için yapılan bu tercih, tersine de çevrilebilir.

Bu örnekteki kayar eklemin eyletimsiz fakat sürtünmeli olduğu ve şekilde gösterilmemiş olan bir yayla desteklendiği varsayılmıştır. Böyle bir ekleme örnek olarak bir amortisör gösterilebilir. Bu ekleme bağlanan \mathcal{B}_i ile \mathcal{B}_j cisimleri arasındaki etkileşim kuvvet ve momentleri aşağıda görüldüğü gibi ifade edilebilir.

$$\vec{F}_{ji} = F_{ji1}^{(ij)} \vec{u}_1^{(ij)} + F_{ji2}^{(ij)} \vec{u}_2^{(ij)} - [k_{ji}(s_{ji} - s_{ji}^{\circ}) + b_{ji} \dot{s}_{ji}] \vec{u}_3^{(ij)} \quad (4.1.39)$$

$$\vec{F}_{ij} = F_{ij1}^{(ji)} \vec{u}_1^{(ji)} + F_{ij2}^{(ji)} \vec{u}_2^{(ji)} - [k_{ij}(s_{ij} - s_{ij}^{\circ}) + b_{ij} \dot{s}_{ij}] \vec{u}_3^{(ji)} \quad (4.1.40)$$

$$\vec{M}_{ji} = M_{ji1}^{(ij)} \vec{u}_1^{(ij)} + M_{ji2}^{(ij)} \vec{u}_2^{(ij)} + M_{ji3}^{(ij)} \vec{u}_3^{(ij)} \quad (4.1.41)$$

$$\vec{M}_{ij} = M_{ij1}^{(ji)} \vec{u}_1^{(ji)} + M_{ij2}^{(ji)} \vec{u}_2^{(ji)} + M_{ij3}^{(ji)} \vec{u}_3^{(ji)} \quad (4.1.42)$$

(4.1.39) – (4.1.42) denklemlerinde, kayma eksenini doğrultusundaki kuvvet bileşenleri hariç, diğer bütün kuvvet ve moment bileşenleri yapısal tepkileri yansıttığı için ayrıca "str" üstyazıtıyla belirtilmemişlerdir.

(4.1.39) ve (4.1.40) denklemlerindeki $k_{ji} = k_{ij}$ ve $b_{ji} = b_{ij}$ katsayıları, eklemi destekleyen yayın direngeliğini ve eklemi yağlayan sıvının viskozitesini göstermektedir. Aynı denklemlerdeki s_{ji}° ile s_{ij}° simgeleri ise, yayın serbest (yüksüz) boyunu göstermektedir.

Öte yandan, Newton'un üçüncü yasasına göre, etkileşim kuvvet ve momentleri arasında şu eşitlikler vardır: $\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}$ ve $\vec{M}_{ji} = -\vec{M}_{ij}$. Bu eşitliklerin ayrıntılı yazılmış biçimleri aşağıda gösterilmiştir.

$$\begin{aligned} & F_{ji1}^{(ij)} \vec{u}_1^{(ij)} + F_{ji2}^{(ij)} \vec{u}_2^{(ij)} - [k_{ji}(s_{ji} - s_{ji}^{\circ}) + b_{ji} \dot{s}_{ji}] \vec{u}_3^{(ij)} \\ &= - F_{ij1}^{(ji)} \vec{u}_1^{(ji)} - F_{ij2}^{(ji)} \vec{u}_2^{(ji)} - [k_{ij}(s_{ij} - s_{ij}^{\circ}) + b_{ij} \dot{s}_{ij}] \vec{u}_3^{(ji)} \end{aligned} \quad (4.1.43)$$

$$\begin{aligned} & M_{ji1}^{(ij)} \vec{u}_1^{(ij)} + M_{ji2}^{(ij)} \vec{u}_2^{(ij)} + M_{ji3}^{(ij)} \vec{u}_3^{(ij)} \\ &= - M_{ij1}^{(ji)} \vec{u}_1^{(ji)} - M_{ij2}^{(ji)} \vec{u}_2^{(ji)} - M_{ij3}^{(ji)} \vec{u}_3^{(ji)} \end{aligned} \quad (4.1.44)$$

Bu arada, $\mathcal{F}_{ij}(Q_{ij})$ ile $\mathcal{F}_{ji}(Q_{ji})$ eksen takımlarının temel vektörleri arasındaki ilişkiler, aşağıda açıklanan biçimde elde edilebilir.

$$[\vec{u}_k^{(ij)}]^{(ji)} = \hat{C}^{(ji,ij)} [\vec{u}_k^{(ij)}]^{(ij)} \Rightarrow \vec{u}_k^{(ij/ji)} = \hat{C}^{(ji,ij)} \vec{u}_k^{(ij/ij)} = \hat{C}^{(ji,ij)} \vec{u}_k \quad (4.1.45)$$

$\mathcal{F}_{ij}(Q_{ij})$ ile $\mathcal{F}_{ji}(Q_{ji})$ arasındaki sabit dönme, $\vec{u}_3^{(ij)} = \vec{u}_3^{(ji)}$ etrafında olduğuna göre,

$$\hat{C}^{(ji,ij)} = e^{\tilde{u}_3 \delta_{ji}} \quad (4.1.46)$$

Böylece, döner eklemdekine benzer bir biçimde, $k = \{1, 2, 3\}$ için şu ilişkiler elde edilir.

$$\vec{u}_1^{(ij)} = \vec{u}_1^{(ji)} \cos \delta_{ji} + \vec{u}_2^{(ji)} \sin \delta_{ji} \quad (4.1.47)$$

$$\vec{u}_2^{(ij)} = \vec{u}_2^{(ji)} \cos \delta_{ji} - \vec{u}_1^{(ji)} \sin \delta_{ji} \quad (4.1.48)$$

$$\vec{u}_3^{(ij)} = \vec{u}_3^{(ji)} \quad (4.1.49)$$

(4.1.47) – (4.1.49) denklemleri, (4.1.43) ve (4.1.44) denklemlerinde yerlerine konunca aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\begin{aligned}
& F_{ji1}^{(ij)} [\vec{u}_1^{(ji)} c \delta_{ji} + \vec{u}_2^{(ji)} s \delta_{ji}] + F_{ji2}^{(ij)} [\vec{u}_2^{(ji)} c \delta_{ji} - \vec{u}_1^{(ji)} s \delta_{ji}] \\
& + [k_{ji}(s_{ji} - s_{ji}^\circ) + b_{ji} \dot{s}_{ji}] \vec{u}_3^{(ij)} \\
& = - F_{ij1}^{(ji)} \vec{u}_1^{(ji)} - F_{ij2}^{(ji)} \vec{u}_2^{(ji)} - [k_{ij}(s_{ij} - s_{ij}^\circ) + b_{ij} \dot{s}_{ij}] \vec{u}_3^{(ji)}
\end{aligned} \tag{4.1.50}$$

$$\begin{aligned}
& M_{ji1}^{(ij)} [\vec{u}_1^{(ji)} c \delta_{ji} + \vec{u}_2^{(ji)} s \delta_{ji}] + M_{ji2}^{(ij)} [\vec{u}_2^{(ji)} c \delta_{ji} - \vec{u}_1^{(ji)} s \delta_{ji}] + M_{ji3}^{(ij)} \vec{u}_3^{(ji)} \\
& = - M_{ij1}^{(ji)} \vec{u}_1^{(ji)} - M_{ij2}^{(ji)} \vec{u}_2^{(ji)} - M_{ij3}^{(ji)} \vec{u}_3^{(ji)}
\end{aligned} \tag{4.1.51}$$

Yukarıdaki denklemler taraf tarafa karşılaştırılınca, kuvvet ve moment bileşenleri arasında aşağıdaki ilişkiler ortaya çıkar.

$$F_{ij1}^{(ji)} = -[F_{ji1}^{(ij)} \cos \delta_{ji} - F_{ji2}^{(ij)} \sin \delta_{ji}] \tag{4.1.52}$$

$$F_{ij2}^{(ji)} = -[F_{ji2}^{(ij)} \cos \delta_{ji} + F_{ji1}^{(ij)} \sin \delta_{ji}] \tag{4.1.53}$$

$$[k_{ji}(s_{ji} - s_{ji}^\circ) + b_{ji} \dot{s}_{ji}] = -[k_{ij}(s_{ij} - s_{ij}^\circ) + b_{ij} \dot{s}_{ij}] \tag{4.1.54}$$

$$M_{ij1}^{(ji)} = -[M_{ji1}^{(ij)} \cos \delta_{ji} - M_{ji2}^{(ij)} \sin \delta_{ji}] \tag{4.1.55}$$

$$M_{ij2}^{(ji)} = -[M_{ji2}^{(ij)} \cos \delta_{ji} + M_{ji1}^{(ij)} \sin \delta_{ji}] \tag{4.1.56}$$

$$M_{ij3}^{(ji)} = -M_{ji3}^{(ij)} \tag{4.1.57}$$

(4.1.54) denklemi ise, $k_{ji} = k_{ij}$ ve $b_{ji} = b_{ij}$ olduğu için, aşağıdaki zaten bilinen ilişkileri doğrulamaktadır.

$$(s_{ji} - s_{ji}^\circ) = -(s_{ij} - s_{ij}^\circ) \tag{4.1.58}$$

$$\dot{s}_{ij} = -\dot{s}_{ji} \tag{4.1.59}$$

4.2. Sistemin Hareket Denklemi ile Devinimsel ve Eyletimsel Dinamik Analizleri

Bir katı cisim sisteminin dinamik analizi, aşağıda belirtilen iki genel biçimde yapılır.

a) Devinimsel Dinamik Analiz

Bu analiz, belirtilen eyletim kuvvet ve/veya torkları için sistemin hareketini (devinimini) belirlemek amacıyla yapılır. Bu analiz esnasında, sisteme dışardan etkiyen kuvvet ve momentlerin bilindiği ya da kestirilebildiği varsayılır. Bu analiz sayesinde, sistemin çeşitli koşullardaki davranışlarının bilgisayar ortamında benzetimi yapılabilir.

b) Eyletimsel Dinamik Analiz

Bu analiz, sistemin belirtilen bir hareketi yapabilmesi için gereken eyletim kuvvet ve/veya torklarını belirlemek amacıyla yapılır. Bu analiz esnasında da, sisteme dışardan etkiyen kuvvet ve momentlerin bilindiği ya da kestirilebildiği varsayılır. Bu analiz sayesinde, sistemin istenen bir hareketi yapabilmesi için uygun eyleticilerin seçimi ya da tasarımı yapılabilir.

Yukarıda kısaca tarif edilen dinamik analizleri yapabilmek için sistemin *hareket denkleminde* gereksinim vardır. Hareket denklemini elde etmek için gereken ayrıntılar ve eşitlikler ise, aşağıdaki kısımlarda açıklanmıştır.

4.2.1. Sistemin Serbestlik Derecesi

Bir katı cisim sisteminin serbestlik derecesi (m), Kutzbach-Grübler formülü ile şöyle bulunur.

$$m = \lambda n - r \quad (4.2.1)$$

(4.2.1) formülünde,

$$r = \sum_{k=1}^{\lambda-1} (\lambda - k) j_k \quad (4.2.2)$$

(4.2.1) ve (4.2.2) denklemlerinde görülen simgelerin anlamları aşağıda belirtilmiştir.

m : sistemin serbestlik derecesi

λ : sistemin çalışma uzayının serbestlik derecesi

n : sistemdeki zemine (\mathcal{B}_0 cismine) göre hareket edebilen katı cisimlerin sayısı

r : sistemdeki eklemlerin neden olduğu serbestlik kısıtlamalarının toplam sayısı

j_k : sistemdeki bağıl serbestlik derecesi k olan eklemlerin sayısı

Kutzbach-Grübler formülündeki λ parametresi, sistemin çalışma uzayındaki bir katı cismin başka hiç bir katı cisimle bağlantıya girmemişken sahip olduğu serbestlik derecesi olarak tanımlanır. Bu tanıma göre, λ parametresi şu değerleri alır.

Sistemin çalışma uzayı iki boyutlu ise, yani sistem düzlemsel ise, $\lambda = 3$

Sistemin çalışma uzayı üç boyutlu ise, yani sistem uzaysal ise, $\lambda = 6$

Çalışma uzayının serbestlik derecesi (λ), bir katı cismin çalışma uzayındaki duruşunu (konumunu ve yönelimini) tam olarak belirten birbirinden bağımsız parametre sayısı olarak tanımlanır. Bu tanıma göre, bir katı cismin iki boyutlu bir uzaydaki serbestlik derecesi üç olur, çünkü bu cismin duruşunu belirtmek için gereken bağımsız parametre sayısı üçtür. Bu parametreler, cismin bir noktasının iki koordinatı ve cismin yönelimini gösteren bir açıdır. Bir katı cismin üç boyutlu uzaydaki serbestlik derecesi ise altı olur, çünkü bu cismin duruşunu belirtmek için gereken bağımsız parametre sayısı altıdır. Bu parametreler, cismin bir noktasının üç koordinatı ve cismin yönelimini gösteren üç açıdır.

4.2.2. Genelleştirilmiş Koordinatlar

Eğer bir katı cisim sisteminin serbestlik derecesi m ise, bu sistemin zemine göre konumunu belirlemek için m adet *birbirinden bağımsız* değişkene gereksinim vardır. Bu değişkenlerden her biri "genelleştirilmiş koordinat" olarak adlandırılır. Genelleştirilmiş koordinatlar, geleneksel olarak aşağıdaki kümede yer alan simgelerle gösterilir.

$$\{q_1, q_2, q_3, \dots, q_m\} \quad (4.2.3)$$

Genelleştirilmiş koordinatlar, birbirinden bağımsız olmak koşuluyla, herhangi bir biçimde seçilebilirler. Bu seçim, konumu önemsenen noktaların koordinatlarını ve yönelimi önemsenen cisimlerin yönelim açılarını kapsayabilir. Özel bir durum olmakla birlikte, sistemdeki m adet eyletimli ekleme ait eklem değişkenlerinden her biri de genelleştirilmiş koordinat olarak seçilebilir. Bu seçim benimsendiği takdirde, eğer J_{ij} eyletimli bir döner eklemse, bu eklemeye ait θ_{ij} ya da θ_{ji} değişkenlerinden biri genelleştirilmiş koordinatlardan biri olarak seçilir. Benzer biçimde, eğer J_{ij} eyletimli bir kayar eklemse, bu eklemeye ait s_{ij} ya da s_{ji} değişkenlerinden biri genelleştirilmiş koordinatlardan biri olarak seçilir. Burada sözü edilen iki dönme açısından birinin ya da iki kayma değişkeninden birinin seçilmesinin nedeni, bunların birbirlerine $\theta_{ij} = 2\pi - \theta_{ji}$ ve $s_{ij} = -s_{ji}$ olacak biçimde bağımlı olmalarıdır.

Genelleştirilmiş koordinatlar seçildikten sonra, sistemdeki zemine göre hareket edebilen tüm cisimlerin dönme ve ötelenme hızları ile ivmeleri, genelleştirilmiş koordinatlar (q_1, q_2, \dots, q_m) , genelleştirilmiş hızlar $(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_m)$ ve genelleştirilmiş ivmeler $(\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \dots, \ddot{q}_m)$ cinsinden ifade edilebilir. Bu ifadeler, $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ için aşağıda gösterilen biçimde yazılabilir.

$$\vec{\omega}_i = \sum_{j=1}^m \vec{\Omega}_{ij} \dot{q}_j \quad (4.2.4)$$

$$\vec{v}_i = \sum_{j=1}^m \vec{V}_{ij} \dot{q}_j \quad (4.2.5)$$

$$\vec{\alpha}_i = D_0 \vec{\omega}_i = D_i \vec{\omega}_i = \sum_{j=1}^m \vec{\Omega}_{ij} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \vec{\Gamma}_{ijk} \dot{q}_j \dot{q}_k \quad (4.2.6)$$

$$\vec{a}_i = D_0 \vec{v}_i = D_i \vec{v}_i + \vec{\omega}_i \times \vec{v}_i = \sum_{j=1}^m \vec{V}_{ij} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \vec{A}_{ijk} \dot{q}_j \dot{q}_k \quad (4.2.7)$$

Yukarıdaki denklemlerde yer alan katsayı vektörleri $(\vec{\Omega}_{ij}, \vec{V}_{ij}, \vec{\Gamma}_{ijk}, \vec{A}_{ijk})$, "hız ve ivme etki katsayıları" olarak adlandırılır. Bu katsayılar genelleştirilmiş koordinatların işlevleridir. Örneğin, $\vec{\Omega}_{ij} = \vec{\Omega}_{ij}(q_1, q_2, q_3, \dots, q_m)$. Yukarıda görüldüğü gibi, birinci mertebeden $\vec{\Omega}_{ij}$ ve \vec{V}_{ij} katsayıları, genelleştirilmiş hızların sistemdeki katı cisimlerin dönme ve ötelenme hızları üzerindeki etkilerini gösterir. Aynı katsayılar, genelleştirilmiş ivmelerin söz konusu cisimlerin dönme ve ötelenme ivmeleri üzerindeki etkilerini de gösterir. İkinci mertebeden $\vec{\Gamma}_{ijk}$ ve \vec{A}_{ijk} katsayıları ise, genelleştirilmiş hızların ikili çarpımlarının söz konusu cisimlerin dönme ve ötelenme ivmeleri üzerindeki etkileri gösterir. $\vec{\Gamma}_{ijk}$ ve \vec{A}_{ijk} katsayıları, $\vec{\Omega}_{ij}$ ve \vec{V}_{ij} katsayılarından bu katsayıların ifade edildikleri eksen takımlarına bağlı olmak üzere, aşağıdaki kısmi türevler içeren formüller kullanılarak elde edilirler.

$$\vec{\Gamma}_{ijk} = \partial_0 \vec{\Omega}_{ij} / \partial q_k = \partial_i \vec{\Omega}_{ij} / \partial q_k \quad (4.2.8)$$

$$\vec{A}_{ijk} = \partial_0 \vec{V}_{ij} / \partial q_k = \partial_i \vec{V}_{ij} / \partial q_k + \vec{\Omega}_{ik} \times \vec{V}_{ij} \quad (4.2.9)$$

Yukarıdaki $\partial_0 / \partial q_k$ ile $\partial_i / \partial q_k$ simgeleri, $\mathcal{F}_0(O_0)$ ile $\mathcal{F}_i(C_i)$ eksen takımlarına göre tanımlanmış kısmi türev işleçleridir.

4.2.3. Genelleştirilmiş Eyletim Kuvvetleri

Sistemin serbestlik derecesinin m olması, sistemin istendiği gibi kontrol edilebilmesi için en az m adet bağımsız (birbirinden bağımsız çalışabilen) eyleticiye sahip olmasını gerektirir. Bu eyleticiler tarafından uygulanan kuvvet ve torklardan her biri "genelleştirilmiş eyletim kuvveti" olarak adlandırılır. Eyletimsel artıksıllığı olmayan bir sistem, m adet bağımsız eyleticiye sahiptir. Böyle bir sisteme ait olan genelleştirilmiş eyletim kuvvetleri, aşağıdaki kümede yer alan simgelerle gösterilebilir.

$$\{P_1, P_2, P_3, \dots, P_m\} \quad (4.2.10)$$

Daha önce de söylendiği gibi, eyletimli bir eklem ancak bir döner ya da kayar eklem olabilir. Dolayısıyla, eğer J_{ij} eyletimli bir döner eklemse, bu eklemeye ait eyleticinin kendisini paylaşan \mathcal{B}_i ve \mathcal{B}_j cisimlerine uyguladığı T_{ji} ve T_{ij} torklarından biri, genelleştirilmiş eyletim kuvvetlerinden biri olarak seçilir. Benzer biçimde, eğer J_{ij} eyletimli bir kayar eklemse, bu eklemeye ait eyleticinin kendisini paylaşan \mathcal{B}_i ve \mathcal{B}_j cisimlerine uyguladığı F_{ji} ve F_{ij} kuvvetlerinden biri, genelleştirilmiş eyletim kuvvetlerinden biri olarak seçilir. Burada sözü edilen iki torktan birinin ya da iki kuvvetten birinin seçilmesinin nedeni, bunların birbirlerine $T_{ij} = -T_{ji}$ ve $F_{ij} = -F_{ji}$ olacak biçimde bağımlı olmalarıdır.

4.2.4. Genelleştirilmiş Yapısal Tepki Kuvvetleri

Yapısal tepki kuvvet ve momentleri, eklemleri oluşturan kinematik eleman çiftlerinin birbirlerine bağlı hareket serbestliği olmayan yönlerde uyguladığı kuvvet ve moment bileşenleridir. Bu kuvvet ve moment bileşenleri, birlikte, "genelleştirilmiş yapısal tepki kuvvetleri" olarak adlandırılır ve aşağıdaki kümede yer alan simgelerle gösterilebilir.

$$\{R_1, R_2, R_3, \dots, R_r\} \quad (4.2.11)$$

Aslında, yapısal tepki kuvvet ve moment bileşenlerinden her biri, örneğin R_k , $\{R_k, -R_k\}$ biçimindeki bir etki-tepki çiftinin üyelerinden biridir.

4.2.5. Yeterince Kısıtlı ve Aşırı Kısıtlı Sistemler

Bağıl serbestlik derecesi k olan bir eklemden, $k' = \lambda - k$ adet bağıl hareket serbestliği olmayan birbirine dik yön vardır. Dolayısıyla, böyle bir eklemden k' adet genelleştirilmiş yapısal tepki kuvveti oluşur. Bu nedenle, *yeterince kısıtlı* bir sistemde, yani yeterli ve gerekli sayıda *bağımsız* eklem kısıtlaması içeren bir sistemde, genelleştirilmiş yapısal tepki kuvvetlerinin sayısı olan r , eklem kısıtlamalarının serbestlik derecesini azalttığı sayıya eşittir. Diğer bir deyişle, (4.2.1) ve (4.2.2) denklemlerinden de görülebileceği gibi,

$$r = \sum_{k=1}^{\lambda-1} (\lambda - k) j_k = \lambda n - m \quad (4.2.12)$$

Bu bölümde yalnızca yeterince kısıtlı sistemlere yer verilmiştir. Bununla birlikte, özellikle uzaysal mekanik sistemler arasında, *aşırı kısıtlı* sistemlere de rastlanmaktadır. Kardan eklemi, ya da diğer bir adıyla evrensel (üniversel) eklem, aşırı kısıtlı sistemlerin tipik bir örneğidir.

Aşırı kısıtlı bir sistemde gereğinden fazla eklem kısıtlaması bulunur. Ancak, sistemdeki bazı özel geometrik biçimlenmeler nedeniyle, eklem kısıtlamalarının bir kısmı bağımlı hale gelir ve serbestlik derecesini azaltma yönündeki etkilerini yitirirler. Bu özel geometrik biçimlenmeler, değişik görünümde olabilir. Tipik örnekler olarak, bazı eklem eksenlerinin paralel olması ya da tek bir noktada kesişmesi gösterilebilir. Bağımsız eklem kısıtlamalarının azalmış olması nedeniyle, aşırı kısıtlı bir sistem için (4.2.12) eşitliği, bir eşitsizliğe dönüşür. Şöyle ki,

$$r = \sum_{k=1}^{\lambda-1} (\lambda - k) j_k = \lambda n - m_f > \lambda n - m_a \quad (4.2.13)$$

(4.2.13) denklemindeki m_f simgesi, sistemin *formüler* serbestlik derecesini; m_a simgesi ise, sistemin *gerçek* serbestlik derecesini göstermektedir. Görüldüğü gibi, yeterince kısıtlı bir sistem için $m_f = m_a = m$ iken, aşırı kısıtlı bir sistem için $m_f < m_a = m$ olur. Bununla birlikte, bağımlı eklem kısıtlamaları, sistemin serbestlik derecesini azaltmasalar bile, yine de ilgili eklemlerin fiziksel yapıları nedeniyle yapısal tepki oluştururlar. Dolayısıyla, aşırı kısıtlı bir sistemde, *yapısal tepki artıksılığı* oluşur. Bir başka deyişle, genelleştirilmiş yapısal tepki kuvvetleri arasında derecesi $m' = m_a - m_f$ olan bir belirsizlik bulunur. Bu nedenle, bu kuvvetlerin tümü, Newton-Euler denklemleri kullanılarak belirlenemez. Belirlenebilmeleri için kullanılacak basit bir yol, bu kuvvetlerden m' adedi için uygun görülebilecek bir takım varsayımlar yapmaktır. Örneğin, bazılarının sıfır, bazılarının birbirine eşit, bazılarının da bazı başka kuvvetlerin ortalamalarına eşit oldukları varsayılabilir. Tabii, daha bilimsel fakat külfetli olan bir yol ise, katı oldukları varsayılan cisimlerin bile aslında az da olsa belli bir esnekliğe sahip olduklarını göz önüne almak ve gerinç-gerinti ilişkilerini kullanarak m' adet ek denklemler oluşturulmasıdır.

4.2.6. Tümüleşik Newton-Euler Denklemi

(4.2.4) – (4.2.7) denklemleri kullanılarak ve etkileşim kuvvet ve momentleri eyletimsel, yapısal ve dirençsel kısımlarına ayrıştırılarak (4.1.1) ve (4.1.2) sayılı Newton-Euler denklemleri ile (4.1.3) ve (4.1.4) sayılı etki-tepki denklemleri şöyle yazılabilir.

Newton (Kuvvet) Denklemleri ($i = 1, 2, \dots, n$):

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m (m_i \vec{V}_{ij}) \dot{q}_j &= m_i \vec{g} + \vec{F}_i^{ext} - \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m (m_i \vec{A}_{ijk}) \dot{q}_j \dot{q}_k \\ &+ \sum_{j=0}^n (\vec{F}_{ji}^{act} + \vec{F}_{ji}^{str} + \vec{F}_{ji}^{res}) \end{aligned} \quad (4.2.14)$$

Euler (Moment) Denklemleri ($i = 1, 2, \dots, n$):

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m (\check{J}_i \cdot \vec{\Omega}_{ij}) \dot{q}_j &= \vec{M}_i^{ext} - \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m (\check{J}_i \cdot \vec{I}_{ijk} + \vec{\Omega}_{ij} \times \check{J}_i \cdot \vec{\Omega}_{ik}) \dot{q}_j \dot{q}_k \\ &+ \sum_{j=0}^n [\vec{M}_{ji}^{act} + \vec{M}_{ji}^{str} + \vec{M}_{ji}^{res} + \vec{r}_{ij} \times (\vec{F}_{ji}^{act} + \vec{F}_{ji}^{str} + \vec{F}_{ji}^{res})] \end{aligned} \quad (4.2.15)$$

Etki-Tepki Denklemleri:

$$\vec{F}_{ij}^{act} + \vec{F}_{ij}^{str} + \vec{F}_{ij}^{res} = -(\vec{F}_{ji}^{act} + \vec{F}_{ji}^{str} + \vec{F}_{ji}^{res}) \quad (4.2.16)$$

$$\vec{M}_{ij}^{act} + \vec{M}_{ij}^{str} + \vec{M}_{ij}^{res} = -(\vec{M}_{ji}^{act} + \vec{M}_{ji}^{str} + \vec{M}_{ji}^{res}) \quad (4.2.17)$$

\mathcal{B}_i cismi için yazılmış olan (4.2.14) ve (4.2.15) sayılı vektör-diyadik denklemleri, genellikle \mathcal{B}_i cisimine bağlı $\mathcal{F}_i(C_i)$ eksen takımında; \mathcal{B}_i ile \mathcal{B}_j cisimleri arasında yazılmış olan (4.2.16) ve (4.2.17) sayılı vektör denklemleri ise, genellikle, ifade ortaklığının sağlanabilmesi için zemine bağlı $\mathcal{F}_0(O)$ eksen takımında, aşağıda görülen matris denklemleri biçiminde yazılabilir.

Newton-Euler Denklemleri ($i = 1, 2, \dots, n$):

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m [m_i \vec{V}_{ij}^{(i)}] \dot{q}_j &= \hat{C}^{(i,0)} [m_i \vec{g}^{(0)} + \vec{F}_i^{ext(0)}] - \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m [m_i \vec{A}_{ijk}^{(i)}] \dot{q}_j \dot{q}_k \\ &+ \hat{C}^{(i,i,j)} \sum_{j=0}^n [\vec{F}_{ji}^{act(i,j)} + \vec{F}_{ji}^{str(i,j)} + \vec{F}_{ji}^{res(i,j)}] \end{aligned} \quad (4.2.18)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m [\check{J}_i^{(i)} \vec{\Omega}_{ij}^{(i)}] \dot{q}_j &= \hat{C}^{(i,0)} \vec{M}_i^{ext(0)} - \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m [\check{J}_i^{(i)} \vec{I}_{ijk}^{(i)} + \vec{\Omega}_{ij}^{(i)} \check{J}_i^{(i)} \vec{\Omega}_{ik}^{(i)}] \dot{q}_j \dot{q}_k \\ &+ \sum_{j=0}^n \hat{C}^{(i,i,j)} [\vec{M}_{ji}^{act(i,j)} + \vec{M}_{ji}^{str(i,j)} + \vec{M}_{ji}^{res(i,j)}] \\ &+ \sum_{j=0}^n \vec{r}_{ij}^{(i)} \hat{C}^{(i,i,j)} [\vec{F}_{ji}^{act(i,j)} + \vec{F}_{ji}^{str(i,j)} + \vec{F}_{ji}^{res(i,j)}] \end{aligned} \quad (4.2.19)$$

Etki-Tepki Denklemleri:

$$\begin{aligned} \hat{C}^{(0,j)} \hat{C}^{(j,ji)} [\vec{F}_{ij}^{act(ji)} + \vec{F}_{ij}^{str(ji)} + \vec{F}_{ij}^{res(ji)}] \\ = -\hat{C}^{(0,i)} \hat{C}^{(i,ij)} [\vec{F}_{ji}^{act(ij)} + \vec{F}_{ji}^{str(ij)} + \vec{F}_{ji}^{res(ij)}] \end{aligned} \quad (4.2.20)$$

$$\begin{aligned} \hat{C}^{(0,j)} \hat{C}^{(j,ji)} [\vec{M}_{ij}^{act(ji)} + \vec{M}_{ij}^{str(ji)} + \vec{M}_{ij}^{res(ji)}] \\ = -\hat{C}^{(0,i)} \hat{C}^{(i,ij)} [\vec{M}_{ji}^{act(ij)} + \vec{M}_{ji}^{str(ij)} + \vec{M}_{ji}^{res(ij)}] \end{aligned} \quad (4.2.21)$$

Yukarıdaki denklemlerde, $\hat{C}^{(0,i)}$ ve $\hat{C}^{(i,ij)}$ matrisleri, $\mathcal{F}_i(C_i)$ eksen takımının $\mathcal{F}_0(O)$ eksen takımına göre ve $\mathcal{F}_{ij}(Q_{ij})$ eksen takımının $\mathcal{F}_i(C_i)$ eksen takımına göre yönelimlerini temsil etmektedir.

Yukarıda $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ için yazılmış olan Newton-Euler matris denklemleri, Kısım 4.2.2 ve 4.2.3'teki tanımlar kullanılarak tek bir matris denklemi biçiminde topluca yazılabilir. Bu matris denklemi, aşağıda görüldüğü gibi iki farklı biçimden birine göre yazılabilir.

$$\hat{H}\bar{a} = \hat{L}\bar{P} + \hat{D}\bar{R} + \bar{X} \quad (4.2.22)$$

$$\hat{N}\ddot{\bar{q}} = \hat{L}\bar{P} + \hat{D}\bar{R} + \bar{Y} \quad (4.2.23)$$

(4.2.22) ile (4.2.23) denklemleri birbirleriyle aşağıdaki eşitlikler aracılığıyla ilişkilidir.

$$\bar{v} = \hat{W}\dot{\bar{q}} \Rightarrow \bar{a} = \hat{W}\ddot{\bar{q}} + \bar{a}^\circ \quad (4.2.24)$$

$$\hat{N} = \hat{H}\hat{W} \quad (4.2.25)$$

$$\bar{Y} = \bar{X} - \hat{H}\bar{a}^\circ \quad (4.2.26)$$

(4.2.22) ve (4.2.23) denklemlerinin her ikisi de, "tümlleşik Newton-Euler denklemi" olarak adlandırılır. Bu denklemlerde, eyletimsel artıksızlık ve/veya aşırı kısıtlılık olmadığı varsayılarak şu tanımlar kullanılmıştır.

$$\bar{a} = \begin{bmatrix} \bar{a}_1 \\ \bar{a}_2 \\ \vdots \\ \bar{a}_1 \\ \bar{a}_2 \\ \vdots \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{\lambda n} : \text{Cisimlerin ötelenme ve dönme ivmelerinin} \quad (4.2.27)$$

bileşenlerinden oluşan dikeysıra matrisi

$$\bar{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_m \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^m : \text{Genelleştirilmiş koordinatlar dikeysıra matrisi} \quad (4.2.28)$$

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_m \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^m : \text{Genelleştirilmiş eyletim kuvvetleri dikeysıra matrisi} \quad (4.2.29)$$

$$\bar{R} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_r \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^r : \text{Genelleştirilmiş yapısal tepki kuvvetleri dikeysıra matrisi} \quad (4.2.30)$$

$$\hat{W} = \hat{W}(\bar{q}) \in \mathcal{R}^{\lambda n \times m} : \text{Genelleştirilmiş hız ve ivmelere ait etki matrisi} \quad (4.2.31)$$

$$\hat{H} = \hat{H}(\bar{q}) \in \mathcal{R}^{\lambda n \times \lambda n} : \text{Cisimlerin ivmelerine ait büyütülmüş kütle matrisi} \quad (4.2.32)$$

$$\hat{N} = \hat{N}(\bar{q}) \in \mathcal{R}^{\lambda n \times m} : \text{Genelleştirilmiş ivmelere ait büyütülmüş kütle matrisi} \quad (4.2.33)$$

$$\hat{L} = \hat{L}(\bar{q}) \in \mathcal{R}^{\lambda n \times m} : \text{Genelleştirilmiş eyletim kuvvetlerine ait etki matrisi} \quad (4.2.34)$$

$$\hat{D} = \hat{D}(\bar{q}) \in \mathcal{R}^{\lambda n \times r} : \text{Genelleştirilmiş tepki kuvvetlerine ait etki matrisi} \quad (4.2.35)$$

$$\bar{a}^\circ = \bar{a}^\circ(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) \in \mathcal{R}^{\lambda n} : \text{Cisimlere ait eklentisel ivmeler dikeysıra matrisi} \quad (4.2.36)$$

$$\bar{X} = \bar{X}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) \in \mathcal{R}^{\lambda n} : \text{Genelleştirilmiş eklentisel kuvvetler dikeysıra matrisi} \quad (4.2.37)$$

$$\bar{Y} = \bar{Y}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) \in \mathcal{R}^{\lambda n} : \text{Genelleştirilmiş eklentisel kuvvetler dikeysıra matrisi} \quad (4.2.38)$$

Not: Yukarıda hem \bar{X} hem de \bar{Y} , aynı isimle adlandırılmışlardır. Ancak, böyle olsa bile, tabii ki, yer aldıkları denkleme göre uygun olan anlamı üstlenirler.

4.2.7. Hareket Denklemi ve Dinamik Analiz Amacıyla Kullanımı

Bir sistemin hareket denklemi, o sistemin genelleştirilmiş ivmeleri (\ddot{q}) ile genelleştirilmiş eyletim kuvvetleri (\bar{P}) arasındaki ilişkiyi arada genelleştirilmiş yapısal tepki kuvvetleri (\bar{R}) görünmeyecek biçimde ifade eden denklem olarak tanımlanır. Hareket denklemi, genellikle şöyle yazılır.

$$\hat{M}\ddot{q} = \hat{E}\bar{P} + \bar{Z} \quad (4.2.39)$$

(4.2.39) denklemindeki matrisler, boyutları küçülmüş olmakla birlikte, daha öncekilere benzer bir biçimde aşağıdaki gibi adlandırılırlar.

$$\hat{M} = \hat{M}(\bar{q}) \in \mathcal{R}^{m \times m} : \text{Genelleştirilmiş kütle matrisi} \quad (4.2.40)$$

$$\hat{E} = \hat{E}(\bar{q}) \in \mathcal{R}^{m \times m} : \text{Genelleştirilmiş eyletim kuvvetleri etki matrisi} \quad (4.2.41)$$

$$\bar{Z} = \bar{Z}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) \in \mathcal{R}^m : \text{Genelleştirilmiş eklentisel kuvvetler dikeysıra matrisi} \quad (4.2.42)$$

Hareket denklemi yapısal tepkiler görünmeyecek biçimde elde edildikten sonra, hem devinimsel hem de eyletimsel dinamik analiz için aşağıda anlatılan biçimlerde kullanılabilir.

a) Devinimsel Dinamik Analiz

Böyle bir analiz yapılacaksa, genelleştirilmiş eyletim kuvvetleri, genel bir durumda, aşağıdaki denklemde ifade edildiği gibi belirtilir.

$$\bar{P} = \bar{P}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) \quad (4.2.43)$$

Bunun üzerine (4.2.39) sayılı hareket denklemi şu şekilde düzenlenir.

$$\ddot{q} = \bar{f}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) = [\hat{M}(\bar{q})]^{-1}[\hat{E}(\bar{q})\bar{P}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) + \bar{Z}^*(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)] \quad (4.2.44)$$

(4.2.44) denkleminde $[\hat{M}(\bar{q})]^{-1}$ şeklinde gösterilen *ters kütle matrisi* sorunsuzca elde edilebilir, çünkü gerçek bir fiziksel sistemin kütle matrisinin hiç bir zaman tekil olmadığı bilinen bir gerçektir.

(4.2.44) denklemindeki $\bar{Z}^*(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$ işlevi ise, $\bar{Z}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$ işlevinin bilinen ya da ölçümlere dayanan ya da kestirilen ifadesidir.

(4.2.44) denklemi, $\bar{q}(t)$ için bir *türevsel denklem* durumundadır. Bu denklem, belirtilen bir başlangıç konumu (\bar{q}_0) ve bir başlangıç hızı ($\dot{\bar{q}}_0$) için uygun bir bilgisayar yazılımı aracılığıyla tümlemlenerek $\bar{q}(t)$ dikeysıra matrisinin belli bir zaman aralığındaki değişimi bulunabilir. Böylece, sistem davranışının bilgisayar aracılığıyla benzetimi (simülasyonu) yapılmış olur. Bu işlem değişik senaryolar için tekrarlanarak sistemin dinamik davranışları incelenip değerlendirilebilir.

Kullanılacak tipik bir sayısal tümlevleme yöntemi için (4.2.44) denklemi, genellikle aşağıdaki iki denkleme ayrıştırılır.

$$\dot{\bar{q}} = \bar{v} \quad (4.2.45)$$

$$\dot{\bar{v}} = \bar{a} = \bar{f}(\bar{q}, \bar{v}, t) \quad (4.2.46)$$

(4.2.45) ve (4.2.46) türevsel denklemleri için kullanılabilir en basit yenilemeli tümlevleme yöntemi ise, ikinci mertebeden Euler yöntemidir. Bu yöntem, sistemin t anındaki konum ve hızına dayanarak, yeterince küçük bir τ zaman artımıyla, sistemin $t + \tau$ anındaki konum ve hızını aşağıdaki denklemlere göre verir.

$$\bar{q}(t + \tau) = \bar{q}(t) + \bar{v}(t)\tau + \bar{a}(t)\tau^2/2 \quad (4.2.47)$$

$$\bar{v}(t + \tau) = \bar{v}(t) + \bar{a}(t)\tau \quad (4.2.48)$$

Aslında, çok daha gelişkin fakat hesaplama yükü de bir o kadar artmış olan tümlevleme yöntemleri de vardır. Bu durumda, kullanılacak tümlevleme yöntemi, aşağıdaki hususlar göz önüne alınarak seçilebilir.

Eğer sistemin dinamik benzetimleri kontrolsüz ya da açık çevrimli bir kontrol kuralına göre yapılacaksa, yani belirtilen eyletim girdisi $\bar{P} = \bar{P}(t)$ biçiminde olup geribesleme unsurları içermiyorsa, o zaman, yapılan benzetim hatası ile harcanan bilgisayar zamanı ölçütlerini dengeleyen yeterince gelişkin bir tümlevleme yöntemi seçilmelidir.

Eğer sistemin dinamik benzetimleri, kararlı olacak biçimde tasarlanmış bir geribeslemeli kontrolcunun etkisi altında yapılacaksa, yani belirtilen eyletim girdisi $\bar{P} = \bar{P}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$ biçiminde olup \bar{q} ve $\dot{\bar{q}}$ matrislerini geribesleme unsurları olarak içeriyorsa, o zaman, (4.2.47) ve (4.2.48) denklemleriyle tanımlanan basit ve hızlı tümlevleme yöntemi seçilebilir. Çünkü, geribeslemeli kontrolcu, sistemin \bar{q} ve $\dot{\bar{q}}$ çıktıları üzerindeki sayısal hataların etkilerini de, sanki saptırıcı girdilerin etkileriymiş gibi, yok etmeye çalışır.

b) Eyletimsel Dinamik Analiz

Böyle bir analiz yapılacaksa, sistemin yapması istenen bir hareket, yani genelleştirilmiş koordinatların zamana göre istenen değişimleri, aşağıdaki denklemde ifade edildiği gibi belirtilir.

$$\bar{q} = \bar{q}(t) \quad (4.2.49)$$

Bunun üzerine, eğer \hat{E} matrisi tekil değilse, (4.2.39) sayılı hareket denklemi şu şekilde düzenlenir.

$$\bar{P} = \bar{P}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, \ddot{\bar{q}}, t) = [\hat{E}(\bar{q})]^{-1}[\hat{M}(\bar{q})\ddot{\bar{q}} - \bar{Z}^*(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)] \quad (4.2.50)$$

(4.2.50) denklemdeki $\bar{Z}^*(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$ işlevi, daha önce de bahsedildiği gibi, $\bar{Z}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$ işlevinin bilinen ya da ölçülen ya da kestirilen ifadesidir.

(4.2.50) denklemi sayesinde, sistemin, $\bar{q}(t)$ biçiminde belirtilen istenen bir görev hareketini, $\bar{Z}^*(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$ biçiminde olduğu varsayılan bir eklentisel kuvvet takımına karşın yapabilmesi için gereken genelleştirilmiş eyletim kuvvetleri (\bar{P}) belirlenebilir. Böylece, sistemin bu görev için yeterli olup olmadığı değerlendirilebilir. Eğer yeterli olmadığı görülürse, eyleticilerinden hangilerinin ne kadar güçlendirilmesi gerektiği kararlaştırılabilir.

Eğer \hat{E} matrisi tekilse, sistemde *eyletimsel tekillik* oluşur. Böyle bir tekillik durumunda, $\text{rank}(\hat{E}) = m' < m$ olduğu için (4.2.39) denklemi, $\bar{Z} = \bar{Z}^*$, $\text{rank}(\hat{E}_{11}) = m'$, $\bar{P}_1 \in \mathcal{R}^{m'}$, $\bar{P}_2 \in \mathcal{R}^{m''}$ ve $m'' = m - m'$ olmak üzere aşağıdaki iki denkleme ayrıştırılabilir.

$$\hat{E}_{11}\bar{P}_1 + \hat{E}_{12}\bar{P}_2 = \hat{M}_1\ddot{\bar{q}} - \bar{Z}_1^* \quad (4.2.51)$$

$$\hat{E}_{21}\bar{P}_1 + \hat{E}_{22}\bar{P}_2 = \hat{M}_2\ddot{\bar{q}} - \bar{Z}_2^* \quad (4.2.52)$$

\hat{E}_{11} matrisinin rankı tam olduğu için (4.2.51) denklemi \bar{P}_1 dikeysıra matrisini \bar{P}_2 dikeysıra matrisine bağlı olarak şöyle verir.

$$\bar{P}_1 = \hat{E}_{11}^{-1}(\hat{M}_1\ddot{q} - \bar{Z}_1^* - \hat{E}_{12}\bar{P}_2) \quad (4.2.53)$$

(4.2.53) denklemi yerine konunca, (4.2.52) denklemi şu şekli alır.

$$(\hat{E}_{22} - \hat{E}_{21}\hat{E}_{11}^{-1}\hat{E}_{12})\bar{P}_2 = (\hat{M}_2 - \hat{E}_{21}\hat{E}_{11}^{-1}\hat{M}_1)\ddot{q} + (\hat{E}_{21}\hat{E}_{11}^{-1}\bar{Z}_1^* - \bar{Z}_2^*) \quad (4.2.54)$$

(4.2.54) denkleminde göre, eyletimsel tekilliğe rağmen, yani $\text{rank}(\hat{E}_{22} - \hat{E}_{21}\hat{E}_{11}^{-1}\hat{E}_{12}) = 0$ olmasına rağmen, \bar{P}_2 dikeysıra matrisinin sınırlı büyüklükte kalabilmesi için, aşağıdaki iki denklemin sağlanması gerekir.

$$(\hat{E}_{22} - \hat{E}_{21}\hat{E}_{11}^{-1}\hat{E}_{12})\bar{P}_2 = \bar{0} \quad (4.2.55)$$

$$(\hat{M}_2 - \hat{E}_{21}\hat{E}_{11}^{-1}\hat{M}_1)\ddot{q} = \bar{Z}_2^* - \hat{E}_{21}\hat{E}_{11}^{-1}\bar{Z}_1^* \quad (4.2.56)$$

(4.2.55) denkleminde göre, \bar{P}_2 dikeysıra matrisi, sınırlı büyüklükte kalsa bile tümüyle belirsizleşir. Diğer bir deyişle, \bar{P}_2 dikeysıra matrisine rastgele bir değer verilebilir; ancak bu değer ne olursa olsun sistem üzerinde herhangi bir etki yaratamaz.

Öteyandan, (4.2.53) denkleminde göre, \bar{P}_2 dikeysıra matrisine, sistemin davranışını etkilemese bile, öyle bir değer verilebilir ki, hiç değilse \bar{P} dikeysıra matrisinin büyüklüğü, yani $|\bar{P}|^2 = \bar{P}^t\bar{P} = \bar{P}_1^t\bar{P}_1 + \bar{P}_2^t\bar{P}_2$ en küçük yapılabilir.

(4.2.56) denkleminde göre ise, eyletimsel tekillik durumunda, eyletim kuvvetlerinin sınırlı büyüklüklerde kalabilmeleri için sistemin istenen hareketinin bu denklemle uyumlu olması gerekir. Bu uyumu sağlamak üzere, \ddot{q} dikeysıra matrisinin ancak $\ddot{q}_1 \in \mathcal{R}^{m'}$ ayrışkası istendiği gibi belirtilebilir. Aynı matrisin $\ddot{q}_2 \in \mathcal{R}^{m''}$ ayrışkasının ise, (4.2.56) denkleminin aşağıdaki şeklini sağlayacak biçimde belirlenmesi gerekir.

$$(\hat{M}_{21} - \hat{E}_{21}\hat{E}_{11}^{-1}\hat{M}_{11})\ddot{q}_1 + (\hat{M}_{22} - \hat{E}_{21}\hat{E}_{11}^{-1}\hat{M}_{12})\ddot{q}_2 = \bar{Z}_2^* - \hat{E}_{21}\hat{E}_{11}^{-1}\bar{Z}_1^* \quad (4.2.57)$$

(4.2.57) denkleminde, $(\hat{M}_{22} - \hat{E}_{21}\hat{E}_{11}^{-1}\hat{M}_{12})$ matrisinin tekil olmadığı varsayımıyla, \ddot{q}_2 ayrışkası, \ddot{q}_1 ayrışkasına bağlı olarak şöyle bulunur.

$$\ddot{q}_2 = (\hat{M}_{22} - \hat{E}_{21}\hat{E}_{11}^{-1}\hat{M}_{12})^{-1}[(\bar{Z}_2^* - \hat{E}_{21}\hat{E}_{11}^{-1}\bar{Z}_1^*) - (\hat{M}_{21} - \hat{E}_{21}\hat{E}_{11}^{-1}\hat{M}_{11})\ddot{q}_1] \quad (4.2.58)$$

4.3. Hareket Denkleminin Newton-Euler Denklemlerinden Elde Edilmesi

Kısım 4.2'de tanımlanan (4.2.39) sayılı hareket denklemi, (4.2.22) ya da (4.2.23) denklemi biçiminde yazılmış olan tümleşik Newton-Euler denkleminde aşağıda anlatılan yöntemlerden biri kullanılarak elde edilebilir.

4.3.1. Yöntem 1: Genelleştirilmiş Eyletim Kuvvetlerini Elde Etme Yöntemi

Bu yöntemi uygulamak için (4.2.23) denklemi şöyle düzenlenir.

$$\hat{L}\bar{P} + \hat{D}\bar{R} = [\hat{L} \quad \hat{D}] \begin{bmatrix} \bar{P} \\ \bar{R} \end{bmatrix} = \hat{N}\ddot{q} - \bar{Y} \quad (4.3.1)$$

Eğer sistem eyletimsel tekillik durumunda değilse, yani $\det[\hat{L} \quad \hat{D}] \neq 0$ ise, $[\hat{L} \quad \hat{D}]$ matrisinin tersi şöyle ifade edilebilir.

$$[\hat{L} \quad \hat{D}]^{-1} = \begin{bmatrix} \hat{\Phi} \\ \hat{\Psi} \end{bmatrix} \quad (4.3.2)$$

Bunun üzerine, (4.3.1) denklemi, \bar{Q} ve \bar{R} dikeysıra matrislerini şöyle verir.

$$\bar{P} = \hat{\Phi}(\hat{N}\ddot{q} - \bar{Y}) = (\hat{\Phi}\hat{N})\ddot{q} - \hat{\Phi}\bar{Y} \quad (4.3.3)$$

$$\bar{R} = \hat{\Psi}(\hat{N}\ddot{q} - \bar{Y}) = (\hat{\Psi}\hat{N})\ddot{q} - \hat{\Psi}\bar{Y} \quad (4.3.4)$$

Böylece, hareket denklemi, aşağıda görüldüğü gibi, doğrudan doğruya genelleştirilmiş eyletim kuvvetlerini verecek biçimde elde edilmiş olur.

$$\bar{P} = (\hat{E}')^{-1}(\hat{M}'\ddot{q} - \bar{Z}') \quad (4.3.5)$$

(4.3.3) ve (4.3.5) denklemlerine göre, \hat{M}' , \hat{E}' ve \bar{Z}' matrisleri ile $\hat{\Phi}$ ve \bar{Y} matrisleri arasında şu ilişkiler bulunmaktadır.

$$(\hat{E}')^{-1}\hat{M}' = \hat{\Phi}\hat{N} \Rightarrow \hat{M}' = \hat{E}'\hat{\Phi}\hat{N} \quad (4.3.6)$$

$$(\hat{E}')^{-1}\bar{Z}' = \hat{\Phi}\bar{Y} \Rightarrow \bar{Z}' = \hat{E}'\hat{\Phi}\bar{Y} \quad (4.3.7)$$

Burada söylemek gerekir ki, (4.2.39) sayılı hareket denklemindeki \hat{M} , \hat{E} ve \bar{Z} matrisleri yerine \hat{M}' , \hat{E}' ve \bar{Z}' gibi farklı matrisler de kullanılabilir. Ancak, doğal olarak, bu matrisler birbirleriyle tekil olmayan herhangi bir \hat{A} matrisi aracılığıyla aşağıda gösterilen biçimde ilişkilidirler.

$$\hat{M}' = \hat{A}\hat{M} \quad (4.3.8)$$

$$\hat{E}' = \hat{A}\hat{E} \quad (4.3.9)$$

$$\bar{Z}' = \hat{A}\bar{Z} \quad (4.3.10)$$

Öte yandan, geleneksel formülasyona göre, kütle matrisinin simetrik olması beklenir. Bu beklentiyi sağlamak üzere, \hat{E}' matrisi, (4.3.6) denklemine göre şöyle seçilebilir.

$$\hat{E}' = [\hat{I} + (\hat{\Phi}\hat{N})^t(\hat{\Phi}\hat{N})^{-1}]/2 \quad (4.3.11)$$

Bu seçim üzerine, \hat{M}' ve \bar{Z}' matrisleri şöyle ifade edilirler.

$$\hat{M}' = [(\hat{\Phi}\hat{N}) + (\hat{\Phi}\hat{N})^t]/2 \quad (4.3.12)$$

$$\bar{Z}' = [\hat{I} + (\hat{\Phi}\hat{N})^t(\hat{\Phi}\hat{N})^{-1}]\hat{\Phi}\bar{Y}/2 \quad (4.3.13)$$

4.3.2. Yöntem 2: Genelleştirilmiş İvmeleri Elde Etme Yöntemi

Yöntem 1'e benzeyen bu yöntemi uygulamak için (4.2.23) denklemi bu kez şöyle düzenlenir.

$$\hat{N}\ddot{q} - \hat{D}\bar{R} = [\hat{N} \quad -\hat{D}] \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \bar{R} \end{bmatrix} = \hat{L}\bar{P} + \bar{Y} \quad (4.3.14)$$

Eğer sistem eyletimsel tekillik durumunda değilse, yani $\det[\hat{N} \quad -\hat{D}] \neq 0$ ise, $[\hat{N} \quad -\hat{D}]$ matrisinin tersi şöyle ifade edilebilir.

$$[\hat{N} \quad -\hat{D}]^{-1} = \begin{bmatrix} \hat{\Theta} \\ \hat{\Xi} \end{bmatrix} \quad (4.3.15)$$

Bunun üzerine, (4.3.15) denklemi, \ddot{q} ve \bar{R} dikeysıra matrislerini şöyle verir.

$$\ddot{q} = \hat{\theta}(\hat{L}\bar{P} + \bar{Y}) = (\hat{\theta}\hat{L})\bar{P} + \hat{\theta}\bar{Y} \quad (4.3.16)$$

$$\bar{R} = \hat{\varepsilon}(\hat{L}\bar{P} + \bar{Y}) = (\hat{\varepsilon}\hat{L})\bar{P} + \hat{\varepsilon}\bar{Y} \quad (4.3.17)$$

Görüldüğü gibi, bu yöntem, hareket denklemini önceki yöntemdekinden farklı matrisler (\hat{M}'' , \hat{E}'' , \hat{Z}'') oluşturarak aşağıda yazılan biçimde verir.

$$\ddot{q} = (\hat{M}'')^{-1}(\hat{E}''\bar{P} + \hat{Z}'') \quad (4.3.18)$$

(4.3.16) ve (4.3.18) denklemlerine göre, \hat{M}'' ve \hat{Z}'' matrislerinin ifadeleri şöyledir.

$$(\hat{M}'')^{-1}\hat{E}'' = \hat{\theta}\hat{L} \Rightarrow \hat{M}'' = \hat{E}''(\hat{\theta}\hat{L})^{-1} \quad (4.3.19)$$

$$(\hat{M}'')^{-1}\hat{Z}'' = \hat{\theta}\bar{Y} \Rightarrow \hat{Z}'' = \hat{E}''(\hat{\theta}\hat{L})^{-1}\hat{\theta}\bar{Y} \quad (4.3.20)$$

Bu yöntemde de \hat{M}'' matrisinin simetrik olması için \hat{E}'' matrisi şöyle seçilebilir.

$$\hat{E}'' = [\hat{I} + (\hat{L}^t\hat{\theta}^t)^{-1}(\hat{\theta}\hat{L})]/2 \quad (4.3.21)$$

Dikkat edilirse, Yöntem 1 ve Yöntem 2, yalnızca hareket denklemini vermekle kalmayıp aynı zamanda genelleştirilmiş yapısal tepki kuvvetlerini (\bar{R} dikeysıra matrisini) de verirler. Fakat, eğer \bar{R} için özel bir ilgi duyulmuyorsa, bu matrisi daha için başında yok ederek hareket denklemini doğrudan ve çok daha kolay bir biçimde ($\lambda n \times \lambda n$ boyutlu bir matrisin tersini almaya gerek kalmadan) elde etmek de mümkündür. Bunun için aşağıda anlatılan Yöntem 3 kullanılabilir.

4.3.3. Yöntem 3: Serbestlik ve Kısıtlama Yönlerinin Dikliğine Dayalı Yöntem

(4.2.23) denklemi, taraf tarafa $\hat{W}^t \in \mathcal{R}^{m \times \lambda n}$ matrisiyle çarpılarak ve (4.2.25) denklemi kullanılarak aşağıdaki denklem elde edilir.

$$(\hat{W}^t\hat{H}\hat{W})\ddot{q} = (\hat{W}^t\hat{L})\bar{P} + (\hat{W}^t\hat{D})\bar{R} + \hat{W}^t\bar{Y} \quad (4.3.22)$$

Bu yöntemin dayanak noktası, aşağıdaki eşitliktir. Bu eşitlik, sistemin serbestlik yönlerinin kısıtlama yönlerine dik olduğunu ifade etmektedir.

$$\hat{W}^t\hat{D} = \hat{0} \quad (4.3.23)$$

(4.3.23) eşitliği sayesinde, (4.3.22) denklemi basitleşerek şu şekli alır.

$$(\hat{W}^t\hat{H}\hat{W})\ddot{q} = (\hat{W}^t\hat{L})\bar{P} + \hat{W}^t\bar{Y} \quad (4.3.24)$$

(4.2.39) ve (4.3.24) denklemleri karşılaştırılınca, \hat{M} , \hat{E} ve \hat{Z} matrisleri için şu ifadeler elde edilir.

$$\hat{M} = \hat{W}^t\hat{H}\hat{W} \quad (4.3.25)$$

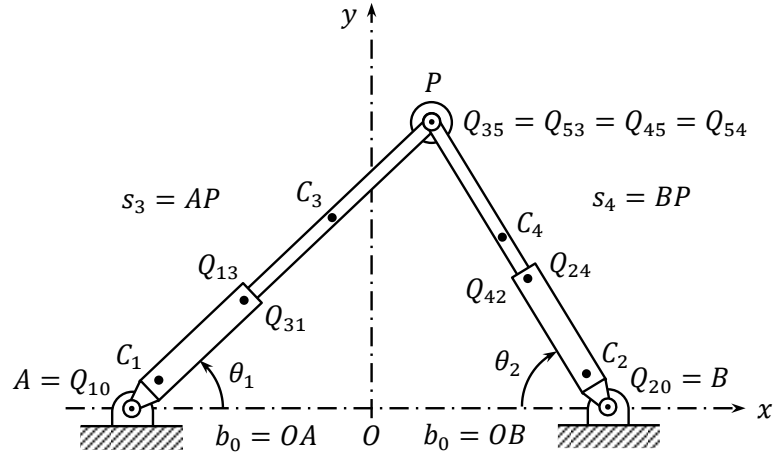
$$\hat{E} = \hat{W}^t\hat{L} \quad (4.3.26)$$

$$\hat{Z} = \hat{W}^t\bar{Y} \quad (4.3.27)$$

(4.3.25) denkleminde görüldüğü gibi, Yöntem 3, \hat{M} matrisini doğrudan doğruya simetrik bir matris olarak vermektedir.

Bu yöntemin yararlı bir özelliği de, (4.2.22) ve (4.2.23) sayılı tümleşik Newton-Euler denklemleri için bir *doğrulama* sağlamasıdır. Eğer söz konusu denklemlerde herhangi bir hata yapılmışsa, büyük bir olasılıkla, $\hat{W}^t\hat{D} = \hat{0}$ sonucu alınamayacaktır. Bunun üzerine, tüm ayrıntıları içeren (4.2.18) – (4.2.21) denklemleri yeniden gözden geçirilerek hata ya da hatalar bulunup düzeltilebilir.

4.4. Örnek: Düzlemsel Bir Paralel Manipülâtörün Kinematik ve Dinamik Analizi



Şekil 4.4 İki Serbestlik Dereceli Düzlemsel Bir Paralel Manipülâtör

4.4.1. Sistemin Betimlenmesi

Şekil 4.4'te iki serbestlik dereceli düzlemsel bir paralel manipülâtör görülmektedir. Manipülâtörün kullanım amacı, P noktasında taşınan \mathcal{B}_5 cismini istenen bir biçimde hareket ettirmektir. Manipülâtör, J_{13} ve J_{24} kayar eklemlerindeki doğrusal eyleticilerle kontrol edilmektedir. Eyletim kuvvetleri, $F_{13} = F_1$ ve $F_{24} = F_2$ olarak tanımlanmıştır. Genelleştirilmiş koordinatlar ise, eyletimli eklem değişkenleri olarak değil de, doğrudan doğruya, ilgi odağı olan \mathcal{B}_5 cisminin x ve y koordinatları olarak seçilmiştir.

Bu örnekteki kinematik ve dinamik analizi bir miktar basitleştirebilmek amacıyla, sistemin yapısal özellikleri hakkında şu varsayımlar yapılmıştır.

- (1) \mathcal{B}_3 ve \mathcal{B}_4 uzunları birbirinin aynısıdır, yani $m_4 = m_3$ ve $J_4 = J_3$. \mathcal{B}_1 ve \mathcal{B}_2 uzunları da birbirinin aynısıdır, yani $m_2 = m_1$ ve $J_2 = J_1$. Ayrıca, bu uzunların kütle merkezleri, dönme merkezlerine çok yakındır. Yani,

$$c_1 = AC_1 \approx 0 \text{ ve } c_2 = BC_2 \approx 0$$

- (2) P noktasında yalnızca taşınan cisme bağlı olan J_{35} ve J_{45} döner eklemleri vardır. Sistemin aşırı kısıtlı olmaması için J_{34} döner ekleminin oluşturulmadığı varsayılmıştır.

4.4.2. Kinematik Analiz

P noktasının x ve y koordinatları için şu denklemler yazılabilir.

$$x = s_3 c \theta_1 - b_0 \quad (4.4.1)$$

$$y = s_3 s \theta_1 \quad (4.4.2)$$

$$x = b_0 - s_4 c \theta_2 \quad (4.4.3)$$

$$y = s_4 s \theta_2 \quad (4.4.4)$$

(4.4.1) – (4.4.4) denklemlerinden eklem değişkenleri şöyle bulunur.

$$s_3 = \sqrt{(b_0 + x)^2 + y^2} \quad (4.4.5)$$

$$s_4 = \sqrt{(b_0 - x)^2 + y^2} \quad (4.4.6)$$

$$\theta_1 = \text{atan}_2[y, (b_0 + x)] \quad (4.4.7)$$

$$\theta_2 = \text{atan}_2[y, (b_0 - x)] \quad (4.4.8)$$

(4.4.1) – (4.4.4) denklemlerinin taraf tarafa türevleri alınır, aşağıdaki hız denklemleri elde edilir.

$$\dot{x} = \dot{s}_3 c\theta_1 - s_3 \dot{\theta}_1 s\theta_1 \quad (4.4.9)$$

$$\dot{y} = \dot{s}_3 s\theta_1 + s_3 \dot{\theta}_1 c\theta_1 \quad (4.4.10)$$

$$\dot{x} = \dot{s}_4 \dot{\theta}_2 s\theta_2 - \dot{s}_4 c\theta_2 \quad (4.4.11)$$

$$\dot{y} = \dot{s}_4 \dot{\theta}_2 c\theta_2 + \dot{s}_4 s\theta_2 \quad (4.4.12)$$

(4.4.9) – (4.4.12) denklemlerinden eklem hızları (eklem değişkenlerinin birinci türevleri) şöyle bulunur.

$$\dot{s}_3 = \dot{y}s\theta_1 + \dot{x}c\theta_1 \quad (4.4.13)$$

$$\dot{s}_4 = \dot{y}s\theta_2 - \dot{x}c\theta_2 \quad (4.4.14)$$

$$\dot{\theta}_1 = (\dot{y}c\theta_1 - \dot{x}s\theta_1)/s_3 \quad (4.4.15)$$

$$\dot{\theta}_2 = (\dot{y}c\theta_2 + \dot{x}s\theta_2)/s_4 \quad (4.4.16)$$

(4.4.13) – (4.4.16) denklemlerinin türevlerinden de eklem ivmeleri (eklem değişkenlerinin ikinci türevleri) şöyle bulunur.

$$\ddot{s}_3 = \ddot{y}s\theta_1 + \ddot{x}c\theta_1 + (\dot{y}c\theta_1 - \dot{x}s\theta_1)\dot{\theta}_1 \Rightarrow$$

$$\ddot{s}_3 = \ddot{y}s\theta_1 + \ddot{x}c\theta_1 + a_3^\circ \quad (4.4.17)$$

$$\ddot{s}_4 = \ddot{y}s\theta_2 - \ddot{x}c\theta_2 + (\dot{y}c\theta_2 + \dot{x}s\theta_2)\dot{\theta}_2 \Rightarrow$$

$$\ddot{s}_4 = \ddot{y}s\theta_2 - \ddot{x}c\theta_2 + a_4^\circ \quad (4.4.18)$$

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{1}{s_3}(\ddot{y}c\theta_1 - \ddot{x}s\theta_1) - \frac{1}{s_3}(\dot{y}s\theta_1 + \dot{x}c\theta_1)\dot{\theta}_1 - \frac{1}{s_3^2}(\dot{y}c\theta_1 - \dot{x}s\theta_1)\dot{s}_3 \Rightarrow$$

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{1}{s_3}(\ddot{y}c\theta_1 - \ddot{x}s\theta_1) - \alpha_1^\circ \quad (4.4.19)$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{1}{s_4}(\ddot{y}c\theta_2 + \ddot{x}s\theta_2) - \frac{1}{s_4}(\dot{y}s\theta_2 - \dot{x}c\theta_2)\dot{\theta}_2 - \frac{1}{s_4^2}(\dot{y}c\theta_2 + \dot{x}s\theta_2)\dot{s}_4 \Rightarrow$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{1}{s_4}(\ddot{y}c\theta_2 + \ddot{x}s\theta_2) - \alpha_2^\circ \quad (4.4.20)$$

Not: Yukarıda kullanılan *eklem hızı* ve *eklem ivmesi* terimleri, aslında çok doğru oluşturulmuş terimler değildir. Bununla birlikte, ifade kısalığı amacıyla, *eklem değişkeninin birinci türevi* ve *eklem değişkeninin ikinci türevi* gibi doğru fakat uzun terimlere göre, çoğu kez, tercih edilirler.

Yukarıdaki aşamadan sonra, $c_3 = PC_3 = PC_4$ parametresi ile yerleri belirtilen kütle merkezlerinin de konum, hız ve ivmeleri aşağıda görüldüğü gibi bulunabilir.

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_{C_1} \approx \vec{r}_A \Rightarrow \vec{v}_1 \approx \vec{0} \Rightarrow \vec{a}_1 \approx \vec{0} \quad (4.4.21)$$

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_{C_2} \approx \vec{r}_B \Rightarrow \vec{v}_2 \approx \vec{0} \Rightarrow \vec{a}_2 \approx \vec{0} \quad (4.4.22)$$

$$\vec{r}_3 = \vec{r}_{C_3} = -b_0 \vec{u}_x + s'_3 \vec{u}(\theta_1); \quad s'_3 = s_3 - c_3 \quad (4.4.23)$$

$$\vec{v}_3 = D_0 \vec{r}_3 = \dot{s}_3 \vec{u}(\theta_1) + s'_3 \dot{\theta}_1 \vec{u}'(\theta_1) \quad (4.4.24)$$

$$\vec{a}_3 = D_0 \vec{v}_3 = \ddot{s}_3 \vec{u}(\theta_1) + s'_3 \ddot{\theta}_1 \vec{u}'(\theta_1) + 2\dot{s}_3 \dot{\theta}_1 \vec{u}'(\theta_1) - s'_3 \dot{\theta}_1^2 \vec{u}(\theta_1) \Rightarrow$$

$$\vec{a}_3 = \ddot{s}_3 \vec{u}(\theta_1) + s'_3 \ddot{\theta}_1 \vec{u}'(\theta_1) + \vec{a}_3^\circ \quad (4.4.25)$$

$$\vec{r}_4 = \vec{r}_{C_4} = b_0 \vec{u}_x + s'_4 \vec{u}(\pi - \theta_2); \quad s'_4 = s_4 - c_3 \quad (4.4.26)$$

$$\vec{v}_4 = D_0 \vec{r}_4 = \dot{s}_4 \vec{u}(\pi - \theta_2) - s'_4 \dot{\theta}_2 \vec{u}'(\pi - \theta_2) \quad (4.4.27)$$

$$\vec{a}_4 = D_0 \vec{v}_4 = \ddot{s}_4 \vec{u}(\pi - \theta_2) - s'_4 \ddot{\theta}_2 \vec{u}'(\pi - \theta_2)$$

$$- 2\dot{s}_4 \dot{\theta}_2 \vec{u}'(\pi - \theta_2) - s'_4 \dot{\theta}_2^2 \vec{u}(\pi - \theta_2) \Rightarrow$$

$$\vec{a}_4 = \ddot{s}_4 \vec{u}(\pi - \theta_2) - s'_4 \ddot{\theta}_2 \vec{u}'(\pi - \theta_2) + \vec{a}_4^\circ \quad (4.4.28)$$

Yukarıdaki denklemlerde, belli bir θ açısı için x ekseninin pozitif doğrultusuna göre yön belirten birim vektörler şöyle tanımlanmışlardır.

$$\vec{u}(\theta) = \vec{u}_x \cos \theta + \vec{u}_y \sin \theta \quad (4.4.29)$$

$$\vec{u}'(\theta) = \vec{u}(\theta + \pi/2) = \vec{u}_y \cos \theta - \vec{u}_x \sin \theta \quad (4.4.30)$$

4.4.3. Newton-Euler Denklemleri

Sistemin yapısal özellikleri hakkında yapılan varsayımlar kullanılarak sisteme ait Newton-Euler denklemleri şöyle yazılabilir.

$$m_3 \vec{a}_3 = F_1 \vec{u}(\theta_1) + N_{13} \vec{u}'(\theta_1) - (F_{35}^x \vec{u}_x + F_{35}^y \vec{u}_y) - m_3 g \vec{u}_y \quad (4.4.31)$$

$$m_3 \vec{a}_4 = F_2 \vec{u}(\pi - \theta_2) + N_{24} \vec{u}'(\pi - \theta_2) - (F_{45}^x \vec{u}_x + F_{45}^y \vec{u}_y) - m_3 g \vec{u}_y \quad (4.4.32)$$

$$m_5 \vec{a}_5 = (F_{35}^x + F_{45}^x) \vec{u}_x + (F_{35}^y + F_{45}^y) \vec{u}_y - m_5 g \vec{u}_y \quad (4.4.33)$$

$$m_1 \vec{a}_1 \approx \vec{0} = -F_1 \vec{u}(\theta_1) - N_{13} \vec{u}'(\theta_1) + F_{01}^x \vec{u}_x + F_{01}^y \vec{u}_y - m_1 g \vec{u}_y \quad (4.4.34)$$

$$m_1 \vec{a}_2 \approx \vec{0} = -F_2 \vec{u}(\pi - \theta_2) - N_{24} \vec{u}'(\pi - \theta_2) + F_{02}^x \vec{u}_x + F_{02}^y \vec{u}_y - m_1 g \vec{u}_y \quad (4.4.35)$$

$$J_3 \vec{\alpha}_3 = M_{13} \vec{u}_z - s_3'' N_{13} \vec{u}_z - c_3 \vec{u}(\theta_1) \times (F_{35}^x \vec{u}_x + F_{35}^y \vec{u}_y) \quad (4.4.36)$$

$$(s_3'' = s_3 - c_3 - b_1, \quad b_1 = A Q_{13})$$

$$J_3 \vec{\alpha}_4 = -J_3 \ddot{\theta}_2 \vec{u}_z = M_{24} \vec{u}_z - s_4'' N_{24} \vec{u}_z - c_3 \vec{u}(\pi - \theta_2) \times (F_{45}^x \vec{u}_x + F_{45}^y \vec{u}_y) \quad (4.4.37)$$

$$(s_4'' = s_4 - c_3 - b_1, \quad b_1 = B Q_{24})$$

$$J_1 \vec{\alpha}_1 = J_1 \ddot{\theta}_1 \vec{u}_z = -M_{13} \vec{u}_z - b_1 N_{13} \vec{u}_z \quad (4.4.38)$$

$$J_1 \vec{\alpha}_2 = -J_1 \ddot{\theta}_2 \vec{u}_z = -M_{24} \vec{u}_z - b_1 N_{24} \vec{u}_z \quad (4.4.39)$$

Dikkat edilirse, (4.4.34) ve (4.4.35) denklemlerinin tek kullanım amacı, diğer bilinmeyen kuvvet bileşenleri bulunduktan sonra, \vec{F}_{01} ve \vec{F}_{02} yapısal tepki kuvvetlerinin bileşenlerini aşağıdaki gibi vermektir.

$$F_{01}^x = F_1 c \theta_1 - N_{13} s \theta_1 \quad (4.4.40)$$

$$F_{01}^y = F_1 s \theta_1 + N_{13} c \theta_1 + m_1 g \quad (4.4.41)$$

$$F_{02}^x = -F_2 c \theta_2 - N_{24} s \theta_2 \quad (4.4.42)$$

$$F_{02}^y = F_2 s \theta_2 - N_{24} c \theta_2 + m_1 g \quad (4.4.43)$$

Geriye kalan vektör denklemlerinden de aşağıdaki 10 skalar denklem elde edilir.

$$J_1 \alpha_1 = -b_1 N_{13} - M_{13} \quad (4.4.44)$$

$$J_1 \alpha_2 = -b_1 N_{24} - M_{24} \quad (4.4.45)$$

$$J_3 \alpha_3 = -s_3'' N_{13} + M_{13} + c_3 F_{35}^x s \theta_1 - c_3 F_{35}^y c \theta_1 \quad (4.4.46)$$

$$J_3 \alpha_4 = -s_4'' N_{24} + M_{24} + c_3 F_{45}^x s \theta_2 + c_3 F_{45}^y c \theta_2 \quad (4.4.47)$$

$$m_3 a_3^x = F_1 c \theta_1 - N_{13} s \theta_1 - F_{35}^x \quad (4.4.48)$$

$$m_3 a_3^y = F_1 s \theta_1 + N_{13} c \theta_1 - F_{35}^y \quad (4.4.49)$$

$$m_3 a_4^x = -F_2 c \theta_2 - N_{24} s \theta_2 - F_{45}^x \quad (4.4.50)$$

$$m_3 a_4^y = +F_2 s \theta_2 - N_{24} c \theta_2 - F_{45}^y \quad (4.4.51)$$

$$m_5 a_5^x = F_{35}^x + F_{45}^x \quad (4.4.52)$$

$$m_5 a_5^y = F_{35}^y + F_{45}^y - m_5 g \quad (4.4.53)$$

Eyletimsel dinamik analiz açısından, yukarıdaki 10 denklemde yer alan 10 bilinmeyen şunlardır.

$$F_1, F_2; N_{13}, M_{13}, N_{24}, M_{24}, F_{35}^x, F_{35}^y, F_{45}^x, F_{45}^y$$

Yukarıdaki 10 denklemde yer alan dönme ve ötelenme ivmelerinin bileşenleri ile genelleştirilmiş ivmeler arasındaki ilişkiler ise, daha önceki kinematik analiz sonuçlarına dayanarak şöyle ifade edilebilir.

$$\alpha_1 = \ddot{\theta}_1 = \frac{1}{s_3} (\ddot{y} c \theta_1 - \ddot{x} s \theta_1) - \alpha_1^\circ \quad (4.4.54)$$

$$\alpha_2 = -\ddot{\theta}_2 = -\frac{1}{s_4} (\ddot{y} c \theta_2 + \ddot{x} s \theta_2) + \alpha_2^\circ \quad (4.4.55)$$

$$\alpha_3 = \ddot{\theta}_1 = \frac{1}{s_3} (\ddot{y} c \theta_1 - \ddot{x} s \theta_1) - \alpha_1^\circ \quad (4.4.56)$$

$$\alpha_4 = -\ddot{\theta}_2 = -\frac{1}{s_4} (\ddot{y} c \theta_2 + \ddot{x} s \theta_2) + \alpha_2^\circ \quad (4.4.57)$$

$$a_3^x = \ddot{s}_3 c \theta_1 - s_3' \ddot{\theta}_1 s \theta_1 + a_{30}^x \Rightarrow$$

$$a_3^x = \frac{c_3}{s_3} \ddot{y} s \theta_1 c \theta_1 + \frac{1}{s_3} (s_3 c^2 \theta_1 + s_3' s^2 \theta_1) \ddot{x} + (a_{30}^x + a_3^\circ c \theta_1 - s_3' \alpha_1^\circ s \theta_1) \quad (4.4.58)$$

$$a_3^y = \ddot{s}_3 s \theta_1 + s_3' \ddot{\theta}_1 c \theta_1 + a_{30}^y \Rightarrow$$

$$a_3^y = \frac{1}{s_3} (s_3 s^2 \theta_1 + s_3' c^2 \theta_1) \ddot{y} + \frac{c_3}{s_3} \dot{x} s \theta_1 c \theta_1 + (a_{30}^y + a_3^o s \theta_1 - s_3' \alpha_1^o c \theta_1) \quad (4.4.59)$$

$$a_4^x = -\ddot{s}_4 c \theta_2 + s_4' \ddot{\theta}_2 s \theta_2 + a_{40}^x \Rightarrow$$

$$a_4^x = -\frac{c_3}{s_4} \dot{y} s \theta_2 c \theta_2 + \frac{1}{s_4} (s_4 c^2 \theta_2 + s_4' s^2 \theta_2) \ddot{x} + (a_{40}^x - a_4^o c \theta_2 - s_4' \alpha_2^o s \theta_2) \quad (4.4.60)$$

$$a_4^y = \ddot{s}_4 s \theta_2 + s_4' \ddot{\theta}_2 c \theta_2 + a_{40}^y \Rightarrow$$

$$a_4^y = \frac{1}{s_4} (s_4 s^2 \theta_2 + s_4' c^2 \theta_2) \ddot{y} - \frac{c_3}{s_4} \dot{x} s \theta_2 c \theta_2 + (a_{40}^y + a_4^o s \theta_2 - s_4' \alpha_2^o c \theta_2) \quad (4.4.61)$$

$$a_5^x = \ddot{x} \quad (4.4.62)$$

$$a_5^y = \ddot{y} \quad (4.4.63)$$

4.4.4. Sayısal Uygulama

Sisteme ilişkin matrisleri sayısal olarak görmek için, sistemin aşağıda belirtilen parametreleri ve konumu için bir sayısal uygulama yapılmıştır.

$$b_0 = 0.5 \text{ m} , b_1 = b_2 = 0.5 \text{ m} , b_3 = b_4 = 1.0 \text{ m} , c_3 = c_4 = 0.5 \text{ m}$$

$$m_1 = m_2 = 2 \text{ kg} , m_3 = m_4 = 3 \text{ kg} , m_5 = 10 \text{ kg}$$

$$J_1 = m_1 b_1^2 / 3 = 0.1667 \text{ kg-m}^2 , J_3 = m_3 b_3^2 / 12 = 0.25 \text{ kg-m}^2$$

$$J_2 = J_1 , J_4 = J_3$$

$$x = 0.25 \text{ m} , y = 1.0 \text{ m}$$

Belirtilen koordinatlar için eklem değişkenleri şöyle bulunmuştur.

$$\theta_1 = 53.13^\circ , \theta_2 = 75.96^\circ ; s_3 = 1.25 \text{ m} , s_4 = 1.03 \text{ m}$$

Bu sisteme özgü \bar{a} , \bar{q} , \bar{P} ve \bar{R} dikeysıra matrisleri, devrik biçimleriyle şöyle tanımlanmıştır.

$$\bar{a}^t = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \alpha_4 \ a_3^x \ a_3^y \ a_4^x \ a_4^y \ a_5^x \ a_5^y] \quad (4.4.64)$$

$$\bar{q}^t = [x \ y] \quad (4.4.65)$$

$$\bar{P}^t = [F_1 \ F_2] \quad (4.4.66)$$

$$\bar{R}^t = [N_{13} \ M_{13} \ N_{24} \ M_{24} \ F_{35}^x \ F_{35}^y \ F_{45}^x \ F_{45}^y] \quad (4.4.67)$$

Sisteme ilişkin çeşitli matrisler ise, sayısal değerleriyle şöyle belirlenmiştir.

$$\hat{H} = \text{diag} [J_1 \ J_2 \ J_3 \ J_4 \ m_3 \ m_3 \ m_4 \ m_4 \ m_5 \ m_5] \Rightarrow$$

$$\hat{H} = \text{diag} [0.1667 \ 0.1667 \ 0.25 \ 0.25 \ 3.0 \ 3.0 \ 3.0 \ 3.0 \ 10.0 \ 10.0] \quad (4.4.68)$$

$$\hat{D} = \begin{bmatrix} -0.5 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.25 & 1 & 0 & 0 & 0.4 & -0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0308 & 1 & 0 & 0 & 0.4851 & 0.1213 \\ -0.8 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.9701 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -0.2425 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.4.69)$$

$$\hat{W}^t = \begin{bmatrix} -0.64 & -0.9412 & -0.64 & -0.9412 & 0.744 & 0.192 & 0.5435 & -0.1141 & 1 & 0 \\ 0.48 & -0.2353 & 0.48 & -0.2353 & 0.192 & 0.856 & -0.1141 & 0.9715 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.4.70)$$

$$\hat{L}^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.2425 & 0.9701 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.4.71)$$

$$\hat{M} = \hat{W}^t \hat{H} \hat{W} = \begin{bmatrix} 13.2361 & 0.3672 \\ 0.3672 & 15.2982 \end{bmatrix} \quad (4.4.72)$$

$$\hat{E} = \hat{W}^t \hat{L} = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.2425 \\ 0.8 & 0.9701 \end{bmatrix} \quad (4.4.73)$$

Böylece, sistemin belirtilen konumdaki hareket denklemi, şöyle yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} 13.2361 & 0.3672 \\ 0.3672 & 15.2982 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.2425 \\ 0.8 & 0.9701 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} \quad (4.4.74)$$

Bu sayısal uygulamanın diğer bir beklenen sonucu olarak (4.3.23) eşitliği de aşağıda görüldüğü gibi doğrulanmıştır.

$$\hat{W}^t \hat{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.4.75)$$

4.5. Hareket Denkleminin Lagrange Yöntemiyle Elde Edilmesi

Kısım 4.2'de sözü edilen (4.2.39) sayılı hareket denklemi, yapısal tepki kuvvet ve momentleriyle formülasyon aşamasında bile hiç uğraşmadan doğrudan doğruya Lagrange yöntemiyle elde edilebilir. Bu yöntem, iş ve enerji ilişkilerine dayanır. Yapısal tepki kuvvet ve momentlerinin yönleri ise hareket serbestliği olan yönleredir. Bu nedenle yapısal tepki kuvvet ve momentleri iş yapamazlar ve iş yapamadıkları için de Lagrange yönteminde yer alamazlar. Lagrange yöntemin uygulanışı ve aşamaları aşağıda anlatılmıştır.

4.5.1. Skalar Lagrange Denklemleri

Serbestlik derecesi m olan bir sistem için m adet birbirinden bağımsız genelleştirilmiş koordinat $(q_1, q_2, q_3, \dots, q_m)$ seçildikten sonra, $k \in \{1, 2, 3, \dots, m\}$ için, skalar Lagrange denklemleri geleneksel olarak şöyle yazılır.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_k} = Q_k + S_k \quad (4.5.1)$$

Skalar Lagrange denklemleri, daha ayrıntılı olarak şöyle de yazılabilir.

$$\dot{p}_k - \frac{\partial K}{\partial q_k} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial U}{\partial q_k} = Q_k + S_k \quad (4.5.2)$$

(4.5.1) ve (4.5.2) denklemlerinde aşağıda açıklanan tanımlar kullanılmıştır.

$$K = K(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) : \text{Kinetik Enerji İşlevi} \quad (4.5.3)$$

$$U = U(\bar{q}) : \text{Potansiyel Enerji İşlevi} \quad (4.5.4)$$

$$L = L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) = K(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) - U(\bar{q}) : \text{Lagrange İşlevi} \quad (4.5.5)$$

$$D = D(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) : \text{Enerji Yitirme İşlevi} \quad (4.5.6)$$

$$Q_k : q_k \text{ koordinatına ait genelleştirilmiş eyletim kuvveti} \quad (4.5.7)$$

$$S_k : q_k \text{ koordinatına ait genelleştirilmiş dış etki kuvveti} \quad (4.5.8)$$

$$p_k = \partial K / \partial \dot{q}_k : q_k \text{ koordinatına ait genelleştirilmiş momentum} \quad (4.5.9)$$

Lagrange denklemlerinden sistemin hareket denklemlerini elde edebilmek için öncelikle yukarıda tanımlanan niceliklerin ve ilgili işlevlerin elde edilmesi gerekir. Bunların elde edilmesiyle ilgili ayrıntılı açıklamalar aşağıda yapılmıştır.

4.5.2. Kinetik Enerji

Sistemin kinetik enerjisi şöyle ifade edilebilir.

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m M_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{1}{2} \dot{\bar{q}}^t \hat{M} \dot{\bar{q}} \quad (4.5.10)$$

(4.5.10) denkleminde şu tanım kullanılmıştır.

$$\hat{M} = \hat{M}(\bar{q}) : \text{Genelleştirilmiş Kütle Matrisi} \quad (4.5.11)$$

Not: \hat{M} matrisi, genelliği bozmadan, simetrik bir matris olarak, yani $M_{ji} = M_{ij}$ olacak biçimde, tanımlanabilir. Çünkü, \hat{M} simetrik olmasaydı, $\hat{M} = \hat{M}^* + \hat{M}'$ biçiminde, simetrik olan (\hat{M}^*) ve antisimetrik olan (\hat{M}') iki matrise ayrıştırılabilirdi. Fakat, \hat{M}' matrisi antisimetrik olduğu için, $\dot{\bar{q}}^t \hat{M}' \dot{\bar{q}} \equiv 0$ olur ve bu nedenle de $\dot{\bar{q}}^t \hat{M} \dot{\bar{q}} \equiv \dot{\bar{q}}^t \hat{M}^* \dot{\bar{q}}$ olurdu. Dolayısıyla, (4.5.10) denklemi, \hat{M} matrisi simetrik olmasa bile yerine simetrik olan $\hat{M}^* = (\hat{M} + \hat{M}^t)/2$ matrisinin kullanılmasıyla elde edilen sonucun aynısını verirdi.

Genelleştirilmiş kütle matrisi, sistemdeki cisimlerin kütlelerine ve atalet tensörlerine bağlı olarak aşağıda anlatılan biçimde elde edilebilir.

Sistemin kinetik enerjisi, sistemdeki cisimler için ayrı ayrı ifade edilmiş kinetik enerjilerin toplamı olarak şöyle yazılabilir.

$$K = \sum_{r=1}^n K_r = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^n (m_r \vec{v}_r \cdot \vec{v}_r + \vec{\omega}_r \cdot \vec{J}_r \cdot \vec{\omega}_r) \quad (4.5.12)$$

Öte yandan, Kısım 4.2'deki (4.2.4) ve (4.2.5) denklemleriyle, cisimlerin açısal hızları ve kütle merkezi hızları, genelleştirilmiş hızlara bağlı olarak şöyle ifade edilmişti.

$$\vec{v}_r = \sum_{i=1}^m \vec{V}_{ri} \dot{q}_i ; \vec{V}_{ri} = \vec{V}_{ri}(\bar{q}) \quad (4.5.13)$$

$$\vec{\omega}_r = \sum_{i=1}^m \vec{\Omega}_{ri} \dot{q}_i ; \vec{\Omega}_{ri} = \vec{\Omega}_{ri}(\bar{q}) \quad (4.5.14)$$

(4.5.13) ve (4.5.14) denklemleri yerlerine konunca, (4.5.12) denklemi şu şekli alır.

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m [\sum_{r=1}^n (m_r \vec{V}_{ri} \cdot \vec{V}_{rj} + \vec{\Omega}_{ri} \cdot \vec{J}_r \cdot \vec{\Omega}_{rj})] \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (4.5.15)$$

(4.5.10) ve (4.5.15) denklemlerine göre, M_{ij} şu ifadeyle elde edilir.

$$M_{ij} = \sum_{r=1}^n (m_r \vec{V}_{ri} \cdot \vec{V}_{rj} + \vec{\Omega}_{ri} \cdot \vec{J}_r \cdot \vec{\Omega}_{rj}) \quad (4.5.16)$$

Eğer \vec{V}_{ri} ve $\vec{\Omega}_{ri}$ vektörlerinin \mathcal{B}_r cismine bağlı $\mathcal{F}_r(C_r)$ eksen takımındaki matris gösterimleri kullanılırsa, M_{ij} şöyle de ifade edilebilir.

$$M_{ij} = \sum_{r=1}^n [m_r \bar{V}_{ri}^{(r)t} \bar{V}_{rj}^{(r)} + \bar{\Omega}_{ri}^{(r)t} \hat{J}_r^{(r)} \bar{\Omega}_{rj}^{(r)}] \quad (4.5.17)$$

Kinetik enerji işlevinin (4.5.2) denkleminde gereken türevi ise, aşağıdaki denklemler kullanılarak elde edilebilir.

$$\frac{\partial K}{\partial q_k} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial M_{ij}}{\partial q_k} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (4.5.18)$$

$$\frac{\partial M_{ij}}{\partial q_k} = \sum_{r=1}^n [m_r \bar{V}_{ri}^{(r)t} \frac{\partial \bar{V}_{rj}^{(r)}}{\partial q_k} + m_r \frac{\partial \bar{V}_{ri}^{(r)t}}{\partial q_k} \bar{V}_{rj}^{(r)} + \bar{\Omega}_{ri}^{(r)t} \hat{J}_r^{(r)} \frac{\partial \bar{\Omega}_{rj}^{(r)}}{\partial q_k} + \frac{\partial \bar{\Omega}_{ri}^{(r)t}}{\partial q_k} \hat{J}_r^{(r)} \bar{\Omega}_{rj}^{(r)}] \Rightarrow$$

$$\frac{\partial M_{ij}}{\partial q_k} = \sum_{r=1}^n [m_r \bar{V}_{ri}^{(r)t} \bar{A}_{rjk}^{(r)} + m_r \bar{A}_{rik}^{(r)t} \bar{V}_{rj}^{(r)} + \bar{\Omega}_{ri}^{(r)t} \hat{J}_r^{(r)} \bar{\Gamma}_{rjk}^{(r)} + \bar{\Gamma}_{rik}^{(r)t} \hat{J}_r^{(r)} \bar{\Omega}_{rj}^{(r)}] \Rightarrow$$

$$\frac{\partial M_{ij}}{\partial q_k} = \sum_{r=1}^n [m_r \bar{V}_{ri}^{(r)t} \bar{A}_{rjk}^{(r)} + m_r \bar{V}_{rj}^{(r)t} \bar{A}_{rik}^{(r)} + \bar{\Omega}_{ri}^{(r)t} \hat{J}_r^{(r)} \bar{\Gamma}_{rjk}^{(r)} + \bar{\Omega}_{rj}^{(r)t} \hat{J}_r^{(r)} \bar{\Gamma}_{rik}^{(r)}] \quad (4.5.19)$$

4.5.3. Genelleştirilmiş Momentumlar

(4.5.9) ve (4.5.10) denklemlerine göre, genelleştirilmiş momentumlar, $k \in \{1, 2, 3, \dots, m\}$ için şöyle elde edilir.

$$p_k = \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m M_{ij} \dot{q}_i \delta_{jk} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m M_{ij} \delta_{ik} \dot{q}_j \Rightarrow$$

$$p_k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m M_{ik} \dot{q}_i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m M_{kj} \dot{q}_j = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (M_{ki} + M_{ik}) \dot{q}_i$$

Kütle matrisi simetrik (yani $M_{ik} = M_{ki}$) olduğu için, yukarıdaki denklem kısaca şöyle yazılabilir.

$$p_k = \sum_{i=1}^m M_{ki} \dot{q}_i \quad (4.5.20)$$

(4.5.20) denkleminde karşılık gelen matris denklemleri şudur.

$$\vec{p} = \hat{M} \dot{\vec{q}} \quad (4.5.21)$$

Genelleştirilmiş momentumların (4.5.2) denkleminde gereken türevleri ise, şöyle ifade edilebilir.

$$\dot{p}_k = \sum_{i=1}^m M_{ki} \ddot{q}_i + \sum_{i=1}^m \dot{M}_{ki} \dot{q}_i = \sum_{i=1}^m M_{ki} \ddot{q}_i + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial M_{ki}}{\partial q_j} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (4.5.22)$$

4.5.4. Enerji Yitirme İşlevi

Enerji yitirme işlevi, sistemdeki enerji yitirmenin viskoz sürtünmeden kaynaklandığı varsayılırsa, "Rayleigh enerji yitirme işlevi" olarak anılır. Bu işlev, kinetik enerjinin ifadesine benzer bir biçimde şöyle ifade edilebilir.

$$D = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m B_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{1}{2} \dot{\vec{q}}^t \hat{B} \dot{\vec{q}} \quad (4.5.23)$$

(4.5.24) denkleminde şu tanım kullanılmıştır.

$$\hat{B} = \hat{B}(\vec{q}) : \text{Genelleştirilmiş Viskozite Matrisi} \quad (4.5.24)$$

Kinetik enerji ifadesindeki \hat{M} matrisi gibi, \hat{B} matrisi de genelliği bozmadan simetrik bir matris olarak tanımlanabilir. Buna göre, D işlevinin (4.5.1) ya da (4.5.2) denkleminde gereken türevi, şöyle ifade edilebilir.

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{i=1}^m B_{ki} \dot{q}_i \quad (4.5.25)$$

Enerji yitirme işlevi, sistemdeki viskoz sürtünme unsurlarına bağlı olarak ayrıntılı bir biçimde şöyle de ifade edilebilir.

$$D = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_b} b_k v_{relk}^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_\beta} \beta_k \omega_{relk}^2 \quad (4.5.26)$$

(4.5.26) denklemindeki v_{relk} ve ω_{relk} simgeleri, aralarında viskoz sürtünme bulunan yüzeyler arasındaki bağıl ötelenme ve dönme hızlarını; b_k ve β_k simgeleri ise, ilgili viskoz sürtünme katsayılarını göstermektedir.

Öte yandan, bağıl hız vektörlerini genelleştirilmiş hızlarla ilişkilendirmek üzere, (4.5.13) ve (4.5.14) denklemlerine benzeyen aşağıdaki denklemler yazılabilir.

$$v_{relk} = \sum_{i=1}^m V_{relki} \dot{q}_i ; V_{relki} = V_{relki}(\bar{q}) \quad (4.5.27)$$

$$\omega_{relk} = \sum_{i=1}^m \Omega_{relki} \dot{q}_i ; \Omega_{relki} = \Omega_{relki}(\bar{q}) \quad (4.5.28)$$

Bunun üzerine, (4.5.26) denklemini şöyle yazılabilir.

$$D = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m (\sum_{k=1}^{n_b} b_k V_{relki} V_{relkj} + \sum_{k=1}^{n_\beta} \beta_k \Omega_{relki} \Omega_{relkj}) \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (4.5.29)$$

(4.5.29) denklemine göre, genelleştirilmiş viskoz sürtünme katsayıları için aşağıdaki formül elde edilir.

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^{n_b} b_k V_{relki} V_{relkj} + \sum_{k=1}^{n_\beta} \beta_k \Omega_{relki} \Omega_{relkj} \quad (4.5.30)$$

4.5.5. Potansiyel Enerji

Sistemin potansiyel enerjisi, genelde, aşağıda görüldüğü gibi iki terimden oluşur.

$$U = U_g + U_s \quad (4.5.31)$$

Sistemdeki cisimlerde yerçekimine karşı depolanan potansiyel enerjiyi gösteren U_g terimi, şöyle ifade edilebilir.

$$U_g = - \sum_{i=1}^n m_i \vec{g} \cdot \vec{r}_i \quad (4.5.32)$$

(4.5.32) denklemindeki $\vec{r}_i = \vec{r}_{C_i/O}$ vektörü, B_i cisminin kütle merkezinin zemine göre konumunu göstermektedir.

Eğer zeminin yönelimi, $\vec{g} = -g\vec{u}_3^{(0)}$ olacak biçimdeyse, U_g terimi, aşağıdaki daha alışılmış biçimlerde de ifade edilebilir.

$$U_g = \sum_{i=1}^n m_i g [\vec{u}_3^{(0)} \cdot \vec{r}_i] = \sum_{i=1}^n m_i g r_{i3}^{(0)} = \sum_{i=1}^n m_i g h_i \quad (4.5.33)$$

U_g işlevinin (4.5.1) ya da (4.5.2) denkleminde gereken türevi ise, şöyle ifade edilebilir.

$$\frac{\partial U_g}{\partial q_k} = G_{gk} = - \sum_{i=1}^n m_i \vec{g} \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) \quad (4.5.34)$$

Öte yandan, türev alma kuralları ve (4.5.13) denklemini kullanılarak gösterilebilir ki,

$$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_k} = \vec{V}_{ik} \quad (4.5.35)$$

(4.5.35) denklemini yerine konunca, (4.5.34) denklemini şu şekli alır.

$$G_{gk} = - \sum_{i=1}^n m_i \vec{g} \cdot \vec{V}_{ik} \quad (4.5.36)$$

Eğer $\vec{g} = -g\vec{u}_3^{(0)}$ ise, (4.5.36) denklemi şöyle de yazılabilir.

$$G_{gk} = \sum_{i=1}^n m_i g \vec{u}_3^{(0)} \cdot \vec{V}_{ik} \quad (4.5.37)$$

(4.5.37) denklemi, ilgili vektörlerin $\mathcal{F}_i(C_i)$ ve $\mathcal{F}_0(O)$ eksen takımlarındaki matris gösterimleri kullanılarak aşağıdaki biçimlerde de yazılabilir.

$$G_{gk} = \sum_{i=1}^n m_i g \vec{u}_3^t \bar{V}_{ik}^{(0)} = \sum_{i=1}^n m_i g \vec{u}_3^t \hat{C}^{(0,i)} \bar{V}_{ik}^{(i)} \quad (4.5.38)$$

Sistemdeki yay ve benzeri esnek elemanlarda depolanan potansiyel enerjiyi gösteren U_s terimine gelince, bu terim şöyle ifade edilebilir.

$$U_s = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_k} k_i (\xi_{reli} - \xi_{reli}^\circ)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_\kappa} \kappa_i (\psi_{reli} - \psi_{reli}^\circ)^2 \quad (4.5.39)$$

(4.5.39) denklemdeki ξ_{reli} ve ψ_{reli} simgeleri, birbirlerine yaylarla bağlanmış cisimler arasındaki bağıl uzaklığı ve açığı; ξ_{reli}° ve ψ_{reli}° simgeleri, bu uzaklık ve açının ilgili yaylar serbest iken aldığı değerleri; k_i ve κ_i simgeleri ise, ilgili doğrusal ve dönele yay katsayılarını göstermektedir.

U_s işlevinin (4.5.1) ya da (4.5.2) denklemde gereken türevi ise, şöyle ifade edilebilir.

$$\frac{\partial U_s}{\partial q_k} = G_{sk} = \sum_{i=1}^{n_k} k_i (\xi_{reli} - \xi_{reli}^\circ) \frac{\partial \xi_{reli}}{\partial q_k} + \sum_{i=1}^{n_\kappa} \kappa_i (\psi_{reli} - \psi_{reli}^\circ) \frac{\partial \psi_{reli}}{\partial q_k} \quad (4.5.40)$$

Öte yandan, (4.5.27), (4.5.28) ve (4.5.35) denklemlerine dayanarak gösterilebilir ki,

$$\frac{\partial \xi_{reli}}{\partial q_k} = \frac{\partial v_{reli}}{\partial \dot{q}_k} = V_{relik} \quad (4.5.41)$$

$$\frac{\partial \psi_{reli}}{\partial q_k} = \frac{\partial \omega_{reli}}{\partial \dot{q}_k} = \Omega_{relik} \quad (4.5.42)$$

(4.5.41) ve (4.5.42) denklemleri yerine konunca, (4.5.40) denklemi şu şekli alır.

$$G_{sk} = \sum_{i=1}^{n_k} V_{relik} k_i (\xi_{reli} - \xi_{reli}^\circ) + \sum_{i=1}^{n_\kappa} \Omega_{relik} \kappa_i (\psi_{reli} - \psi_{reli}^\circ) \quad (4.5.43)$$

4.5.6. Genelleştirilmiş Eyletim Kuvvetleri

Sistemdeki eyleticiler tarafından uygulanan kuvvet ve torkların yaptığı toplam sanal iş, aşağıda görülen iki biçimde ifade edilebilir.

$$\delta W_{act} = \sum_{i=1}^m P_i \delta \xi_i = \sum_{k=1}^m Q_k \delta q_k \quad (4.5.44)$$

(4.5.44) denklemde, P_i simgesi, i -yinci eyleticinin \vec{n}_i birim vektörüyle temsil edilen eyletim eksenini boyunca ya da etrafında uyguladığı kuvveti ya da torku; $\delta \xi_i$ simgesi de, aynı eyleticinin iki ucu arasında \vec{n}_i boyunca ya da etrafında oluşabilecek sanal yerdeğiştirmeyi göstermektedir. Aynı denklemdeki Q_k simgesi ise, q_k genelleştirilmiş koordinatına karşılık gelen genelleştirilmiş eyletim kuvvetini göstermektedir.

Bu arada, $\delta \xi_i$ ile δq_k arasındaki ilişki şöyle ifade edilebilir.

$$\delta \xi_i = \sum_{k=1}^m E_{ki} \delta q_k \quad (4.5.45)$$

Bu ilişki kullanılarak (4.5.44) denklemi şöyle yazılabilir.

$$\delta W_{act} = \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^m E_{ki} P_i \delta q_k = \sum_{k=1}^m Q_k \delta q_k \quad (4.5.46)$$

(4.5.46) denklemden Q_k ile P_i arasında şu ilişki elde edilir.

$$Q_k = \sum_{i=1}^m E_{ki} P_i \quad (4.5.47)$$

(4.5.45) ve (4.5.47) denklemleri, aşağıdaki matris denklemleri biçiminde de yazılabilir.

$$\delta \bar{\xi} = \hat{E}^t \delta \bar{q} \quad (4.5.48)$$

$$\bar{Q} = \hat{E} \bar{P} \quad (4.5.49)$$

4.5.7. Genelleştirilmiş Dış Etki Kuvvetleri

Sistemdeki cisimlere dışarıdan uygulanan kuvvet ve momentlerin yaptığı toplam sanal iş, şöyle ifade edilebilir.

$$\delta W_{ext} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{ext} \cdot \delta \vec{r}_i + \sum_{i=1}^n \vec{M}_i^{ext} \cdot \delta \vec{\eta}_i = \sum_{k=1}^m S_k \delta q_k \quad (4.5.50)$$

Öte yandan, (4.5.13) ve (4.5.14) denklemlerine benzer bir biçimde, cisimlerin sanal ötelenme ve dönme yerdeğişimleri, genelleştirilmiş koordinatların sanal değişimleriyle aşağıdaki denklemlere göre ilişkilendirilebilir.

$$\delta \vec{r}_i = \sum_{k=1}^m \vec{V}_{ik} \delta q_k \quad (4.5.51)$$

$$\delta \vec{\eta}_i = \sum_{k=1}^m \vec{\Omega}_{ik} \delta q_k \quad (4.5.52)$$

Böylece, k -yinci genelleştirilmiş dış etki kuvveti, aşağıdaki ifadeyle elde edilmiş olur.

$$S_k = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{ext} \cdot \vec{V}_{ik} + \sum_{i=1}^n \vec{M}_i^{ext} \cdot \vec{\Omega}_{ik} \quad (4.5.53)$$

(4.5.53) denklemindeki vektörlerin ifade edildikleri eksen takımlarına bağlı olarak aynı denklem aşağıdaki biçimlerde de yazılabilir.

$$\begin{aligned} S_k &= \sum_{i=1}^n \bar{V}_{ik}^{(0)t} \bar{F}_i^{ext(0)} + \sum_{i=1}^n \bar{\Omega}_{ik}^{(0)t} \bar{M}_i^{ext(0)} \\ &= \sum_{i=1}^n \bar{V}_{ik}^{(i)t} \bar{F}_i^{ext(i)} + \sum_{i=1}^n \bar{\Omega}_{ik}^{(i)t} \bar{M}_i^{ext(i)} \end{aligned} \quad (4.5.54)$$

4.5.8. Hareket Denklemleri

Önceki kısımlarda yapılan hazırlıklar kullanılarak skalar Lagrange denklemleri, $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ için aşağıdaki hareket denklemleri biçiminde yazılabilir.

$$\sum_{i=1}^m M_{ki} \ddot{q}_i = \sum_{i=1}^m E_{ki} P_i + Z_k \quad (4.5.55)$$

(4.5.55) denklemindeki eklentisel Z_k terimi şöyle tanımlanmıştır.

$$Z_k = S_k - G_{sk} - G_{gk} - \sum_{i=1}^m B_{ki} \dot{q}_i - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m C_{kij} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (4.5.56)$$

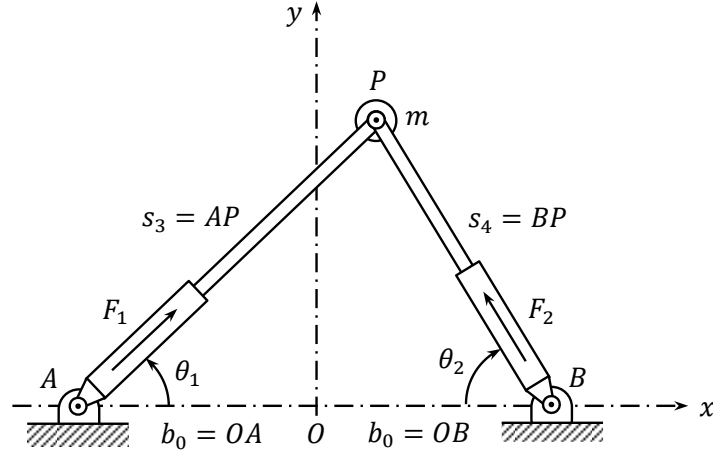
(4.5.56) denklemindeki C_{kij} katsayısı ise sistemdeki Coriolis, merkezkaç ve jiroskopik etkileri temsil eder. Bu katsayı, şöyle tanımlanmıştır.

$$C_{kij} = \frac{\partial M_{ki}}{\partial q_j} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial M_{ij}}{\partial q_k} \quad (4.5.57)$$

(4.5.55) denklemini, aşağıdaki matris denklemini biçiminde yazılarak (4.2.39) sayılı hareket denkleminde tekrar ulaşılmış olur.

$$\hat{M} \ddot{\bar{q}} = \hat{E} \bar{P} + \bar{Z} \quad (4.5.58)$$

4.5.9. Örnek: Düzlemsel Bir Paralel Manipülörün Hareket Denklemi



Şekil 4.5 İki Serbestlik Dereceli Düzlemsel Bir Paralel Manipülör

Daha önce Şekil 4.4'te gösterilen düzlemsel paralel manipülör, Şekil 4.5'te daha az ayrıntıyla tekrar gösterilmiştir. Bu örnekte, sözü edilen manipülörün hareket denklemi Lagrange yöntemiyle elde edilecektir. Matematiksel ayrıntıyı azaltmak amacıyla, manipülörün kütlelerinin P noktasında taşınan cismin m kütlelerine göre ihmal edilebilir küçüklükte olduğu varsayılmıştır. Ayrıca, eklemlerdeki sürtünme kuvvet ve torklarının da ihmal edilebilir düzeyde oldukları varsayılmıştır. Genelleştirilmiş koordinatlar olarak P noktasının koordinatları (x ve y) alınmıştır. Eyletim kuvvetleri ise, doğrusal eyleticilerin uyguladığı F_1 ve F_2 kuvvetleridir. Manipülöre taşınan cismin ağırlığından başka bir dış kuvvetin etki etmediği varsayılmıştır. Lagrange yönteminin uygulanış aşamaları ve ayrıntıları aşağıda gösterilmiştir.

Kinetik Enerji:

$$K = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \quad (4.5.59)$$

Genelleştirilmiş Momentumlar:

$$p_x = \partial K / \partial \dot{x} = m\dot{x} \quad (4.5.60)$$

$$p_y = \partial K / \partial \dot{y} = m\dot{y} \quad (4.5.61)$$

Potansiyel Enerji:

$$U = mgy \quad (4.5.62)$$

Enerji Yitirme İşlevi:

$$D = 0 \quad (4.5.63)$$

Genelleştirilmiş Kuvvetlerin Sanal İş Yöntemiyle Belirlenişi:

$$\delta W = F_1 \delta s_3 + F_2 \delta s_4 = Q_x \delta x + Q_y \delta y \quad (4.5.64)$$

Kısım 4'teki kinematik analize göre, manipülörün bacak boyları, x ve y koordinatlarına aşağıdaki denklemlerle bağlıdır.

$$s_3 = \sqrt{(b_0 + x)^2 + y^2} \quad (4.5.65)$$

$$s_4 = \sqrt{(b_0 - x)^2 + y^2} \quad (4.5.66)$$

(4.5.65) ve (4.5.66) denklemlerinden δs_3 ve δs_4 şöyle elde edilir.

$$\delta s_3 = \frac{y\delta y + (b_0+x)\delta x}{\sqrt{(b_0+x)^2 + y^2}} \quad (4.5.67)$$

$$\delta s_4 = \frac{y\delta y - (b_0-x)\delta x}{\sqrt{(b_0-x)^2 + y^2}} \quad (4.5.68)$$

Bunu üzerine, (4.5.64) denklemi, Q_x ve Q_y genelleştirilmiş kuvvetlerini şöyle verir.

$$Q_x = \frac{b_0+x}{\sqrt{(b_0+x)^2 + y^2}} F_1 - \frac{b_0-x}{\sqrt{(b_0-x)^2 + y^2}} F_2 \quad (4.5.69)$$

$$Q_y = \frac{y}{\sqrt{(b_0+x)^2 + y^2}} F_1 + \frac{y}{\sqrt{(b_0-x)^2 + y^2}} F_2 \quad (4.5.70)$$

Skalar Hareket Denklemleri:

$$\left. \begin{aligned} \dot{p}_x - \frac{\partial K}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial U}{\partial x} &= Q_x \\ \dot{p}_y - \frac{\partial K}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial \dot{y}} + \frac{\partial U}{\partial y} &= Q_y \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$m\ddot{x} = \frac{b_0+x}{\sqrt{(b_0+x)^2 + y^2}} F_1 - \frac{b_0-x}{\sqrt{(b_0-x)^2 + y^2}} F_2 \quad (4.5.71)$$

$$m\ddot{y} = \frac{y}{\sqrt{(b_0+x)^2 + y^2}} F_1 + \frac{y}{\sqrt{(b_0-x)^2 + y^2}} F_2 - mg \quad (4.5.72)$$

Toplu Hareket Denklemi:

$$\widehat{M}\ddot{\bar{q}} = \widehat{E}\bar{P} + \bar{Z} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{b_0+x}{\sqrt{(b_0+x)^2 + y^2}} & -\frac{b_0-x}{\sqrt{(b_0-x)^2 + y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{(b_0+x)^2 + y^2}} & \frac{y}{\sqrt{(b_0-x)^2 + y^2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ mg \end{bmatrix} \quad (4.5.73)$$

Manipülâtörün Sanki-Statik İşletimi:

Eğer manipülâtör sanki-statik koşullarda işletiliyorsa, $\ddot{\bar{q}} \approx \bar{0}$ olur ve böyle bir işletim için gereken eyletim kuvvetleri, eğer $\det(\widehat{E}) \neq 0$ ise, aşağıdaki formülle bulunur.

$$\bar{P} = -\widehat{E}^{-1}\bar{Z} \quad (4.5.74)$$

Örnekteki manipülâtör için,

$$\det(\widehat{E}) = \frac{2b_0y}{\sqrt{(b_0+x)^2 + y^2}\sqrt{(b_0-x)^2 + y^2}} \quad (4.5.75)$$

Dolayısıyla, eğer $y \neq 0$ ise, eyletim kuvvetleri şöyle bulunur.

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{(b_0+x)^2 + y^2}\sqrt{(b_0-x)^2 + y^2}}{2b_0y} \begin{bmatrix} \frac{y}{\sqrt{(b_0-x)^2 + y^2}} & \frac{b_0-x}{\sqrt{(b_0-x)^2 + y^2}} \\ -\frac{y}{\sqrt{(b_0+x)^2 + y^2}} & \frac{b_0+x}{\sqrt{(b_0+x)^2 + y^2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ mg \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$F_1 = mg \frac{b_0-x}{2b_0y} \sqrt{(b_0+x)^2 + y^2} \quad (4.5.76)$$

$$F_2 = mg \frac{b_0+x}{2b_0y} \sqrt{(b_0-x)^2 + y^2} \quad (4.5.77)$$

Manipülâtörün Eyletimsel Tekil Konumu:

Eğer $\det(\hat{E}) = 0$ olursa, yani $y = 0$ olursa, manipülâtör, bir eyletimsel tekil konuma girer. Böyle bir konumda, (4.5.71) ve (4.5.72) denklemleri, aşağıdaki özel denklemlere indirgenir.

$$\ddot{x} = (F_1 - F_2)/m \quad (4.5.78)$$

$$\ddot{y} = -g \quad (4.5.79)$$

Yukarıdaki denklemlere göre, manipülâtör için istenen bir hareket ancak x yönünde belirtilebilir; y yönünde ise, manipülâtör ancak $\ddot{y} = -g$ gibi çok özel bir ivmeyle hareket edebilir, yani manipülâtörün y yönünde yapabileceği tek hareket taşıdığı cisimle birlikte düşmektir.

Görüldüğü gibi, (4.5.79) denkleminde F_1 ve F_2 kuvvetleri yer almamaktadır. Yani, tekil konumda, F_1 ve F_2 kuvvetlerinin y yönünde hiç bir etkisi kalmamaktadır. Dolayısıyla, eyletim kuvvetleri ne olursa olsun, manipülâtör düşme hareketini engelleyemez.

Öte yandan, F_1 ve F_2 kuvvetlerinin her ikisinin de (4.5.78) denkleminde yer alması, manipülâtör tekil konumdayken x yönünde bir *eyletim artıksılığı* oluşturmaktadır. Bu artıksılıktan yararlanarak x yönündeki istenen hareket, en düşük çabayla, yani $(F_1^2 + F_2^2)$ en küçük olacak biçimde, gerçekleştirilebilir. Bu özelliği sağlayan F_1 ve F_2 kuvvetleri, (4.5.78) denkleminde aşağıdaki ifadelerle elde edilir.

$$F_1 = m\ddot{x}/2, \quad F_2 = -m\ddot{x}/2 \quad (4.5.80)$$

Daha önce, manipülâtörün tekil konumdaki düşme hareketini engelleyemeyeceği söylenmişti. Bununla birlikte, istenir ki, tekil konuma olabildiğince yakın bir konumda, yani $|y| = y_{min}$ gibi bir konumda, düşme hareketi engellenebilsin. Verilen bir y_{min} değeri için, yani $\sigma = \pm 1$ olmak üzere, $y = \sigma y_{min}$ iken, gereken F_1 ve F_2 kuvvetleri, (4.5.76) ve (4.5.77) denklemleri kullanılarak belirlenebilir. Özel olarak $x = 0$ ise, F_1 ve F_2 kuvvetleri, şöyle belirlenir.

$$F_1 = F_2 = \sigma F_{max} \quad (4.5.81)$$

$$F_{max} = \frac{1}{2} mg \sqrt{1 + (b_0/y_{min})^2} \quad (4.5.82)$$

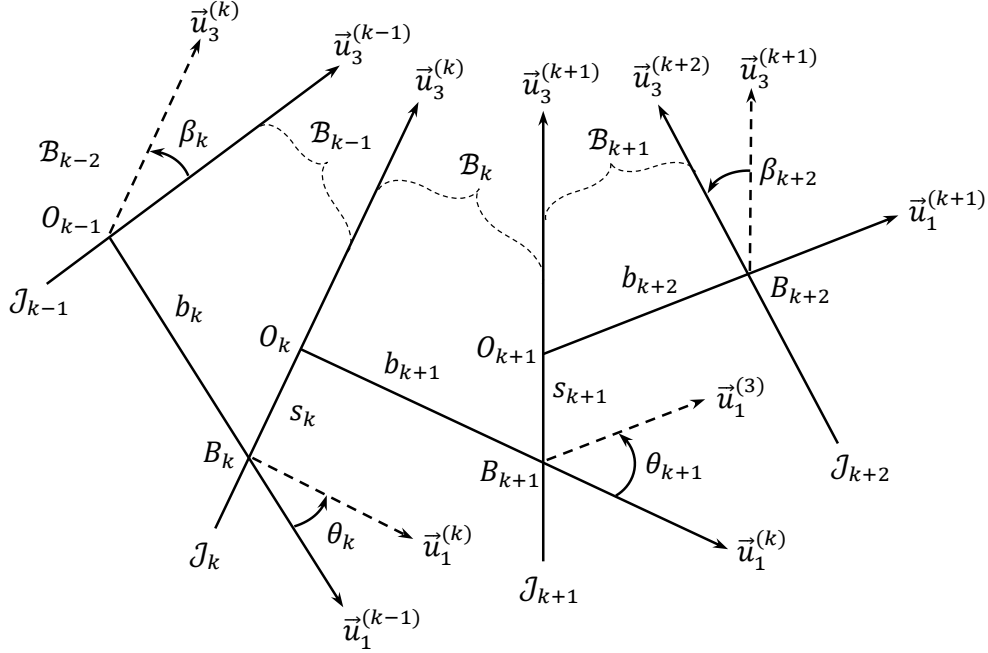
(4.5.82) denkleminde göre, F_{max} ne kadar büyük olabilirse, y_{min} de o kadar küçük olabilir. Dolayısıyla, yeterince güçlü eyleticilerle, $-y_{min} \leq y \leq y_{min}$ gibi küçük bir bölge dışında düşme hareketi engellenebilir.

BÖLÜM 5

SERİ MANİPÜLATÖRLERİN DİNAMİK ANALİZİ

5.1. Kinematik İlişkiler

5.1.1. Denavit-Hartenberg (D-H) Yöntemi



Şekil 5.1 Peşpeşe Eklemlenmiş Uzuvlara D-H Yönteminin Uygulanışı

Bir seri manipülörün peşpeşe eklemlenmiş uzuvlarının geometrik ve kinematik betimlenmesi için kullanılabilecek en uygun yöntemlerden biri, D-H (Denavit-Hartenberg) yöntemidir. Ne var ki, D-H yönteminin aynı temellere dayanan değişik uygulama biçimleri vardır. Bu uygulama biçimlerinin farklılığı, aynı eksenler ve parametreler için değişik simgelerin ve indislerin kullanılmasından kaynaklanmaktadır. D-H yönteminin bu bölümde kullanılan uygulama biçimi, Şekil 5.1'de gösterilmiştir. Gerekli tanımlamalar ve açıklamalar ise aşağıda yapılmıştır.

Manipülörün k -yinci uzvu, $k \in \{0, 1, 2, \dots, m\}$ olmak üzere, \mathcal{B}_k simgesiyle gösterilir. Buna göre, \mathcal{B}_0 uzvu, zemin olarak tanımlanır. Manipülörün \mathcal{B}_{k-1} ile \mathcal{B}_k uzuvları arasındaki $J_{(k-1)k}$ eklemi, $k \geq 1$ olmak üzere, kısaca J_k simgesiyle gösterilir. Manipülör seri olduğu için eklemlerinin her biri ya döner ya da kayar eklemdir. Ayrıca, bu eklemlerin tümü eyletimlidir.

J_k eklemineksenini, $\vec{u}_3^{(k)}$ birim vektörü ile temsil edilir. Bu vektörün eklem eksenini üzerindeki yönelimi, keyfi olarak seçilebilir. J_k ile J_{k+1} eklemlerinin eksenleri arasındaki ortak dikme, $\vec{u}_1^{(k)}$ birim vektörü ile temsil edilir. Bu vektörün ortak dikme üzerindeki yönelimi, eğer eklem eksenleri kesişmiyorsa, yakıncıl eklemden uzakçıl eklemeye doğru seçilir. Buradaki yakıncıl (proximal) ve uzakçıl (distal) sıfatları, zemine göre tanımlanmıştır. Eğer eklem eksenleri kesişiyorsa, $\vec{u}_1^{(k)}$ vektörünün yönelimi keyfi olarak seçilebilir.

Eklem eksenleriyle eklemelerarası ortak dikmelerin kesiştiği noktalar şöyle gösterilir ve tanımlanır.

$$O_k : \mathcal{J}_k \text{ eklemının ekseni ile } \mathcal{J}_k\text{-}\mathcal{J}_{k+1} \text{ ortak dikmesinin kesiştiği nokta} \quad (5.1.1)$$

$$B_k : \mathcal{J}_k \text{ eklemının ekseni ile } \mathcal{J}_{k-1}\text{-}\mathcal{J}_k \text{ ortak dikmesinin kesiştiği nokta} \quad (5.1.2)$$

\mathcal{B}_k uzvuna bağlanan \mathcal{F}_k eksen takımı ise, orijini ve temel birim vektörleriyle şöyle gösterilir.

$$\mathcal{F}_k = \mathcal{F}_k\{O_k; \vec{u}_1^{(k)}, \vec{u}_2^{(k)}, \vec{u}_3^{(k)}\} \quad (5.1.3)$$

\mathcal{F}_k eksen takımının diklik yanında sağ elli de olabilmesi için $\vec{u}_2^{(k)}$ birim vektörü şöyle belirlenir.

$$\vec{u}_2^{(k)} = \vec{u}_3^{(k)} \times \vec{u}_1^{(k)} \quad (5.1.4)$$

Yukarıdaki tanımlara dayanarak dört adet D-H parametresi şöyle tanımlanır.

$$\beta_k : \vec{u}_1^{(k-1)} \text{ ekseni etrafında } \vec{u}_3^{(k-1)} \text{ eksenini } \vec{u}_3^{(k)} \text{ eksenine döndüren açı} \quad (5.1.5)$$

$$\theta_k : \vec{u}_3^{(k)} \text{ ekseni etrafında } \vec{u}_1^{(k-1)} \text{ eksenini } \vec{u}_1^{(k)} \text{ eksenine döndüren açı} \quad (5.1.6)$$

$$b_k : \vec{u}_1^{(k-1)} \text{ ekseni üzerinde } O_{k-1} \text{ ile } B_k \text{ noktaları arasındaki uzaklık} \quad (5.1.7)$$

$$s_k : \vec{u}_3^{(k)} \text{ ekseni üzerinde } B_k \text{ ile } O_k \text{ noktaları arasındaki uzaklık} \quad (5.1.8)$$

Yukarıdaki parametrelerden β_k ile b_k her zaman sabittir. Bunlardan β_k açısı, "burulma açısı" olarak; b_k uzunluğu ise, "eklemler arası uzaklık" olarak adlandırılır.

Diğer iki parametre (θ_k ve s_k) ise, eklem tipine göre, değişken ya da sabit olabilir.

Eğer \mathcal{J}_k döner eklemse, θ_k açısı, eklem değişkeni olur; s_k uzunluğu ise, sabit olur ve özel olarak d_k simgesiyle gösterilir. Bu durumda, d_k uzunluğu, "eklem kaçıklığı" olarak adlandırılır.

Eğer \mathcal{J}_k kayar eklemse, s_k uzunluğu, eklem değişkeni olur; θ_k açısı ise, sabit olur ve özel olarak δ_k simgesiyle gösterilir. Bu durumda, δ_k açısı, "kıvrılma açısı" ya da "bükülme açısı" olarak adlandırılır.

5.1.2. Peşpeşe Gelen İki Uzun Arasındaki Kinematik İlişkiler

\mathcal{B}_k uzvunun \mathcal{B}_{k-1} uzvuna göre bağlı yönelimi (açısal konumu), aşağıdaki matrisle ifade edilir.

$$\hat{\Phi}_k = \hat{C}^{(k-1,k)} = e^{\vec{u}_1\beta_k} e^{\vec{u}_3\theta_k} \quad (5.1.9)$$

\mathcal{B}_k uzvunun \mathcal{B}_{k-1} uzvuna göre bağlı konumu, yani O_k noktasının O_{k-1} noktasına göre konumu, aşağıdaki vektörle ifade edilir.

$$\vec{r}_k = \vec{r}_{k-1,k} = b_k \vec{u}_1^{(k-1)} + s_k \vec{u}_3^{(k)} \quad (5.1.10)$$

Bu vektör, \mathcal{F}_{k-1} ve \mathcal{F}_k eksen takımlarında, aşağıdaki dikeysıra matrisleri biçiminde ifade edilebilir.

$$\begin{aligned} \bar{r}_k &= \bar{r}_k^{(k-1)} = b_k \bar{u}_1^{(k-1/k-1)} + s_k \bar{u}_3^{(k/k-1)} = b_k \bar{u}_1 + s_k \hat{C}^{(k-1,k)} \bar{u}_3^{(k/k)} \Rightarrow \\ \bar{r}_k &= b_k \bar{u}_1 + s_k e^{\vec{u}_1\beta_k} e^{\vec{u}_3\theta_k} \bar{u}_3 = b_k \bar{u}_1 + s_k e^{\vec{u}_1\beta_k} \bar{u}_3 \Rightarrow \\ \bar{r}_k &= \bar{u}_1 b_k - \bar{u}_2 s_k \sin \beta_k + \bar{u}_3 s_k \cos \beta_k \end{aligned} \quad (5.1.11)$$

$$\begin{aligned}\bar{r}_k^* &= \bar{r}_k^{(k)} = \hat{C}^{(k,k-1)} \bar{r}_k^{(k-1)} \Rightarrow \\ \bar{r}_k^* &= \hat{\Phi}_k^t \bar{r}_k\end{aligned}\quad (5.1.12)$$

$$\begin{aligned}\bar{r}_k^* &= \bar{r}_k^{(k)} = b_k \bar{u}_1^{(k-1/k)} + s_k \bar{u}_3^{(k/k)} = b_k \hat{C}^{(k,k-1)} \bar{u}_1^{(k-1/k-1)} + s_k \bar{u}_3 \Rightarrow \\ \bar{r}_k^* &= b_k e^{-\tilde{u}_3 \theta_k} e^{-\tilde{u}_1 \beta_k} \bar{u}_1 + s_k \bar{u}_3 = b_k e^{-\tilde{u}_3 \theta_k} \bar{u}_1 + s_k \bar{u}_3 \Rightarrow \\ \bar{r}_k^* &= \bar{u}_1 b_k \cos \theta_k - \bar{u}_2 b_k \sin \theta_k + \bar{u}_3 s_k\end{aligned}\quad (5.1.13)$$

\mathcal{B}_k ile \mathcal{B}_{k-1} uzuvları arasındaki homojen duruş (konum ve yönelim) matrisi ise, (5.1.9) ve (5.1.11) denklemlerinden yararlanılarak şöyle oluşturulur.

$$\begin{aligned}\hat{H}_k &= \hat{H}_{O_{k-1}O_k}^{(k-1,k)} = \begin{bmatrix} \hat{C}^{(k-1,k)} & \bar{r}_{k-1,k}^{(k-1)} \\ \bar{0}^t & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\Phi}_k & \bar{r}_k \\ \bar{0}^t & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \\ \hat{H}_k &= \begin{bmatrix} e^{\tilde{u}_1 \beta_k} e^{\tilde{u}_3 \theta_k} & \bar{u}_1 b_k - \bar{u}_2 s_k \sin \beta_k + \bar{u}_3 s_k \cos \beta_k \\ \bar{0}^t & 1 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (5.1.14)$$

\hat{H}_k matrisi, $s\theta = \sin \theta$ ve $c\theta = \cos \theta$ kısaltmalarıyla, daha ayrıntılı olarak şöyle yazılabilir.

$$\hat{H}_k = \begin{bmatrix} c\theta_k & -s\theta_k & 0 & b_k \\ c\beta_k s\theta_k & c\beta_k c\theta_k & -s\beta_k & -s_k s\beta_k \\ s\beta_k s\theta_k & s\beta_k c\theta_k & c\beta_k & s_k c\beta_k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\quad (5.1.15)$$

5.1.3. Uzuvların Zemine Göre Duruşları (Yönelimleri ve Konumları)

Eklem değişkenlerinin belirtilen değerleri için manipülatörün uzuvlarının zemine göre duruşları, aşağıdaki yenilemeli formüller kullanılarak hesaplanabilir.

a) Yenilemeli Uzuv Yönelimleri Formülü

$$\begin{aligned}\hat{\Psi}_k &= \hat{C}^{(0,k)} = \hat{C}^{(0,k-1)} \hat{C}^{(k-1,k)} \Rightarrow \\ \hat{\Psi}_k &= \hat{\Psi}_{k-1} \hat{\Phi}_k = \hat{\Psi}_{k-1} e^{\tilde{u}_1 \beta_k} e^{\tilde{u}_3 \theta_k} \\ k &= 1, 2, 3, \dots, m; \hat{\Psi}_0 = \hat{I}\end{aligned}\quad (5.1.16)$$

b) Yenilemeli Orijin Konumları Formülü

$$\begin{aligned}\vec{p}_k^\circ &= \overrightarrow{O_0 O_k} = \overrightarrow{O_0 O_{k-1}} + \overrightarrow{O_{k-1} O_k} \Rightarrow \\ \vec{p}_k^\circ &= \vec{p}_{k-1}^\circ + \vec{r}_k \\ k &= 1, 2, 3, \dots, m; \vec{p}_0^\circ = \vec{0}\end{aligned}\quad (5.1.17)$$

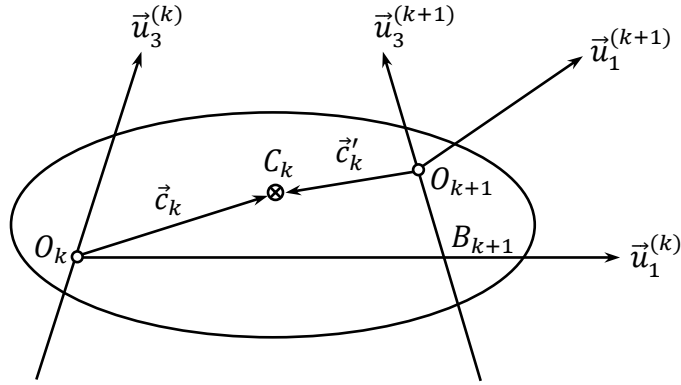
(5.1.17) sayılı vektör denklemi, zemine bağlı \mathcal{F}_0 eksen takımında, aşağıdaki matris denklemi biçiminde de yazılabilir.

$$\begin{aligned}\vec{p}_k^{\circ(0)} &= \vec{p}_{k-1}^{\circ(0)} + \vec{r}_k^{(0)} = \vec{p}_{k-1}^{\circ(0)} + \hat{C}^{(0,k-1)} \bar{r}_k^{(k-1)}; \vec{p}_k^{\circ(0)} = \vec{p}_k^\circ, \bar{r}_k^{(k-1)} = \bar{r}_k \Rightarrow \\ \vec{p}_k^\circ &= \vec{p}_{k-1}^\circ + \hat{\Psi}_{k-1} \bar{r}_k \\ k &= 1, 2, 3, \dots, m; \vec{p}_0^\circ = \vec{0}\end{aligned}\quad (5.1.18)$$

(5.1.10) ve (5.1.11) denklemlerinden hatırlanacağı üzere,

$$\begin{aligned}\vec{r}_k &= b_k \vec{u}_1^{(k-1)} + s_k \vec{u}_3^{(k)} \Rightarrow \\ \bar{r}_k &= \bar{u}_1 b_k - \bar{u}_2 s_k \sin \beta_k + \bar{u}_3 s_k \cos \beta_k\end{aligned}$$

c) Kütle Merkezleri Konum Formülü



Şekil 5.2 B_k Uzvu ve Kütle Merkezi

B_k uzvu, C_k kütle merkeziyle birlikte Şekil 5.2'de gösterilmiştir. C_k noktasının zemine göre konumu, aşağıdaki vektörle belirlenir.

$$\vec{p}_k = \overrightarrow{O_0 C_k} = \overrightarrow{O_0 O_k} + \overrightarrow{O_k C_k} = \vec{p}_k^{\circ} + \vec{c}_k \quad (5.1.19)$$

(5.1.19) denkleminin \mathcal{F}_0 eksen takımında karşılık gelen matris denklemi şöyle yazılabilir.

$$\begin{aligned}\bar{p}_k^{(0)} &= \bar{p}_k^{\circ(0)} + \bar{c}_k^{(0)} = \bar{p}_k^{\circ(0)} + \hat{C}^{(0,k)} \bar{c}_k^{(k)} \Rightarrow \\ \bar{p}_k &= \bar{p}_k^{\circ} + \hat{\Psi}_k \bar{c}_k\end{aligned} \quad (5.1.20)$$

C_k noktası B_k uzvunun sabit bir noktası olduğu için (5.1.20) denklemindeki $\bar{c}_k = \bar{c}_k^{(k)}$ dikey sıra matrisi de sabittir.

5.1.4. Uzuvarın Zemine Göre Dönme ve Ötelenme Hızları

Eklem değişkenleri ile birinci türevlerinin belirtilen değerleri için manipülatörün uzuvlarının zemine göre dönme ve ötelenme hızları, aşağıdaki yenilemeli formüller kullanılarak hesaplanabilir.

a) Yenilemeli Açısal Hızlar Formülü

$$\begin{aligned}\vec{\omega}_k &= \vec{\omega}_{k/0} = \vec{\omega}_{k-1/0} + \vec{\omega}_{k/k-1} \Rightarrow \\ \vec{\omega}_k &= \vec{\omega}_{k-1} + \dot{\theta}_k \vec{u}_3^{(k)} \\ k &= 1, 2, 3, \dots, m; \vec{\omega}_0 = \vec{0}\end{aligned} \quad (5.1.21)$$

(5.1.21) denkleminin \mathcal{F}_0 eksen takımındaki matris karşılığı şöyle ifade edilebilir.

$$\begin{aligned}\bar{\omega}_k^{(0)} &= \bar{\omega}_{k-1}^{(0)} + \dot{\theta}_k \bar{u}_3^{(k/0)} = \bar{\omega}_{k-1}^{(0)} + \dot{\theta}_k \hat{C}^{(0,k)} \bar{u}_3^{(k/k)}; \bar{\omega}_k = \bar{\omega}_k^{(0)} \Rightarrow \\ \bar{\omega}_k &= \bar{\omega}_{k-1} + \dot{\theta}_k \hat{\Psi}_k \bar{u}_3 \\ k &= 1, 2, 3, \dots, m; \bar{\omega}_0 = \vec{0}\end{aligned} \quad (5.1.22)$$

Gerektiğinde, $\bar{\omega}_k^* = \bar{\omega}_k^{(k)}$ dikeysıra matrisi de şöyle elde edilebilir.

$$\bar{\omega}_k^* = \hat{\Psi}_k^t \bar{\omega}_k \quad (5.1.23)$$

b) Yenilemeli Orijin Hızları Formülü

$$\begin{aligned} \vec{v}_k^\circ &= D_0 \vec{p}_k^\circ = D_0 (\vec{p}_{k-1}^\circ + \vec{r}_k) = \vec{v}_{k-1}^\circ + D_0 \vec{r}_k ; \vec{r}_k = b_k \vec{u}_1^{(k-1)} + s_k \vec{u}_3^{(k)} \Rightarrow \\ \vec{v}_k^\circ &= \vec{v}_{k-1}^\circ + b_k D_0 \vec{u}_1^{(k-1)} + s_k \vec{u}_3^{(k)} + s_k D_0 \vec{u}_3^{(k)} \Rightarrow \\ \vec{v}_k^\circ &= \vec{v}_{k-1}^\circ + s_k \vec{u}_3^{(k)} + b_k \bar{\omega}_{k-1} \times \vec{u}_1^{(k-1)} + s_k \bar{\omega}_k \times \vec{u}_3^{(k)} \end{aligned} \quad (5.1.24)$$

(5.1.24) denklemi üzerinde şu sadeleştirme yapılabilir.

$$\bar{\omega}_k \times \vec{u}_3^{(k)} = [\bar{\omega}_{k-1} + \dot{\theta}_k \vec{u}_3^{(k)}] \times \vec{u}_3^{(k)} = \bar{\omega}_{k-1} \times \vec{u}_3^{(k)} \quad (5.1.25)$$

Dolayısıyla, (5.1.24) denkleminin sağ tarafındaki son iki terim, şöyle düzenlenebilir.

$$\bar{\omega}_{k-1} \times [b_k \vec{u}_1^{(k-1)} + s_k \vec{u}_3^{(k)}] = \bar{\omega}_{k-1} \times \vec{r}_k \quad (5.1.26)$$

(5.1.26) denklemi sayesinde, (5.1.24) denklemi, daha kısa olarak şöyle yazılabilir.

$$\vec{v}_k^\circ = \vec{v}_{k-1}^\circ + s_k \vec{u}_3^{(k)} + \bar{\omega}_{k-1} \times \vec{r}_k \quad (5.1.27)$$

$$k = 1, 2, 3, \dots, m ; \vec{v}_0^\circ = \vec{0}$$

(5.1.27) sayılı vektör denklemi, zemine bağlı \mathcal{F}_0 eksen takımında, aşağıdaki matris denklemi biçiminde de yazılabilir.

$$\begin{aligned} \bar{v}_k^{\circ(0)} &= \bar{v}_{k-1}^{\circ(0)} + s_k \bar{u}_3^{(k/0)} + \bar{\omega}_{k-1}^{(0)} \bar{r}_k^{(0)} ; \bar{v}_k^{\circ(0)} = \bar{v}_k^\circ, \bar{r}_k^{(k-1)} = \bar{r}_k \Rightarrow \\ \bar{v}_k^\circ &= \bar{v}_{k-1}^\circ + s_k \hat{\Psi}_k \bar{u}_3 + \bar{\omega}_{k-1} \hat{\Psi}_{k-1} \bar{r}_k \\ k &= 1, 2, 3, \dots, m ; \bar{v}_0^\circ = \vec{0} \end{aligned} \quad (5.1.28)$$

c) Kütle Merkezleri Hız Formülü

\mathcal{B}_k uzvuna ait C_k kütle merkezinin zemine göre hızı, (5.1.19) denkleminde yola çıkılarak şöyle elde edilir.

$$\begin{aligned} \vec{v}_k &= D_0 \vec{p}_k = D_0 \vec{p}_k^\circ + D_0 \vec{c}_k \Rightarrow \\ \vec{v}_k &= \vec{v}_k^\circ + \bar{\omega}_k \times \vec{c}_k \end{aligned} \quad (5.1.29)$$

(5.1.29) denklemi, \mathcal{F}_0 eksen takımında aşağıdaki matris denklemi biçiminde yazılabilir.

$$\bar{v}_k = \bar{v}_k^\circ + \bar{\omega}_k \hat{\Psi}_k \bar{c}_k \quad (5.1.30)$$

5.1.5. Uzuyların Zemine Göre Dönme ve Ötelenme İvmeleri

Eklem değişkenleri ile birinci ve ikinci türevlerinin belirtilen değerleri için manipülatörün uzuvlarının zemine göre dönme ve ötelenme ivmeleri, aşağıdaki yenilemeli formüller kullanılarak hesaplanabilir.

a) Yenilemeli Açısal İvmeler Formülü

$$\begin{aligned}
 \vec{\alpha}_k &= \vec{\alpha}_{k/0} = D_0 \vec{\omega}_{k/0} = D_0 \vec{\omega}_k = D_0 \vec{\omega}_{k-1} + \dot{\theta}_k \vec{u}_3^{(k)} + \dot{\theta}_k D_0 \vec{u}_3^{(k)} \Rightarrow \\
 \vec{\alpha}_k &= \vec{\alpha}_{k-1} + \ddot{\theta}_k \vec{u}_3^{(k)} + \dot{\theta}_k \vec{\omega}_k \times \vec{u}_3^{(k)} \Rightarrow \\
 \vec{\alpha}_k &= \vec{\alpha}_{k-1} + \ddot{\theta}_k \vec{u}_3^{(k)} + \dot{\theta}_k \vec{\omega}_{k-1} \times \vec{u}_3^{(k)} \quad (5.1.31) \\
 k &= 1, 2, 3, \dots, m; \vec{\alpha}_0 = \vec{0}
 \end{aligned}$$

(5.1.31) denkleminin \mathcal{F}_0 eksen takımındaki matris karşılığı şöyle ifade edilebilir.

$$\begin{aligned}
 \vec{\alpha}_k &= \vec{\alpha}_{k-1} + \ddot{\theta}_k \hat{\Psi}_k \vec{u}_3 + \dot{\theta}_k \tilde{\omega}_{k-1} \hat{\Psi}_k \vec{u}_3 \quad (5.1.32) \\
 k &= 1, 2, 3, \dots, m; \vec{\alpha}_0 = \vec{0}
 \end{aligned}$$

Gerektiğinde, $\vec{\alpha}_k^* = \vec{\alpha}_k^{(k)}$ dikeysıra matrisi de şöyle elde edilebilir.

$$\vec{\alpha}_k^* = \hat{\Psi}_k^t \vec{\alpha}_k \quad (5.1.33)$$

b) Yenilemeli Orijin İvmeleri Formülü

$$\begin{aligned}
 \vec{a}_k^\circ &= D_0 \vec{v}_k^\circ = D_0 [\vec{v}_{k-1}^\circ + \dot{s}_k \vec{u}_3^{(k)} + \vec{\omega}_{k-1} \times \vec{r}_k] \Rightarrow \\
 \vec{a}_k^\circ &= \vec{a}_{k-1}^\circ + \ddot{s}_k \vec{u}_3^{(k)} + \dot{s}_k D_0 \vec{u}_3^{(k)} + (D_0 \vec{\omega}_{k-1}) \times \vec{r}_k + \vec{\omega}_{k-1} \times D_0 \vec{r}_k \Rightarrow \\
 \vec{a}_k^\circ &= \vec{a}_{k-1}^\circ + \ddot{s}_k \vec{u}_3^{(k)} + \dot{s}_k \vec{\omega}_k \times \vec{u}_3^{(k)} + \vec{a}_{k-1} \times \vec{r}_k + \vec{\omega}_{k-1} \times [\dot{s}_k \vec{u}_3^{(k)} + \vec{\omega}_{k-1} \times \vec{r}_k] \Rightarrow \\
 \vec{a}_k^\circ &= \vec{a}_{k-1}^\circ + \ddot{s}_k \vec{u}_3^{(k)} + 2\dot{s}_k \vec{\omega}_{k-1} \times \vec{u}_3^{(k)} + \vec{a}_{k-1} \times \vec{r}_k + \vec{\omega}_{k-1} \times (\vec{\omega}_{k-1} \times \vec{r}_k) \quad (5.1.34) \\
 k &= 1, 2, 3, \dots, m; \vec{a}_0^\circ = \vec{0}
 \end{aligned}$$

(5.1.36) sayılı vektör denklemi, zemine bağlı \mathcal{F}_0 eksen takımında, aşağıdaki matris denklemi biçiminde de yazılabilir.

$$\begin{aligned}
 \vec{a}_k^\circ &= \vec{a}_{k-1}^\circ + \ddot{s}_k \hat{\Psi}_k \vec{u}_3 + 2\dot{s}_k \tilde{\omega}_{k-1} \hat{\Psi}_k \vec{u}_3 + (\vec{\alpha}_{k-1} + \tilde{\omega}_{k-1}^2) \hat{\Psi}_{k-1} \vec{r}_k \quad (5.1.35) \\
 k &= 1, 2, 3, \dots, m; \vec{a}_0^\circ = \vec{0}
 \end{aligned}$$

c) Kütle Merkezleri İvme Formülü

\mathcal{B}_k uzvuna ait C_k kütle merkezinin zemine göre ivmesi, (5.1.31) denkleminde yola çıkılarak şöyle elde edilir.

$$\begin{aligned}
 \vec{a}_k &= D_0 \vec{v}_k = D_0 (\vec{v}_k^\circ + \vec{\omega}_k \times \vec{c}_k) \Rightarrow \\
 \vec{a}_k &= \vec{a}_k^\circ + \vec{a}_k \times \vec{c}_k + \vec{\omega}_k \times (\vec{\omega}_k \times \vec{c}_k) \quad (5.1.36)
 \end{aligned}$$

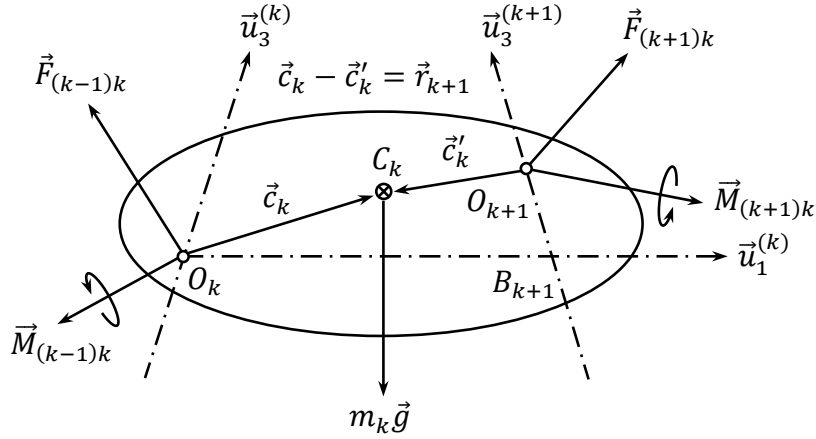
(5.1.36) denklemini, \mathcal{F}_0 eksen takımında aşağıdaki matris denklemi biçiminde yazılabilir.

$$\vec{a}_k = \vec{a}_k^\circ + (\vec{\alpha}_k + \tilde{\omega}_k^2) \hat{\Psi}_k \vec{c}_k \quad (5.1.37)$$

5.2. Eyletimsel Dinamik Analiz

5.2.1. Yenilemeli Newton-Euler (Kuvvet-Moment) Denklemleri

Bir seri manipülatörün \mathcal{B}_k uzvu, Şekil 5.3'te bir serbest cisim diyagramı biçiminde gösterilmiştir. \mathcal{B}_k uzvuna yakıncıl komşusu olan \mathcal{B}_{k-1} uzvu ve uzakçıl komşusu olan \mathcal{B}_{k+1} uzvu tarafından uygulanan etkileşim kuvvetleri, $\vec{F}_{(k-1)k}$ ve $\vec{F}_{(k+1)k}$ simgeleriyle; etkileşim momentleri ise, $\vec{M}_{(k-1)k}$ ve $\vec{M}_{(k+1)k}$ simgeleriyle gösterilmiştir. Şekilde de görüldüğü gibi, \mathcal{B}_k uzvunun komşularıyla etkileştiği noktaların, eklem eksenleri üzerindeki O_k ve O_{k+1} orijinleri olduğu varsayılmıştır.



Şekil 5.3 \mathcal{B}_k Uzvuna Etkiyen Kuvvet ve Momentler

Uzuvlara ait kuvvet ve moment denklemleri yazılırken, seri manipülatörün son uzvu olan \mathcal{B}_m uzvunun uzakçıl komşusunun, arada herhangi bir eklem olmasa da, \mathcal{B}_0 (zemin) olduğu kabul edilir. Buna göre, son uzuv için şu eşitlikler kullanılır.

$$\vec{F}_{(m+1)m} = \vec{F}_{0m} \quad (5.2.1)$$

$$\vec{M}_{(m+1)m} = \vec{M}_{0m} \quad (5.2.2)$$

(5.2.1) ve (5.2.2) denklemlerindeki \vec{F}_{0m} kuvveti ile \vec{M}_{0m} momenti, işlem aygıtına uygulanan görev kuvveti ile görev momenti olarak tanımlanırlar. Bu kuvvet ve moment, manipülatör üstlendiği görevi yerine getirirken, işlem aygıtı tarafından manipüle edilen cisim ya da işlem aygıtının üzerinde çalıştığı yüzey tarafından uygulanır. Manipülatörün dinamik analizi yapılırken \vec{F}_{0m} kuvveti ile \vec{M}_{0m} momentinin belirtilmiş olduğu (bilindiği ya da kestirilebildiği) varsayılır.

Öte yandan, Newton'un üçüncü kanununa göre, son uzuv hariç, diğer uzuvlar için yazılan kuvvet-moment denklemlerinde de aşağıdaki etki-tepki ilişkileri kullanılır.

$$\vec{F}_{(k+1)k} = -\vec{F}_{k(k+1)} \quad (5.2.3)$$

$$\vec{M}_{(k+1)k} = -\vec{M}_{k(k+1)} \quad (5.2.4)$$

Yukarıda sözü edilen etkileşim kuvvet ve moment vektörlerinin ilgili eklem eksenleri üzerindeki izdüşümleri ise, eklemlerdeki eyletim ve direnç etkilerini yansıtır. Bu durum, direnç etkilerinin viskoz sürtünmeden kaynaklandığı varsayılarak şöyle ifade edilebilir.

Eğer J_k eklemi döner eklemse,

$$\vec{M}_{(k-1)k} \cdot \vec{u}_3^{(k)} = M_{(k-1)k3} = T_k - \gamma_k^\circ \dot{\theta}_k \quad (5.2.5)$$

(5.2.5) denkleminde, T_k eyletim torkunu, γ_k° ise açısal viskoz sürtünme katsayısını göstermektedir. Bu eklem için, $\vec{M}_{(k-1)k}$ vektörünün diğer iki bileşeni ile $\vec{F}_{(k-1)k}$ vektörünün her üç bileşeni, eklemdeki yapısal tepkileri oluşturur.

Eğer J_k eklemi kayar eklemse,

$$\vec{F}_{(k-1)k} \cdot \vec{u}_3^{(k)} = F_{(k-1)k3} = F_k - \gamma_k' \dot{s}_k \quad (5.2.6)$$

(5.2.6) denkleminde, F_k eyletim kuvvetini, γ_k' ise doğrusal viskoz sürtünme katsayısını göstermektedir. Bu eklem için, $\vec{F}_{(k-1)k}$ vektörünün diğer iki bileşeni ile $\vec{M}_{(k-1)k}$ vektörünün her üç bileşeni, eklemdeki yapısal tepkileri oluşturur.

a) Yenilemeli Vektör Denklemleri

Yukarıdaki açıklamalara dayanarak manipülatörün uzuvları için aşağıdaki Newton-Euler (Kuvvet-Moment) denklemleri yazılabilir.

Kuvvet Denklemi:

$$\begin{aligned} m_k \vec{a}_k &= m_k \vec{g} + \vec{F}_{(k-1)k} + \vec{F}_{(k+1)k} \Rightarrow \\ m_k \vec{a}_k &= m_k \vec{g} + \vec{F}_{(k-1)k} - \vec{F}_{k(k+1)} \end{aligned} \quad (5.2.7)$$

Kütle Merkezi Etrafında Moment Denklemi:

$$\begin{aligned} \check{J}_k \cdot \vec{a}_k + \vec{\omega}_k \times \check{J}_k \cdot \vec{\omega}_k &= \vec{M}_{(k-1)k} + \vec{M}_{(k+1)k} + \vec{c}_k \times \vec{F}_{(k-1)k} + \vec{c}_{k+1} \times \vec{F}_{(k+1)k} \\ &= \vec{M}_{(k-1)k} - \vec{M}_{k(k+1)} + (-\vec{c}_k) \times \vec{F}_{(k-1)k} + (-\vec{c}'_k) \times [-\vec{F}_{k(k+1)}] \\ &= \vec{M}_{(k-1)k} - \vec{M}_{k(k+1)} - \vec{c}_k \times \vec{F}_{(k-1)k} + \vec{c}'_k \times \vec{F}_{k(k+1)} \end{aligned} \quad (5.2.8)$$

(5.2.7) ve (5.2.8) denklemlerindeki m_k ile \check{J}_k simgeleri, \mathcal{B}_k uzvunun kütlesi ile kütle merkezi etrafındaki atalet tensörünü göstermektedir. \check{J}_k tensörü, \mathcal{F}_k eksen takımındaki sabit bileşenleri ile şöyle ifade edilebilir.

$$\check{J}_k = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 J_{kij} \vec{u}_i^{(k)} \vec{u}_j^{(k)} \quad (5.2.9)$$

(5.2.7) ve (5.2.8) denklemleri, etkileşim kuvvet ve momentlerini son eklemde başlayıp ilk eklem kadar yenilemeli olarak belirlemek üzere aşağıda görülen biçimde düzenlenebilir. Buradaki amaç eyletimsel dinamik analiz olduğu için, manipülatörün hareketinin (yani \vec{a}_k , $\vec{\alpha}_k$, $\vec{\omega}_k$ vektörlerinin) ve işlem aygıtına etkiyen görev kuvveti ile momentinin (yani \vec{F}_{0m} ile \vec{M}_{0m} vektörlerinin) belirtilmiş olduğu kabul edilmektedir.

$$\vec{F}_{(k-1)k} = \vec{F}_{k(k+1)} + \vec{F}_k^* - m_k \vec{g} \quad (5.2.10)$$

$$\vec{M}_{(k-1)k} = \vec{M}_{k(k+1)} + \vec{c}_k \times \vec{F}_{(k-1)k} - \vec{c}'_k \times \vec{F}_{k(k+1)} + \vec{M}_k^* \quad (5.2.11)$$

$$k = m, m-1, m-2, \dots, 1$$

$$\vec{F}_{m(m+1)} = \vec{F}_{m0} = -\vec{F}_{0m} \quad (5.2.12)$$

$$\vec{M}_{m(m+1)} = \vec{M}_{m0} = -\vec{M}_{0m} \quad (5.2.13)$$

(5.2.10) ve (5.2.11) denklemlerinde, manipülatörün belirtilmiş olan hareketine bağlı olarak bilinen *ataletsel kuvvet* (\vec{F}_k^*) ile C_k etrafındaki *ataletsel moment* (\vec{M}_k^*) şöyle tanımlanmışlardır.

$$\vec{F}_k^* = m_k \vec{a}_k \quad (5.2.14)$$

$$\vec{M}_k^* = \check{J}_k \cdot \vec{a}_k + \vec{\omega}_k \times \check{J}_k \cdot \vec{\omega}_k \quad (5.2.15)$$

(5.2.10) ve (5.2.11) denklemleri, (5.2.10) denklemi (5.2.11) denkleminde yerine konarak ve $\vec{c}'_k = \vec{r}_{k+1}$ olduğu göz önüne alınarak şöyle de yazılabilir.

$$\vec{F}_{(k-1)k} = \vec{F}_{k(k+1)} - m_k \vec{g} + \vec{F}_k^* \quad (5.2.16)$$

$$\vec{M}_{(k-1)k} = \vec{M}_{k(k+1)} + \vec{r}_{k+1} \times \vec{F}_{k(k+1)} - m_k \vec{c}_k \times \vec{g} + \vec{M}_k^{**} \quad (5.2.17)$$

$$k = m, m-1, m-2, \dots, 1$$

Dikkat edilirse, (5.2.17) denklemi, C_k yerine O_k etrafında yazılmış olan moment denklemdir. Aynı denklemde yer alan \vec{M}_k^{**} ise, O_k etrafındaki *ataletsel moment* olarak şöyle tanımlanmıştır.

$$\vec{M}_k^{**} = \vec{M}_k^* + \vec{c}_k \times \vec{F}_k^* = \check{J}_k \cdot \vec{a}_k + \vec{\omega}_k \times \check{J}_k \cdot \vec{\omega}_k + m_k \vec{c}_k \times \vec{a}_k \quad (5.2.18)$$

b) Yenilemeli Matris Denklemleri

(5.2.16) ve (5.2.17) denklemleri, uygun eksen takımları kullanılarak matris denklemleri biçiminde de yazılabilir. Bu amaçla, ilgili dikeysıra matrisleri şöyle tanımlanabilir.

$$\bar{F}_{(k-1)k} = [\vec{F}_{(k-1)k}]^{(k)}, \quad \bar{M}_{(k-1)k} = [\vec{M}_{(k-1)k}]^{(k)} \quad (5.2.19)$$

$$\bar{F}_{k(k+1)} = [\vec{F}_{k(k+1)}]^{(k+1)}, \quad \bar{M}_{k(k+1)} = [\vec{M}_{k(k+1)}]^{(k+1)} \quad (5.2.20)$$

$$\bar{F}_k^* = [\vec{F}_k^*]^{(k)}, \quad \bar{M}_k^* = [\vec{M}_k^*]^{(k)}, \quad \bar{M}_k^{**} = [\vec{M}_k^{**}]^{(k)} \quad (5.2.21)$$

$$\bar{g} = \vec{g}^{(0)} \quad (5.2.22)$$

Yukarıdaki tanımlar kullanılarak aşağıdaki matris denklemleri yazılabilir.

$$\bar{F}_{(k-1)k} = \hat{\Phi}_{k+1} \bar{F}_{k(k+1)} - m_k \hat{\Psi}_k^t \bar{g} + \bar{F}_k^* \quad (5.2.23)$$

$$\bar{M}_{(k-1)k} = \hat{\Phi}_{k+1} \bar{M}_{k(k+1)} + \check{r}_{k+1} \hat{\Phi}_{k+1} \bar{F}_{k(k+1)} - m_k \check{c}_k \hat{\Psi}_k^t \bar{g} + \bar{M}_k^{**} \quad (5.2.24)$$

$$k = m, m-1, m-2, \dots, 1$$

Yukarıdaki yenilemeli denklemler, $k = m$ için aşağıdaki eşitlikler kullanılarak başlatılır.

$$\hat{\Phi}_{m+1} = \hat{C}^{(m,m+1)} = \hat{C}^{(m,0)} = \hat{\Psi}_m^t \quad (5.2.25)$$

$$\bar{F}_{m(m+1)} = [\bar{F}_{m0}]^{(m+1)} = -[\bar{F}_{0m}]^{(0)} = -\bar{F}_{0m} \quad (5.2.26)$$

$$\bar{M}_{m(m+1)} = [\bar{M}_{m0}]^{(m+1)} = -[\bar{M}_{0m}]^{(0)} = -\bar{M}_{0m} \quad (5.2.27)$$

Ataletsel kuvvet ve moment vektörlerinin matris gösterimleri ise şöyledir.

$$\bar{F}_k^* = m_k \hat{\Psi}_k^t \bar{a}_k \quad (5.2.28)$$

$$\bar{M}_k^{**} = \bar{M}_k^* + \tilde{c}_k \bar{F}_k^* = \hat{J}_k \bar{a}_k^* + \tilde{\omega}_k^* \hat{J}_k \bar{\omega}_k^* + m_k \tilde{c}_k \hat{\Psi}_k^t \bar{a}_k \quad (5.2.29)$$

(5.2.22) – (5.2.29) denklemlerindeki matrisler hakkında şunlar söylenebilir.

Hatırlanacağı üzere, "Kinematik İlişkiler" kısmında (Kısım 5.1'de), $\bar{\omega}_k^*$ ile \bar{a}_k^* dikeysıra matrisleri \mathcal{F}_k eksen takımında, \bar{a}_k dikeysıra matrisi ise \mathcal{F}_0 eksen takımında ifade edilmişlerdi. Öte yandan, doğal olarak, \hat{J}_k ve \tilde{c}_k matrisleri \mathcal{F}_k eksen takımında, \bar{g} dikeysıra matrisi ise \mathcal{F}_0 eksen takımında ifade edilir.

(5.2.9) denkleminde göre, $\hat{J}_k = \hat{J}_k^{(k)}$ atalet matrisinin ifadesi şöyledir.

$$\hat{J}_k = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 J_{kij} \bar{u}_i \bar{u}_j^t \quad (5.2.30)$$

Genel olarak \mathcal{F}_0 eksen takımı, $\bar{u}_3^{(0)}$ birim vektörü yeryüzüne yukarıya doğru dik olacak biçimde konumlandırılır. Böyle yapıldığı takdirde, \bar{g} için şu eşitlik yazılabilir.

$$\bar{g} = \bar{g}^{(0)} = -g \bar{u}_3^{(0/0)} = -g \bar{u}_3 \quad (5.2.31)$$

5.2.2. Eyletim Torkları ve Kuvvetleri

Önceki kısımdaki yenilemeli denklemler aracılığıyla etkileşim kuvvet ve momentleri elde edildikten sonra, (5.2.5) ve (5.2.6) denklemlerinden de yararlanılarak, eyletim torkları ve kuvvetleri, $k \in \{1, 2, 3, \dots, m\}$ için aşağıda açıklandığı gibi belirlenir.

Eğer J_k eklemi, viskoz sürtünmeli döner eklemse,

$$\begin{aligned} T_k - \gamma_k^\circ \dot{\theta}_k &= \bar{u}_3^{(k)} \cdot \bar{M}_{(k-1)k} = \bar{u}_3^t \bar{M}_{(k-1)k} \Rightarrow \\ T_k &= \bar{u}_3^t \bar{M}_{(k-1)k} + \gamma_k^\circ \dot{\theta}_k \end{aligned} \quad (5.2.32)$$

Eğer J_k eklemi, viskoz sürtünmeli kayar eklemse,

$$\begin{aligned} F_k - \gamma_k' \dot{s}_k &= \bar{u}_3^{(k)} \cdot \bar{F}_{(k-1)k} = \bar{u}_3^t \bar{F}_{(k-1)k} \Rightarrow \\ F_k &= \bar{u}_3^t \bar{F}_{(k-1)k} + \gamma_k' \dot{s}_k \end{aligned} \quad (5.2.33)$$

5.3. Devinimsel Dinamik Analiz

5.3.1. Hareket Denklemi

Bir seri manipülatörün devinimsel dinamik analizi, genel olarak, eklem değişkenleri aracılığıyla yapılır. Bu amaçla, manipülatörün hareket denklemi, Bölüm 4'teki Lagrange formülasyonu formatına uygun olarak şöyle yazılabilir.

$$\begin{aligned} \hat{M} \ddot{q} + \bar{C} + \hat{F} \dot{q} + \bar{G} &= \bar{Q} + \bar{D} \Rightarrow \\ \hat{M} \ddot{q} &= \bar{Q} + (\bar{D} - \bar{G} - \bar{C} - \hat{F} \dot{q}) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\hat{M}\ddot{q} = \bar{Q} + \bar{Z} \quad (5.3.1)$$

(5.3.1) denklemindeki eklentisel terim (\bar{Z}), şöyle tanımlanmıştır.

$$\bar{Z} = \bar{D} - \bar{G} - \bar{C} - \hat{F}\dot{q} \quad (5.3.2)$$

(5.3.1) ve (5.3.2) denklemlerinde ayrıca şu tanımlar kullanılmıştır.

$$\bar{q} : \text{Eklem değişkenlerini içeren dikeysıra matrisi} \quad (5.3.3)$$

$$\bar{Q} : \text{Eyletim torkları ve/veya kuvvetlerini içeren dikeysıra matrisi} \quad (5.3.4)$$

$$\hat{M} = \hat{M}(\bar{q}) : \text{Manipülâtörün kütle matrisi} \quad (5.3.5)$$

$$\hat{F} : \text{Viskoz sürtünme katsayıları matrisi} \quad (5.3.6)$$

$$\bar{D} : \text{Görev kuvveti ve momentine ilişkin dikeysıra matrisi} \quad (5.3.7)$$

$$\bar{G} = \bar{G}(\bar{q}) : \text{Uzuv ağırlıklarına ilişkin dikeysıra matrisi} \quad (5.3.8)$$

$$\bar{C} = \bar{C}(\bar{q}, \dot{q}) : \text{Hıza bağlı ataletsel terimlere ilişkin dikeysıra matrisi} \quad (5.3.9)$$

\bar{C} dikeysıra matrisi, *Merkezkaç*, *Coriolis* ve *Jiroskopik* etkileri yansıtan terimlerden oluşur.

Yukarıdaki matrislerden \hat{F} , bilinen (ya da kestirilen) viskoz sürtünme katsayılarından oluşan köşegensel bir matristir. Diğer matrisler ise (\bar{D} , \bar{G} , \bar{C} , \hat{M}), herhangi bir t anında, değerleri bilinen eklem değişkenleri ve türevleri (\bar{q} ve \dot{q}) kullanılarak hesaplanabilirler. Eklem değişkenleri ve türevlerinin t anındaki bilinen değerleri ise, ya simülasyon yoluyla (uygulama süreci dışı ise) ya da ölçülerek (uygulama süreci içi ise) elde edilir.

Önceki paragrafta sözü edilen hesaplamalar, önce *yenilemeli kinematik denklemler* ve hemen ardından *yenilemeli Newton-Euler denklemleri* kullanılarak oldukça hızlı bir biçimde yapılabilir. Bu sayede, aşırı hızlı icra edilmeyen süreci içi bir uygulamada bile kullanılabilirler. Söz konusu hesaplamalar, manipülâtörün değişik varsayımsal yüklenme koşullarında \bar{Q} dikeysıra matrisinin hesaplanmasına dayanır. Bu hesaplamaların nasıl yapılacağı, \bar{G} , \bar{C} , \bar{D} ve \hat{M} matrisleri için aşağıda ayrı ayrı açıklanmıştır.

5.3.2. Uzuv Ağırlıklarına İlişkin Dikeysıra Matrisinin Hesaplanması

Bu hesaplama için şu varsayımlar yapılır.

$$\dot{q} = \bar{0}, \ddot{q} = \bar{0}, \hat{F} = \hat{0}, \bar{F}_{0m} = \bar{0}, \bar{M}_{0m} = \bar{0}; g \neq 0$$

Bu varsayımlara göre, yenilemeli denklemler \bar{Q} için şu sonucu verir.

$$\bar{Q} = \bar{Q}_G$$

Bunun üzerine, (5.3.1) ve (5.3.2) denklemleri de \bar{G} için şu sonucu verir.

$$\bar{G} = \bar{Q}_G \quad (5.3.10)$$

Eğer istenirse, \bar{G} dikeysıra matrisinin elemanları, $k \in \{1, 2, 3, \dots, m\}$ için, manipülâtörün potansiyel enerji (U) işlevinin kısmi türevleri alınarak aşağıda olduğu gibi de elde edilebilir.

$$G_k = \partial U / \partial q_k \quad (5.3.11)$$

5.3.3. Hıza Bağlı Ataletsel Terimlere İlişkin Dikeysıra Matrisinin Hesaplanması

Bu hesaplama için şu varsayımlar yapılır.

$$\ddot{q} = \bar{0}, \quad g = 0, \quad \hat{F} = \hat{0}, \quad \bar{F}_{0m} = \bar{0}, \quad \bar{M}_{0m} = \bar{0}; \quad \dot{q} \neq \bar{0}$$

Bu varsayımlara göre, yenilemeli denklemler \bar{Q} için şu sonucu verir.

$$\bar{Q} = \bar{Q}_C$$

Bunun üzerine, (5.3.1) ve (5.3.2) denklemleri de \bar{C} için şu sonucu verir.

$$\bar{C} = \bar{Q}_C \quad (5.3.12)$$

Görüldüğü gibi, yalnızca seri manipülatörler için geçerli olan bu yöntemle, \bar{C} dikeysıra matrisi oldukça kolay bir biçimde elde edilebilmektedir. Oysa, eğer Bölüm 4'te anlatılan Lagrange formülasyonu kullanılsaydı, aynı matrisi elde etmek çok daha zor olurdu. Çünkü, (4.5.56) ve (4.5.57) denklemleri uyarınca, \bar{C} dikeysıra matrisinin k -yinci elemanını aşağıdaki denkleme göre, denklemdaki kütle matrisi türevlerini ise (4.5.19) denklemine göre hesaplamak gerekirdi.

$$C_k = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial M_{ki}}{\partial q_j} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial M_{ij}}{\partial q_k} \right) \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (5.3.13)$$

5.3.4. Görev Kuvveti ve Momentine İlişkin Dikeysıra Matrisinin Hesaplanması

Bu hesaplama için \vec{F}_{0m} kuvveti ile \vec{M}_{0m} momentinin bilinen (ölçülen ya da kestirilen) değerleri kullanılır. Gerekli hesaplamalar, şu varsayımlarla yapılır.

$$\dot{q} = \bar{0}, \quad \ddot{q} = \bar{0}, \quad g = 0, \quad \hat{F} = \hat{0}; \quad \bar{F}_{0m} \neq \bar{0}, \quad \bar{M}_{0m} \neq \bar{0}$$

Bu varsayımlara göre, yenilemeli denklemler \bar{Q} için şu sonucu verir.

$$\bar{Q} = \bar{Q}_D$$

Bunun üzerine, (5.3.1) ve (5.3.2) denklemleri de \bar{R} için şu sonucu verir.

$$\bar{D} = -\bar{Q}_D \quad (5.3.14)$$

Eğer istenirse, \bar{D} dikeysıra matrisi, *sanal iş yöntemi* ile de elde edilebilir. Bunun nasıl yapıldığı, bir sonraki kısımda (Kısım 5.4'te) anlatılmıştır.

5.3.5. Kütle Matrisinin Hesaplanması

Bu hesaplama, ilgilenilen t anında, m kez yapılır. Her seferinde şu değerler kullanılır.

$$\dot{q} = \bar{0}, \quad g = 0, \quad \hat{F} = \hat{0}, \quad \bar{F}_{0m} = \bar{0}, \quad \bar{M}_{0m} = \bar{0};$$

$$\ddot{q} = \bar{e}_k; \quad k = 1, 2, 3, \dots, m \quad (5.3.15)$$

Buradaki \bar{e}_k dikeysıra matrisi, k -yinci elemanı 1, diğer elemanları 0 olacak biçimde tanımlanmıştır. Diğer bir deyişle, $\{\bar{e}_k: k = 1, 2, 3, \dots, m\}$ kümesinin öğeleri, aşağıdaki diklik ve birim boyluluk denklemini sağlar.

$$\bar{e}_i^t \bar{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \text{ ise} \\ 0, & i \neq j \text{ ise} \end{cases} \quad (5.3.16)$$

Yukarıdaki değerler kullanılarak yapılan k -yinci hesaplamada, yenilemeli denklemler \bar{Q} için şu sonucu verir.

$$\bar{Q} = \bar{Q}_{M_k}$$

Bu hesaplama göre, (5.3.1) denklemi şu şekli alır.

$$\widehat{M}\bar{e}_k = \bar{M}_k = \bar{Q}_{M_k} \quad (5.3.17)$$

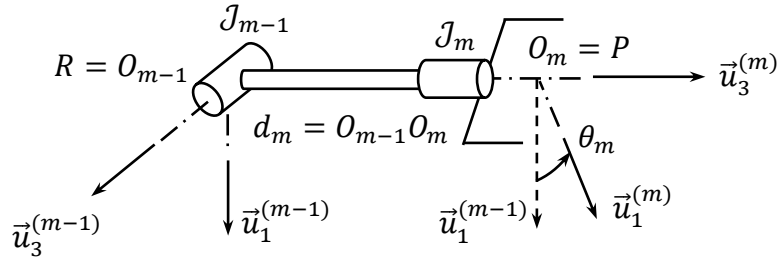
(5.3.17) denklemine göre, yenilemeli denklemlerle hesaplanmış olan \bar{Q}_{M_k} dikeysıra matrisi, \widehat{M} matrisinin k -yinci dikeysırası (yani \bar{M}_k) olmaktadır. Böylece, m kez yapılan hesaplamaların sonucunda, \widehat{M} matrisi, aşağıda gösterilen biçimde elde edilmiş olur.

$$\widehat{M} = [\bar{M}_1 \quad \bar{M}_2 \quad \bar{M}_3 \quad \cdots \quad \bar{M}_m] \quad (5.3.18)$$

Yine görüldüğü gibi, yalnızca seri manipülatörler için geçerli olan bu yöntemle, \widehat{M} matrisi de oldukça kolay bir biçimde elde edilebilmektedir. Oysa, eğer Bölüm 4'te anlatılan Lagrange formülasyonu kullanılsaydı, aynı matrisi elde etmek için, gerektirdiği hesaplamalar çok daha fazla olan (4.5.17) denklemini kullanmak gerekirdi.

5.4. Sanal İş Yöntemiyle Dinamik Analiz

5.4.1. İşlem Aygıtının Duruşundaki Sanal Değişim



Şekil 5.4 İki Parmaklı Tutucu Biçiminde Tipik Bir İşlem Aygıtı

Bir seri manipülatörün işlem aygıtı, kullanım amacına bağlı olarak çeşitli biçimlere sahip olabilir. Bununla birlikte, bir çok manipülatörde kullanılan en tipik işlem aygıtı, iki parmaklı kısaç biçiminde bir tutucudur. Böyle bir işlem aygıtı, m uzuvlu bir manipülatörün son uzvu olarak Şekil 5.4'te gösterilmiştir. Bu işlem aygıtına özgü noktalar ve parametreler şunlardır.

$P = O_m$: İşlem aygıtının ve manipülatörün uç noktası

$R = O_{m-1}$: İşlem aygıtının ve manipülatörün bilek noktası

$d_m = RP$: İşlem aygıtının uzunluğu

İşlem aygıtının zemine göre duruşu (konumu ve yönelimi), aşağıdaki matris ve vektörlerle ifade edilebilir.

$$\hat{C} = \hat{\Psi}_m = \hat{C}^{(0,m)} : \text{İşlem aygıtının (son uzvun) yönelim matrisi} \quad (5.4.1)$$

$$\vec{p} = \vec{r}_{OP} : \text{Uç noktasının konum vektörü} \quad (5.4.2)$$

$$\vec{r} = \vec{r}_{OR} : \text{Bilek noktasının konum vektörü} \quad (5.4.3)$$

Yukarıdaki konum vektörlerinin, $O = O_0$ olmak üzere, \mathcal{F}_0 eksen takımındaki matris gösterimleri şöyledir.

$$\bar{p} = \bar{p}^{(0)} \quad (5.4.4)$$

$$\bar{r} = \bar{r}^{(0)} \quad (5.4.5)$$

İşlem aygıtının konum vektörleri ile matris gösterimleri arasında şu ilişkiler vardır.

$$\vec{p} = \vec{r} + d_m \vec{u}_3^{(m)} \quad (5.4.6)$$

$$\vec{p} = \vec{r} + d_m \vec{u}_3^{(m/0)} = \vec{r} + d_m \hat{C}^{(0,m)} \vec{u}_3^{(m/m)} \Rightarrow$$

$$\vec{p} = \vec{r} + d_m \hat{C} \vec{u}_3 \quad (5.4.7)$$

İşlem aygıtının zemine göre konumunu temsil eden \vec{p} ve \vec{r} dikeysıra matrisleri, doğal olarak, eklem değişkenlerinin işlevleridir. Dolayısıyla, bu matrislerin sanal değişimleri, eklem değişkenlerinin sanal değişimlerine bağlı olarak aşağıda görüldüğü gibi ifade edilebilir.

$$\delta \vec{p} = \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial \vec{p}}{\partial q_k} \right) \delta q_k = \sum_{k=1}^m \bar{V}_{Pk} \delta q_k \quad (5.4.8)$$

$$\delta \vec{r} = \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k} \right) \delta q_k = \sum_{k=1}^m \bar{V}_{Rk} \delta q_k \quad (5.4.9)$$

(5.4.8) ve (5.4.9) denklemlerindeki \bar{V}_{Pk} ve \bar{V}_{Rk} dikeysıra matrisleri, uç ve bilek noktalarına ait "değişimsel etki katsayıları" olarak adlandırılırlar. Bu katsayıların ilgili denklemlerde de görülen ifadeleri şöyledir.

$$\bar{V}_{Pk} = \frac{\partial \vec{p}}{\partial q_k} \quad (5.4.10)$$

$$\bar{V}_{Rk} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k} \quad (5.4.11)$$

Bu arada, (5.4.7) denkleminde yola çıkarak aşağıdaki sanal değişim denklemi yazılabilir.

$$\delta \vec{p} = \delta \vec{r} + d_m (\delta \hat{C}) \vec{u}_3 = \delta \vec{r} + d_m [(\delta \hat{C}) \hat{C}^t] \hat{C} \vec{u}_3 = \delta \vec{r} + d_m (\delta \tilde{\psi}) \hat{C} \vec{u}_3 \quad (5.4.12)$$

(5.4.12) denklemindeki $\delta \tilde{\psi} = \text{asm}(\delta \tilde{\psi})$ matrisi, işlem aygıtının yönelimindeki sanal değişimi \mathcal{F}_0 eksen takımında temsil eden *antisimetrik matris* olarak tanımlanır. Bu matris, eklem değişkenlerinin sanal değişimlerine bağlı olarak şöyle ifade edilebilir.

$$\delta \tilde{\psi} = (\delta \hat{C}) \hat{C}^t = \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial \hat{C}}{\partial q_k} \right) \hat{C}^t \delta q_k = \sum_{k=1}^m \bar{\Omega}_k \delta q_k \quad (5.4.13)$$

(5.4.13) denklemindeki $\bar{\Omega}_k$ dikeysıra matrisi, işlem aygıtının yönelimine ait "değişimsel etki katsayısı" olarak tanımlanır. Bu katsayının antisimetrik matris (asm) biçimindeki ifadesi şöyledir.

$$\bar{\Omega}_k = \text{asm}(\bar{\Omega}_k) = \left(\frac{\partial \hat{C}}{\partial q_k} \right) \hat{C}^t \quad (5.4.14)$$

Öte yandan, herhangi bir seri manipülatöre ait \hat{C} matrisi için aşağıdaki genel ifade yazılabilir.

$$\hat{C} = e^{\tilde{n}_1 \theta_1} e^{\tilde{n}_2 \theta_2} e^{\tilde{n}_3 \theta_3} \dots e^{\tilde{n}_m \theta_m} \hat{C}_0 \quad (5.4.15)$$

(5.4.15) denkleminde, \hat{C}_0 matrisi ile her $k \in \{1, 2, 3, \dots, m\}$ için, \bar{n}_k dikeysıra matrisi sabittir. Ayrıca, manipülatördeki kayar eklemlerin sayısına ve sırasına bağlı olarak (5.4.15) denklemindeki açılardan bazıları sabit olabilir. (5.4.14) ve (5.4.15) denklemleri kullanılarak ve açılardan hepsine değişken muamelesi yapılarak gösterilebilir ki,

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}_1 &= \bar{n}_1, \quad \bar{\Omega}_2 = e^{\tilde{n}_1 \theta_1} \bar{n}_2, \quad \bar{\Omega}_3 = e^{\tilde{n}_1 \theta_1} e^{\tilde{n}_2 \theta_2} \bar{n}_3, \dots \\ \bar{\Omega}_m &= e^{\tilde{n}_1 \theta_1} e^{\tilde{n}_2 \theta_2} \dots e^{\tilde{n}_{m-1} \theta_{m-1}} \bar{n}_m \end{aligned} \quad (5.4.16)$$

Yukarıda tanımlanan değişimsel etki katsayıları kullanılarak aşağıdaki Jacobi (Yakobi) matrisleri oluşturulabilir.

a) Uç Noktası Jacobi Matrisi

$$\hat{J}_P = \begin{bmatrix} \bar{V}_{P1} & \bar{V}_{P2} & \bar{V}_{P3} & \cdots & \bar{V}_{Pm} \\ \bar{\Omega}_1 & \bar{\Omega}_2 & \bar{\Omega}_3 & \cdots & \bar{\Omega}_m \end{bmatrix} \quad (5.4.17)$$

b) Bilek Noktası Jacobi Matrisi

$$\hat{J}_R = \begin{bmatrix} \bar{V}_{R1} & \bar{V}_{R2} & \bar{V}_{R3} & \cdots & \bar{V}_{Rm} \\ \bar{\Omega}_1 & \bar{\Omega}_2 & \bar{\Omega}_3 & \cdots & \bar{\Omega}_m \end{bmatrix} \quad (5.4.18)$$

Jacobi matrisleri kullanılarak da, işlem aygıtının duruşundaki (konumundaki ve yönelimindeki) sanal değişimi ifade etmek üzere, aşağıdaki büyütülmüş dikeysıra matrisleri ($\delta\bar{\xi}_P$ ve $\delta\bar{\xi}_R$) tanımlanıp $\delta\bar{q}$ ile ilişkilendirilebilir.

$$\delta\bar{\xi}_P = \begin{bmatrix} \delta\bar{p} \\ \delta\bar{\psi} \end{bmatrix} = \hat{J}_P \delta\bar{q} \quad (5.4.19)$$

$$\delta\bar{\xi}_R = \begin{bmatrix} \delta\bar{r} \\ \delta\bar{\psi} \end{bmatrix} = \hat{J}_R \delta\bar{q} \quad (5.4.20)$$

Ek Açıklama:

Bu kısımda kullanılan *değişimsel etki katsayıları* ile daha önce hız analizinde kullanılmış olan *hız etki katsayıları* aslında aynıdır. Dolayısıyla, bu katsayılar ve onlardan oluşan Jacobi matrisleri, işlem aygıtının hızı ile eklem değişkenlerinin türevlerini, aşağıdaki denklemlere göre ilişkilendirmek için de kullanılabilirler.

$$\bar{v}_P = \dot{\bar{p}} = \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial q_k} \right) \dot{q}_k = \sum_{k=1}^m \bar{V}_{Pk} \dot{q}_k \quad (5.4.21)$$

$$\bar{v}_R = \dot{\bar{r}} = \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_k} \right) \dot{q}_k = \sum_{k=1}^m \bar{V}_{Rk} \dot{q}_k \quad (5.4.22)$$

$$\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_{m/0} = \hat{C} \hat{C}^t = \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial \hat{C}}{\partial q_k} \right) \hat{C}^t \dot{q}_k = \sum_{k=1}^m \tilde{\Omega}_k \dot{q}_k \quad (5.4.23)$$

$$\bar{v}_P = \bar{v}_R + d_m \tilde{\omega} \hat{C} \bar{u}_3 \quad (5.4.24)$$

$$\bar{\eta}_P = \begin{bmatrix} \bar{v}_P \\ \tilde{\omega} \end{bmatrix} = \hat{J}_P \dot{\bar{q}} \quad (5.4.25)$$

$$\bar{\eta}_R = \begin{bmatrix} \bar{v}_R \\ \tilde{\omega} \end{bmatrix} = \hat{J}_R \dot{\bar{q}} \quad (5.4.26)$$

5.4.2. Görev Kuvveti ile Momentinin İşlem Aygıtı Üzerinde Yaptıkları Sanal İş

Kısım 5.2'de, işlem aygıtına yaptığı görev nedeniyle manipülatörün dışından uygulanan *görev kuvveti* ve *görev momentini*, \vec{F}_{0m} ve \vec{M}_{0m} vektörleriyle gösterilmişti. Bu vektörleri \mathcal{F}_0 eksen takımında temsil eden dikeysıra matrisleri ise, \bar{F}_{0m} ve \bar{M}_{0m} singeleriyle gösterilmişti. Kısım 5.3'te, görev kuvveti ve momentini eklem uzayına yansıtan \bar{D} dikeysıra matrisi, yenilemeli denklemler yöntemiyle elde edilmişti. Bu kısımda ise, \bar{D} dikeysıra matrisinin sanal iş yöntemiyle elde edilişi üzerinde durulacaktır. \bar{D} dikeysıra matrisini bu şekilde elde etmek amacıyla, aşağıda açıklanan iki formülasyon seçeneğinden biri kullanılabilir.

a) Uç Noktasına Göre Sanal İş Formülasyonu

Görev kuvveti ve momentinin manipülatörün duruşundaki sanal değişim nedeniyle yaptıkları iş, görev kuvvetinin işlem aygıtının uç noktasına etkidiği varsayımıyla, şöyle ifade edilebilir.

$$\delta W_{0m} = \vec{F}_{0m} \cdot \delta \vec{p} + \vec{M}_{0m} \cdot \delta \vec{\psi} \quad (5.4.27)$$

(5.4.27) denklemi, denklemde yer alan vektörlerin \mathcal{F}_0 eksen takımındaki matris gösterimleri kullanılarak şöyle de yazılabilir.

$$\delta W_{0m} = \bar{F}_{0m}^t \delta \bar{p} + \bar{M}_{0m}^t \delta \bar{\psi} \quad (5.4.28)$$

(5.4.28) denklemindeki $\delta \bar{p}$ ve $\delta \bar{\psi}$ sanal değişimleri, (5.4.10) ve (5.4.13) denklemleri kullanılarak eklem değişkenlerindeki sanal değişimler cinsinden ifade edilebilir. Bunun sonucunda, (5.4.28) denklemi şu şekli alır.

$$\delta W_{0m} = \sum_{k=1}^m (\bar{F}_{0m}^t \bar{V}_{Pk} + \bar{M}_{0m}^t \bar{\Omega}_k) \delta q_k = \sum_{k=1}^m (\bar{V}_{Pk}^t \bar{F}_{0m} + \bar{\Omega}_k^t \bar{M}_{0m}) \delta q_k \quad (5.4.29)$$

Öte yandan, (5.3.1) denkleminde, görev kuvvet ve momentinin eklem uzayına yansımaları \bar{D} dikeysıra matrisiyle gösterilmişti. Bu matrisin elemanları kullanılarak δW_{0m} şöyle de ifade edilebilir.

$$\delta W_{0m} = \sum_{k=1}^m D_k \delta q_k \quad (5.4.30)$$

(5.4.29) ve (5.4.30) denklemleri karşılaştırılınca, aşağıdaki sonuçlara ulaşılır.

$$D_k = \bar{V}_{Pk}^t \bar{F}_{0m} + \bar{\Omega}_k^t \bar{M}_{0m} = [\bar{V}_{Pk}^t \quad \bar{\Omega}_k^t] \begin{bmatrix} \bar{F}_{0m} \\ \bar{M}_{0m} \end{bmatrix} \quad (5.4.31)$$

$$\bar{D} = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ \vdots \\ D_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{V}_{P1}^t & \bar{\Omega}_1^t \\ \bar{V}_{P2}^t & \bar{\Omega}_2^t \\ \bar{V}_{P3}^t & \bar{\Omega}_3^t \\ \vdots & \vdots \\ \bar{V}_{Pm}^t & \bar{\Omega}_m^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{F}_{0m} \\ \bar{M}_{0m} \end{bmatrix} \quad (5.4.32)$$

(5.4.32) denklemi, (5.4.17) denkleminde tanımlanan Jacobi matrisi (\hat{J}_p) kullanılarak aşağıdaki derleşik biçimde de yazılabilir.

$$\bar{D} = \hat{J}_p^t \bar{\mathcal{F}}_{0m} \quad (5.4.33)$$

(5.4.33) denklemindeki $\bar{\mathcal{F}}_{0m}$ dikeysıra matrisi ise, "büyütülmüş görev kuvveti" adıyla şöyle tanımlanmıştır.

$$\bar{\mathcal{F}}_{0m} = \begin{bmatrix} \bar{F}_{0m} \\ \bar{M}_{0m} \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^6 \quad (5.4.34)$$

\bar{D} dikeysıra matrisinin (5.4.33) denkleminde elde edilmesinden sonra, manipülatörün daha önce (5.3.1) denklemi biçiminde yazılan hareket denklemi, bu kez şöyle yazılabilir.

$$\hat{M} \ddot{q} = \bar{Q} + \hat{J}_p^t \bar{\mathcal{F}}_{0m} - (\hat{f} \dot{q} + \bar{C} + \bar{G}) \quad (5.4.35)$$

b) Bilek Noktasına Göre Sanal İş Formülasyonu

Yukarıda uç noktasına göre yapılan formülasyon, istenirse, bilek noktasına göre de yapılabilir. Bu seçeneğin tercih edilme gerekçesi, \hat{J}_R matrisinin \hat{J}_P matrisine göre daha basit bir ifadeye sahip olmasıdır.

Bilek noktası seçeneğini kullanmak üzere, (5.4.12) sayılı matris denkleminin karşılık gelen vektör denklemini şöyle yazılabilir.

$$\delta \vec{p} = \delta \vec{r} + \delta \vec{\psi} \times [d_m \vec{u}_3^{(m)}] = \delta \vec{r} + d_m \delta \vec{\psi} \times \vec{u}_3^{(m)} \quad (5.4.36)$$

(5.4.36) denklemini yerine konunca, (5.4.27) sayılı sanal iş denklemini şu şekli alır.

$$\begin{aligned} \delta W_{0m} &= \vec{F}_{0m} \cdot [\delta \vec{r} + d_m \delta \vec{\psi} \times \vec{u}_3^{(m)}] + \vec{M}_{0m} \cdot \delta \vec{\psi} \Rightarrow \\ \delta W_{0m} &= \vec{F}_{0m} \cdot \delta \vec{r} + \vec{F}_{0m} \cdot [d_m \delta \vec{\psi} \times \vec{u}_3^{(m)}] + \vec{M}_{0m} \cdot \delta \vec{\psi} \end{aligned} \quad (5.4.37)$$

Öte yandan, \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} gibi üç vektör arasında aşağıdaki ilişkinin olduğu gösterilebilir.

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{v} \cdot (\vec{w} \times \vec{u}) = (\vec{w} \times \vec{u}) \cdot \vec{v} \quad (5.4.38)$$

(5.4.38) denklemini sayesinde, (5.4.37) denklemini şöyle de yazılabilir.

$$\begin{aligned} \delta W_{0m} &= \vec{F}_{0m} \cdot \delta \vec{r} + [d_m \vec{u}_3^{(m)} \times \vec{F}_{0m}] \cdot \delta \vec{\psi} + \vec{M}_{0m} \cdot \delta \vec{\psi} \Rightarrow \\ \delta W_{0m} &= \vec{F}_{0m} \cdot \delta \vec{r} + \vec{M}_{0m}^* \cdot \delta \vec{\psi} \end{aligned} \quad (5.4.39)$$

(5.4.39) denklemindeki \vec{M}_{0m}^* momenti şöyle tanımlanmıştır.

$$\vec{M}_{0m}^* = \vec{M}_{0m} + d_m \vec{u}_3^{(m)} \times \vec{F}_{0m} \quad (5.4.40)$$

(5.4.40) denkleminin $\mathcal{F}_0(O)$ eksen takımındaki matris karşılığı şöyle yazılabilir.

$$\vec{M}_{0m}^* = \vec{M}_{0m} + d_m \hat{C} \tilde{u}_3 \hat{C}^t \vec{F}_{0m} \quad (5.4.41)$$

Dikkat edilirse, $\{\vec{F}_{0m}, \vec{M}_{0m}^*\}$ çifti, $\{\vec{F}_{0m}, \vec{M}_{0m}\}$ çiftinin, aynı etkiyi yaratmak üzere, uç noktasından (P noktasından) bilek noktasına (R noktasına) kaydırılmış eşdeğerlisidir.

$\{\vec{F}_{0m}, \vec{M}_{0m}\}$ çifti yerine $\{\vec{F}_{0m}, \vec{M}_{0m}^*\}$ çifti kullanılınca, (5.4.33) ve (5.4.35) denklemleri aşağıdaki şekilleri alırlar.

$$\bar{D} = \hat{J}_R^t \bar{\mathcal{F}}_{0m}^* \quad (5.4.42)$$

$$\bar{M} \ddot{\vec{q}} = \bar{Q} + \hat{J}_R^t \bar{\mathcal{F}}_{0m}^* - (\hat{F} \ddot{\vec{q}} + \bar{C} + \bar{G}) \quad (5.4.43)$$

(5.4.42) ve (5.4.43) denklemlerindeki $\bar{\mathcal{F}}_{0m}^*$ dikeysıra matrisi, "kaydırılmış ve büyütülmüş görev kuvveti" olarak şöyle tanımlanmıştır.

$$\bar{\mathcal{F}}_{0m}^* = \begin{bmatrix} \vec{F}_{0m} \\ \vec{M}_{0m}^* \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^6 \quad (5.4.44)$$

5.4.3. Manipülatörün Sanki-Statik Dengesi

Hassas konumlama ve/veya ağır yük taşıma gerektiren bazı görevlerde, manipülatörün oldukça düşük hız ve ivmelerle hareket etmesi istenebilir. Böyle bir görev sırasında, manipülatörün sanki statik dengede olduğu varsayılabilir. Bu varsayıma göre, (5.4.35) ve (5.4.43) denklemleri, aşağıdaki denklemlere indirgenir.

$$\bar{Q} + \hat{J}_P^t \bar{F}_{0m} - \bar{G} = \bar{0} \quad (5.4.45)$$

$$\bar{Q} + \hat{J}_R^t \bar{F}_{0m}^* - \bar{G} = \bar{0} \quad (5.4.46)$$

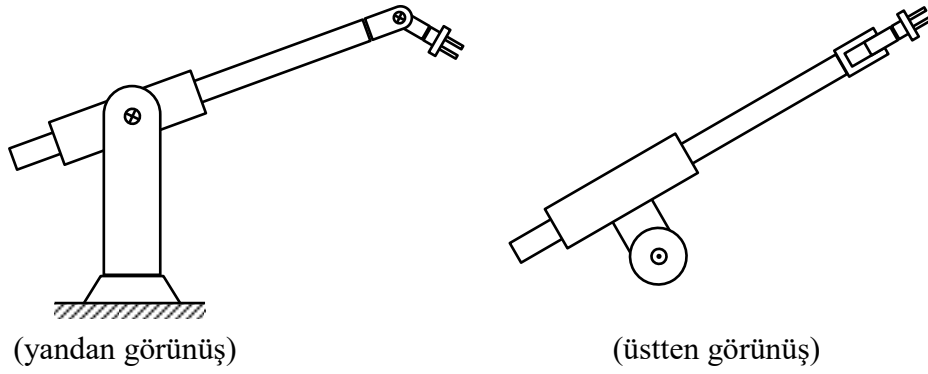
(5.4.45) ve (5.4.46) denklemleri de, manipülâtörün sanki-statik dengede kalabilmesini sağlayan eyletim kuvvet ve/veya momentlerini içeren \bar{Q} dikeysıra matrisini şöyle verir.

$$\bar{Q} = \bar{G} - \hat{J}_P^t \bar{F}_{0m} = \bar{G} - \hat{J}_R^t \bar{F}_{0m}^* \quad (5.4.47)$$

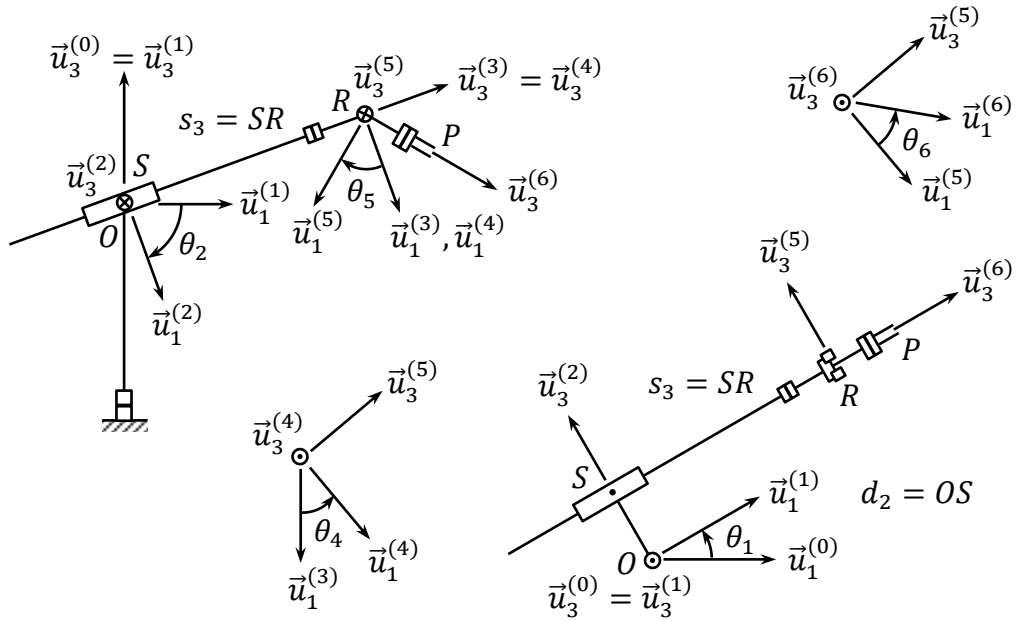
5.5. Örnek: Stanford Manipülâtörü

5.5.1. Manipülâtörün Kinematik Betimlenmesi

Stanford manipülâtörünün yandan ve üstten görünüşleri, Şekil 5.5'te gösterilmiştir. Şekilde de görüldüğü gibi, bu manipülâtör, beş döner eklem (R) ve bir kayar eklem (P) içerir. Bu eklemler, RRPRRR sıralamasına göre düzenlenmişlerdir. Stanford manipülâtörüne özgü geometrik ayrıntılar ise, Şekil 5.6'da, çizgi diyagramları eşliğinde gösterilmiştir.



Şekil 5.5 Stanford Manipülâtörü



Şekil 5.6 Stanford Manipülâtörüne Özgü Geometrik Ayrıntılar

Stanford manipülatörüne ait eklem değişkenleri, sabit parametreler ve özel noktalar aşağıda belirtilmiştir.

Eklem Değişkenleri: $\theta_1, \theta_2, s_3 = SR, \theta_4, \theta_5, \theta_6$

Sabit Parametreler: $s_2 = d_2 = OS, s_6 = d_6 = RP, \theta_3 = \delta_3 = 0;$

$$\beta_1 = 0, \beta_2 = -\frac{\pi}{2}, \beta_3 = \frac{\pi}{2}, \beta_4 = 0, \beta_5 = -\frac{\pi}{2}, \beta_6 = \frac{\pi}{2}$$

Özel Noktalar: O : zemin orijini, S : omuz noktası, R : bilek noktası, P : uç noktası

5.5.2. İşlem Aygıtının Zemine Göre Duruşu

a) İşlem Aygıtının Yönelimi

İşlem aygıtının $\mathcal{F}_0(O)$ eksen takımına göre yönelimini gösteren $\hat{C} = \hat{C}^{(0,6)}$ matrisine, aşağıdaki yenilemeli denklem silsilesiyle ulaşılabılır.

$$\hat{C}^{(0,k)} = \hat{\Psi}_k = \hat{\Psi}_{k-1} \hat{\Phi}_k \quad (5.5.1)$$

$$\hat{\Phi}_k = \hat{C}^{(k-1,k)} = e^{\tilde{u}_1 \beta_k} e^{\tilde{u}_3 \theta_k} \quad (5.5.2)$$

$$\hat{\Psi}_1 = \hat{\Phi}_1 = e^{\tilde{u}_1 0} e^{\tilde{u}_3 \theta_1} = e^{\tilde{u}_3 \theta_1} \quad (5.5.3)$$

$$\hat{\Psi}_2 = \hat{\Psi}_1 \hat{\Phi}_2 = (e^{\tilde{u}_3 \theta_1}) (e^{-\tilde{u}_1 \pi/2} e^{\tilde{u}_3 \theta_2}) = e^{\tilde{u}_3 \theta_1} e^{\tilde{u}_2 \theta_2} e^{-\tilde{u}_1 \pi/2} \quad (5.5.4)$$

$$\hat{\Psi}_3 = \hat{\Psi}_2 \hat{\Phi}_3 = (e^{\tilde{u}_3 \theta_1} e^{\tilde{u}_2 \theta_2} e^{-\tilde{u}_1 \pi/2}) (e^{\tilde{u}_1 \pi/2} e^{\tilde{u}_3 \theta_3}) = e^{\tilde{u}_3 \theta_1} e^{\tilde{u}_2 \theta_2} \quad (5.5.5)$$

$$\hat{\Psi}_4 = \hat{\Psi}_3 \hat{\Phi}_4 = (e^{\tilde{u}_3 \theta_1} e^{\tilde{u}_2 \theta_2}) (e^{\tilde{u}_1 0} e^{\tilde{u}_3 \theta_4}) = e^{\tilde{u}_3 \theta_1} e^{\tilde{u}_2 \theta_2} e^{\tilde{u}_3 \theta_4} \quad (5.5.6)$$

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}_5 &= \hat{\Psi}_4 \hat{\Phi}_5 = (e^{\tilde{u}_3 \theta_1} e^{\tilde{u}_2 \theta_2} e^{\tilde{u}_3 \theta_4}) (e^{-\tilde{u}_1 \pi/2} e^{\tilde{u}_3 \theta_5}) \\ &= e^{\tilde{u}_3 \theta_1} e^{\tilde{u}_2 \theta_2} e^{\tilde{u}_3 \theta_4} e^{\tilde{u}_2 \theta_5} e^{-\tilde{u}_1 \pi/2} \end{aligned} \quad (5.5.7)$$

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}_6 &= \hat{\Psi}_5 \hat{\Phi}_6 = (e^{\tilde{u}_3 \theta_1} e^{\tilde{u}_2 \theta_2} e^{\tilde{u}_3 \theta_4} e^{\tilde{u}_2 \theta_5} e^{-\tilde{u}_1 \pi/2}) (e^{\tilde{u}_1 \pi/2} e^{\tilde{u}_3 \theta_6}) \\ &= e^{\tilde{u}_3 \theta_1} e^{\tilde{u}_2 \theta_2} e^{\tilde{u}_3 \theta_4} e^{\tilde{u}_2 \theta_5} e^{\tilde{u}_3 \theta_6} \end{aligned} \quad (5.5.8)$$

$$\hat{C} = \hat{\Psi}_6 = e^{\tilde{u}_3 \theta_1} e^{\tilde{u}_2 \theta_2} e^{\tilde{u}_3 \theta_4} e^{\tilde{u}_2 \theta_5} e^{\tilde{u}_3 \theta_6} \quad (5.5.9)$$

b) Bilek Noktasının Konumu

Bilek noktasının zemine göre konumu, şu vektörle temsil edilir.

$$\vec{r} = \vec{r}_{OR} = \vec{r}_{OS} + \vec{r}_{SR} = d_2 \vec{u}_3^{(2)} + s_3 \vec{u}_3^{(3)} \quad (5.5.10)$$

Bu vektörün $\mathcal{F}_0(O)$ eksen takımındaki matris gösterimi, şöyle ifade edilebilir.

$$\vec{r} = \vec{r}^{(0)} = d_2 \vec{u}_3^{(2/0)} + s_3 \vec{u}_3^{(3/0)} = d_2 \hat{C}^{(0,2)} \vec{u}_3^{(2/2)} + s_3 \hat{C}^{(0,3)} \vec{u}_3^{(3/3)} \Rightarrow$$

$$\vec{r} = d_2 \hat{\Psi}_2 \vec{u}_3 + s_3 \hat{\Psi}_3 \vec{u}_3 \Rightarrow$$

$$\vec{r} = d_2 e^{\tilde{u}_3 \theta_1} e^{\tilde{u}_2 \theta_2} e^{-\tilde{u}_1 \pi/2} \vec{u}_3 + s_3 e^{\tilde{u}_3 \theta_1} e^{\tilde{u}_2 \theta_2} \vec{u}_3 \Rightarrow$$

$$\vec{r} = e^{\tilde{u}_3 \theta_1} (d_2 \vec{u}_2 + s_3 e^{\tilde{u}_2 \theta_2} \vec{u}_3) \Rightarrow$$

$$\vec{r} = e^{\tilde{u}_3 \theta_1} (\vec{u}_1 s_3 s \theta_2 + \vec{u}_2 d_2 + \vec{u}_3 s_3 c \theta_2) = e^{\tilde{u}_3 \theta_1} \vec{r}' \quad (5.5.11)$$

(5.5.11) denklemindeki \bar{r}' dikeysıra matrisi, \bar{r} vektörünün $\mathcal{F}_1(O)$ eksen takımındaki matris gösterimidir. Bir başka deyişle,

$$\bar{r}' = \bar{r}^{(1)} = \bar{u}_1 r'_1 + \bar{u}_2 r'_2 + \bar{u}_3 r'_3 = \bar{u}_1 s_3 s \theta_2 + \bar{u}_2 d_2 + \bar{u}_3 s_3 c \theta_2 \quad (5.5.12)$$

Eğer istenirse, (5.5.11) denklemi, daha da açılarak R noktasının $\mathcal{F}_0(O)$ eksen takımındaki koordinatlarını verecek biçimde şöyle de yazılabilir.

$$\begin{aligned} \bar{r} &= \bar{u}_1 r_1 + \bar{u}_2 r_2 + \bar{u}_3 r_3 \\ &= \bar{u}_1 (s_3 c \theta_1 s \theta_2 - d_2 s \theta_1) + \bar{u}_2 (s_3 s \theta_1 s \theta_2 + d_2 c \theta_1) + \bar{u}_3 (s_3 c \theta_2) \end{aligned} \quad (5.5.13)$$

c) Uç Noktasının Konumu

Uç noktasının $\mathcal{F}_0(O)$ eksen takımına göre konumunu ifade etmek üzere, şu denklemler yazılabilir.

$$\bar{p} = \bar{r} + d_6 \bar{u}_3^{(6)} \quad (5.5.14)$$

$$\bar{p} = \bar{p}^{(0)} = \bar{r}^{(0)} + d_6 \bar{u}_3^{(6/0)} = \bar{r}^{(0)} + d_6 \hat{C}^{(0,6)} \bar{u}_3^{(6/6)} \Rightarrow$$

$$\bar{p} = \bar{r} + d_6 \hat{C} \bar{u}_3 \quad (5.5.15)$$

5.5.3. İşlem Aygıtının Zemine Göre Hızı

a) İşlem Aygıtının Açısal Hızı

İşlem aygıtının $\mathcal{F}_0(O)$ eksen takımına göre açısal hızı, (5.4.23) denklemi kullanılarak şöyle ifade edilebilir.

$$\bar{\omega} = \sum_{k=1}^m \bar{\Omega}_k \dot{q}_k \quad (5.5.16)$$

(5.5.16) denklemindeki açısal hız etki katsayıları, $k \in \{1, 2, \dots, 6\}$ için, antisimetrik matris biçimleriyle şöyle tanımlanmıştır.

$$\bar{\Omega}_k = (\partial \hat{C} / \partial q_k) \hat{C}^t \quad (5.5.17)$$

(5.5.9) ve (5.5.17) denklemleri kullanılarak gösterilebilir ki,

$$\left. \begin{aligned} \bar{\Omega}_1 &= \bar{u}_3, \quad \bar{\Omega}_2 = e^{\tilde{u}_3 \theta_1} \bar{u}_2, \quad \bar{\Omega}_3 = \bar{0}, \quad \bar{\Omega}_4 = e^{\tilde{u}_3 \theta_1} e^{\tilde{u}_2 \theta_2} \bar{u}_3 \\ \bar{\Omega}_5 &= e^{\tilde{u}_3 \theta_1} e^{\tilde{u}_2 \theta_2} e^{\tilde{u}_3 \theta_4} \bar{u}_2, \quad \bar{\Omega}_6 = e^{\tilde{u}_3 \theta_1} e^{\tilde{u}_2 \theta_2} e^{\tilde{u}_3 \theta_4} e^{\tilde{u}_2 \theta_5} \bar{u}_3 \end{aligned} \right\} \quad (5.5.18)$$

(5.5.18) denklem grubu sayesinde, $\bar{\omega}$ şöyle elde edilir.

$$\begin{aligned} \bar{\omega} &= \dot{\theta}_1 \bar{u}_3 + \dot{\theta}_2 e^{\tilde{u}_3 \theta_1} \bar{u}_2 + \dot{\theta}_4 e^{\tilde{u}_3 \theta_1} e^{\tilde{u}_2 \theta_2} \bar{u}_3 \\ &+ \dot{\theta}_5 e^{\tilde{u}_3 \theta_1} e^{\tilde{u}_2 \theta_2} e^{\tilde{u}_3 \theta_4} \bar{u}_2 + \dot{\theta}_6 e^{\tilde{u}_3 \theta_1} e^{\tilde{u}_2 \theta_2} e^{\tilde{u}_3 \theta_4} e^{\tilde{u}_2 \theta_5} \bar{u}_3 \end{aligned} \quad (5.5.19)$$

b) Bilek Noktasının Hızı

Bilek noktasının $\mathcal{F}_0(O)$ eksen takımına göre hızı, (5.4.22) denklemi kullanılarak şöyle ifade edilebilir.

$$\bar{v}_R = \sum_{k=1}^m \bar{V}_{Rk} \dot{q}_k \quad (5.5.20)$$

(5.5.20) denklemindeki bilek noktasına ait hız etki katsayıları, $k \in \{1, 2, \dots, 6\}$ için şöyle tanımlanmıştır.

$$\bar{V}_{Rk} = \partial \bar{r} / \partial q_k \quad (5.5.21)$$

(5.5.11) ve (5.5.21) denklemleri kullanılarak gösterilebilir ki,

$$\bar{V}_{R1} = e^{\tilde{u}_3 \theta_1} \tilde{u}_3 (\bar{u}_1 s_3 s \theta_2 + \bar{u}_2 d_2 + \bar{u}_3 s_3 c \theta_2) = e^{\tilde{u}_3 \theta_1} (\bar{u}_2 s_3 s \theta_2 - \bar{u}_1 d_2) \quad (5.5.22)$$

$$\bar{V}_{R2} = s_3 e^{\tilde{u}_3 \theta_1} (\bar{u}_1 c \theta_2 - \bar{u}_3 s \theta_2) \quad (5.5.23)$$

$$\bar{V}_{R3} = e^{\tilde{u}_3 \theta_1} (\bar{u}_1 s \theta_2 + \bar{u}_3 c \theta_2) \quad (5.5.24)$$

$$\bar{V}_{R4} = \bar{V}_{R5} = \bar{V}_{R6} = \bar{0} \quad (5.5.25)$$

(5.5.22) – (5.5.25) denklemleri sayesinde, \bar{v}_R şöyle elde edilir.

$$\begin{aligned} \bar{v}_R = e^{\tilde{u}_3 \theta_1} [& \dot{\theta}_1 (\bar{u}_2 s_3 s \theta_2 - \bar{u}_1 d_2) + s_3 \dot{\theta}_2 (\bar{u}_1 c \theta_2 - \bar{u}_3 s \theta_2) \\ & + \dot{s}_3 (\bar{u}_1 s \theta_2 + \bar{u}_3 c \theta_2)] \end{aligned} \quad (5.5.26)$$

b) Uç Noktasının Hızı

Bilek noktasının hızı ile işlem aygıtının açısal hızı elde edildikten sonra, uç noktasının hızı da şöyle elde edilir.

$$\bar{v}_P = \bar{v}_R + d_6 \tilde{\omega} \hat{C} \bar{u}_3 \quad (5.5.27)$$

5.5.4. Manipülâtörün Jacobi Matrisleri

a) Bilek Noktası Jacobi Matrisi

Bir önceki alt kısımda ifade edilen hız etki katsayıları kullanılarak bilek noktasına ait Jacobi matrisi şöyle oluşturulur.

$$\hat{J}_R = \begin{bmatrix} \bar{V}_{R1} & \bar{V}_{R2} & \bar{V}_{R3} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{\Omega}_1 & \bar{\Omega}_2 & \bar{0} & \bar{\Omega}_4 & \bar{\Omega}_5 & \bar{\Omega}_6 \end{bmatrix} \quad (5.5.28)$$

a) Uç Noktası Jacobi Matrisi

(5.5.27) denkleminde yola çıkarak uç noktasına ait hız etki katsayıları, aşağıda açıklanan biçimde elde edilir.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m \bar{V}_{Pk} \dot{q}_k &= \sum_{k=1}^m \bar{V}_{Rk} \dot{q}_k + d_6 (\sum_{k=1}^m \bar{\Omega}_k \dot{q}_k) \hat{C} \bar{u}_3 \Rightarrow \\ \bar{V}_{Pk} &= \bar{V}_{Rk} + d_6 \bar{\Omega}_k \hat{C} \bar{u}_3 \\ k &= 1, 2, \dots, 6 \end{aligned} \quad (5.5.29)$$

Böylece, \hat{J}_P matrisi de şöyle oluşturulur.

$$\hat{J}_P = \begin{bmatrix} \bar{V}_{P1} & \bar{V}_{P2} & \bar{V}_{P3} & \bar{V}_{P4} & \bar{V}_{P5} & \bar{0} \\ \bar{\Omega}_1 & \bar{\Omega}_2 & \bar{0} & \bar{\Omega}_4 & \bar{\Omega}_5 & \bar{\Omega}_6 \end{bmatrix} \quad (5.5.30)$$

(5.5.30) denkleminde $\bar{V}_{P6} = \bar{0}$ olduğu aşağıda gösterilmiştir.

$$\begin{aligned}\bar{V}_{P6} &= \bar{V}_{R6} + d_6 \bar{\Omega}_6 \hat{C} \bar{u}_3 = d_6 \bar{\Omega}_6 \hat{C} \bar{u}_3 \Rightarrow \\ \bar{V}_{P6} &= d_6 (e^{\tilde{u}_3 \theta_1} e^{\tilde{u}_2 \theta_2} e^{\tilde{u}_3 \theta_4} e^{\tilde{u}_2 \theta_5} \tilde{u}_3 e^{-\tilde{u}_2 \theta_5} e^{-\tilde{u}_3 \theta_4} e^{-\tilde{u}_2 \theta_2} e^{-\tilde{u}_3 \theta_1}) \\ &\quad \cdot (e^{\tilde{u}_3 \theta_1} e^{\tilde{u}_2 \theta_2} e^{\tilde{u}_3 \theta_4} e^{\tilde{u}_2 \theta_5} e^{\tilde{u}_3 \theta_6}) \bar{u}_3 \Rightarrow \\ \bar{V}_{P6} &= d_6 e^{\tilde{u}_3 \theta_1} e^{\tilde{u}_2 \theta_2} e^{\tilde{u}_3 \theta_4} e^{\tilde{u}_2 \theta_5} \tilde{u}_3 \bar{u}_3 ; \tilde{u}_3 \bar{u}_3 = \bar{0} \Rightarrow \\ \bar{V}_{P6} &= \bar{0}\end{aligned}\tag{5.5.31}$$

5.5.5. Manipülâtörün Sanki-Statik Denge Durumunda Kullanımı

Buradaki incelemede, manipülâtörün icra ettiği bir iş nedeniyle uç noktasına zamanın işlevi olarak bilinen bir $\{\vec{F}_{06}, \vec{M}_{06}\}$ kuvvet-moment çifti etkimektedir. Bu kuvvet-moment çifti, eşdeğerli olarak bilek noktasına $\{\vec{F}_{06}^*, \vec{M}_{06}^*\}$ çifti biçiminde kaydırıldığında, ortaya çıkan \vec{M}_{06}^* momenti, şu denkleme göre belirir.

$$\vec{M}_{06}^* = \vec{M}_{06} + d_6 \vec{u}_3^{(6)} \times \vec{F}_{06} = \vec{M}_{06} + d_6 \vec{u}_a \times \vec{F}_{06}\tag{5.5.32}$$

(5.5.32) vektör denkleminin \mathcal{F}_0 eksen takımındaki matris karşılığı, şöyle yazılabilir.

$$\vec{M}_{06}^* = \vec{M}_{06} + d_6 \tilde{u}_a \bar{F}_{06} = \vec{M}_{06} + d_6 \hat{C} \tilde{u}_3 \hat{C}^t \bar{F}_{06}\tag{5.5.33}$$

(5.5.33) denkleminde, $\vec{u}_a = \vec{u}_a^{(0)} = \hat{C} \tilde{u}_3$, \vec{u}_a yaklaşım vektörünün \mathcal{F}_0 eksen takımındaki matris gösterimidir.

Manipülâtörün son üç uzvunun kütlelerinin diğerlerine göre ihmal edilebilir düzeyde olduğu varsayılabilir. Dolayısıyla, potansiyel enerji işlevi şöyle ifade edilebilir.

$$U = m_3 g (s_3 - c_3) c \theta_2\tag{5.5.34}$$

(5.5.34) denkleminde, $c_3 = RC_3$ uzunluğu, üçüncü uzvun kütle merkezinin bilek noktasına göre konumunu göstermektedir. Aynı denklemden \bar{G} dikeysıra matrisinin elemanları, $G_k = \partial U / \partial q_k$ eşitliğine göre, şöyle elde edilir.

$$G_1 = G_4 = G_5 = G_6 = 0\tag{5.5.35}$$

$$G_2 = -m_3 g (s_3 - c_3) s \theta_2\tag{5.5.36}$$

$$G_3 = m_3 g c \theta_2\tag{5.5.37}$$

Bunun üzerine, (5.4.47) denkleminde göre, manipülâtörü sanki-statik dengede tutmak için gereken \bar{Q} dikeysıra matrisi, şöyle belirlenir.

$$\bar{Q} = \bar{G} - \hat{J}_R^t \bar{F}_{0m}^*\tag{5.5.38}$$

Özel bir durum olarak, manipülâtörün aşağıda belirtilen duruşunda statik dengede tutulması istenmektedir.

$$\theta_1 = 0, \theta_2 = 45^\circ, s_3 = 2c_3, \theta_4 = 0, \theta_5 = 0, \theta_6 = 0\tag{5.5.39}$$

Yukarıda belirtilen özel durumda, \hat{C} ve \bar{u}_a matrislerinin ifadeleri şöyle olur.

$$\hat{C} = e^{\bar{u}_2 \pi/4} \quad (5.5.40)$$

$$\bar{u}_a = \hat{C} \bar{u}_3 = 0.707(\bar{u}_1 + \bar{u}_3) \quad (5.5.41)$$

(5.5.41) denklemine göre, (5.5.33) denklemi şu şekli alır.

$$\bar{M}_{06}^* = \bar{M}_{06} + 0.707 d_6 (\bar{u}_1 + \bar{u}_3) \bar{F}_{06} \quad (5.5.42)$$

(5.5.42) denkleminde de \bar{M}_{06}^* momentinin \mathcal{F}_0 'daki bileşenleri şöyle elde edilir.

$$M_{061}^* = M_{061} - 0.707 d_6 F_{062} \quad (5.5.43)$$

$$M_{062}^* = M_{062} + 0.707 d_6 (F_{061} - F_{063}) \quad (5.5.44)$$

$$M_{063}^* = M_{063} + 0.707 d_6 F_{062} \quad (5.5.45)$$

Bu arada, \bar{G} dikeysıra matrisinin sıfır olmayan elemanları, şöyle ifade edilir.

$$G_2 = -0.707 c_3 m_3 g \quad (5.5.46)$$

$$G_3 = 0.707 m_3 g \quad (5.5.47)$$

(5.5.18) ile (5.5.22) – (5.5.25) denklemleri ise, hız etki katsayıları için şu sonuçları verir.

$$\bar{\Omega}_1 = \bar{u}_3 \quad (5.5.48)$$

$$\bar{\Omega}_2 = \bar{\Omega}_5 = \bar{u}_2 \quad (5.5.49)$$

$$\bar{\Omega}_3 = \bar{0} \quad (5.5.50)$$

$$\bar{\Omega}_4 = \bar{\Omega}_6 = 0.707(\bar{u}_1 + \bar{u}_3) \quad (5.5.51)$$

$$\bar{V}_{R1} = 1.414 c_3 \bar{u}_2 - d_2 \bar{u}_1 \quad (5.5.52)$$

$$\bar{V}_{R2} = 1.414 c_3 (\bar{u}_1 - \bar{u}_3) \quad (5.5.53)$$

$$\bar{V}_{R3} = 0.707(\bar{u}_1 + \bar{u}_3) \quad (5.5.54)$$

$$\bar{V}_{R4} = \bar{V}_{R5} = \bar{V}_{R6} = \bar{0} \quad (5.5.55)$$

Bu özel durumda uygulanması gereken eyletim kuvveti ve momentleri ise, (5.5.38) denklemi, $k = 1, 2, \dots, 6$ için, eleman bazında yazılarak şöyle ifade edilebilir.

$$Q_k = G_k - \bar{V}_{Rk}^t \bar{F}_{06} - \bar{\Omega}_k^t \bar{M}_{06}^* \quad (5.5.56)$$

(5.5.56) denklemi, her eklem için ayrı ayrı kullanılıncaya, eyletici kuvvet ve torkları aşağıdaki ifadelerle elde edilir.

$$Q_1 = T_1 = d_2 F_{061} - 1.414 c_3 F_{062} - M_{063}^* \quad (5.5.57)$$

$$Q_2 = T_2 = -0.707 c_3 m_3 g - 1.414 c_3 (F_{061} - F_{063}) - M_{062}^* \quad (5.5.58)$$

$$Q_3 = F_3 = 0.707 m_3 g - 0.707 (F_{061} + F_{063}) \quad (5.5.59)$$

$$Q_4 = T_4 = -0.707 (M_{061}^* + M_{063}^*) \quad (5.5.60)$$

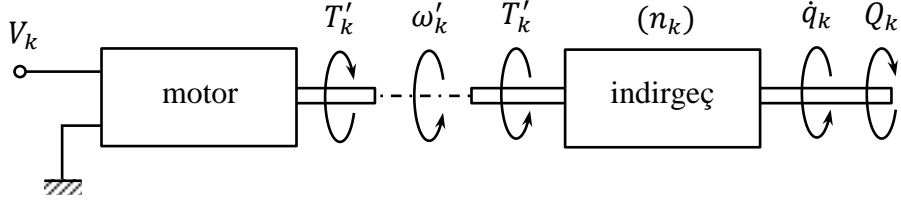
$$Q_5 = T_5 = -M_{062}^* \quad (5.5.61)$$

$$Q_6 = T_6 = -0.707 (M_{061}^* + M_{063}^*) \quad (5.5.62)$$

BÖLÜM 6

MANİPÜLATÖRLERİN SERBEST KONUM KONTROLU

6.1. Bağımsız Eklem Kontrolcuları Yöntemi



Şekil 6.1 Elektrik Motoru ve İndirgeçli Eyletim Yapısı

Bir manipülâtörün eyletimli eklemlerinde kullanılan eyleticiler, genellikle, yüksek devirli fakat düşük torklu elektrik motorları olarak seçilirler. Dolayısıyla, böyle bir motorun ait olduğu eklem aracılığıyla manipülâtörü eyletebilmesi için hız indirgemesi yüksek olan bir indirgeçle birlikte kullanılması gerekir. Böyle bir eyletim yapısı, J_k eklemi için Şekil 6.1'de gösterilmiştir. Şekildeki J_k eklemi, bir döner eklem gibi gözükmemektedir. Ancak, indirgeçle manipülâtör uzvu arasında vidasal bir dönüştürgeç barındıran bir kayar eklem de olabilir. Şekilde kullanılan semboller aşağıda açıklanmıştır.

Q_k : İndirgecin manipülâtöre uyguladığı eyletim torku (T_k) ya da kuvveti (F_k)

T'_k : Motorun indirgece uyguladığı eyletim torku

q_k : Eklem değişkeni (θ_k ya da s_k)

ω'_k : Motorun açısal hızı

V_k : Motora uygulanan eyletim voltajı

$n_k = \dot{q}_k/\omega'_k$: Hız indirgeme oranı ($n_k = 1/N_k$)

Not: Hız indirgeme oranı, genellikle, N_k birden büyük bir tamsayı olmak üzere, $1/N_k$ biçiminde ifade edilir. N_k ise, "tork yükseltme oranı" olarak tanımlanır. Yani, $N_k = Q_k/T'_k$.

Eyletim sistemine ait diğer parametreler şunlardır.

I_k : Motor rotorunun ve indirgecin tümleşik atalet momenti

B_k : Motorun indirgeçteki sürtünmeyle tümleşmiş *geri elektromotif etki* katsayısı

A_k : Motorun *tork/voltaj* katsayısı

Yukarıda açıklanan parametreler ve değişkenler kullanılarak aşağıdaki dinamik ve kinematik ilişki denklemleri yazılabilir.

$$I_k \dot{\omega}'_k + B_k \omega'_k = A_k V_k - T'_k \quad (6.1.1)$$

$$\dot{q}_k = n_k \omega'_k \quad (6.1.2)$$

$$Q_k = T'_k/n_k \quad (6.1.3)$$

(6.1.2) ve (6.1.3) denklemleri kullanılarak ω'_k ve T'_k değişkenleri \dot{q}_k ve Q_k değişkenleri cinsinden yerlerine konunca, (6.1.1) denklemi şu şekli alır.

$$I_k \ddot{q}_k + B_k \dot{q}_k = n_k A_k V_k - D_k \quad (6.1.4)$$

(6.1.4) denkleminde saptırıcı girdi olarak görünen D_k torku şöyle tanımlanmıştır.

$$D_k = n_k^2 Q_k \quad (6.1.5)$$

(6.1.4) ve (6.1.5) denklemlerine göre, özellikle n_k oranı oldukça küçük olan bir indirgeç kullanılıyorsa, manipülatörün eyletim sistemi üzerindeki etkisini gösteren $D_k = n_k^2 Q_k$ torku çok daha küçük olur. Örneğin $n_k = 1/50$ ise, $D_k = Q_k/2500$ olur. Diğer bir deyişle, manipülatörün kendisini eyleten bu sistem ve bunun benzeri diğer eklem eyletim sistemleri üzerindeki etkisi, *küçük bir saptırıcı girdi* imiş gibi görünür. İşte bu nedenle, J_k eklemine eyleticisi, manipülatörün diğer eklemlerindeki dinamik davranışlarla ilgilenmeksizin ve onlardan bağımsız olarak, yalnızca q_k değişkenini, bu değişken için istenen q_k^* referans değerine olabildiğince yakın tutabilmek için V_k voltajı aracılığıyla kontrol edilebilir.

Eklemle ilgili referans değerleri ($q_1^*, q_2^*, \dots, q_m^*$) ise, manipülatörün yapacağı işe göre, önce işlem uzayında yapılan ve ardından ters kinematik çözümle eklem uzayına aktarılan *hareket planlaması* sonucunda, zamanın işlevleri olarak oluşturulurlar.

Yukarıda sözü edilen bağımsız kontrol yaklaşımı, çeşitli kontrol kurallarından biri kullanılarak gerçekleştirilebilir. Bununla birlikte, bu amaçla kullanılan en yaygın kontrol kuralı, PID (oransal-tümlevsel-türevsel) kontrol kuralıdır. Bu kuralın uygulanışı aşağıda açıklanmıştır.

PID kontrol kuralı uyarınca, V_k voltajı, kontrol bilgisayarına bağlı uygun bir elektronik işlemci aracılığıyla, en genel biçimiyle, şu şekilde oluşturulur.

$$V_k = K_{pk} \varepsilon_k + K_{dk} \dot{\varepsilon}_k + K_{ik} \int_0^t \varepsilon_k d\tau + K_{vk} \dot{q}_k^* + K_{ak} \ddot{q}_k^* \quad (6.1.6)$$

(6.1.6) denkleminde şu tanımlar kullanılmıştır.

$$\varepsilon_k = q_k^* - q'_k \approx q_k^* - q_k : \text{Konum hatası} \quad (6.1.7)$$

q'_k : q_k değişkeninin ölçülen değeri

K_{pk} : Oransal geribesleme katsayısı

K_{dk} : Türevsel geribesleme katsayısı

K_{ik} : Tümlevsel geribesleme katsayısı

K_{vk} : Hız ileribesleme katsayısı

K_{ak} : İvme ileribesleme katsayısı

(6.1.7) denkleminde, $q'_k \approx q_k$ olarak alınmıştır. Bunun nedeni, eklemlerdeki q'_k ölçümlerinin genellikle "enkoder" denen oldukça hassas (hassas olduğu kadar da ucuz ve kullanışlı) cihazlarla yapılmasıdır.

(6.1.6) denklemi, (6.1.4) denkleminde yerine konunca, aşağıdaki *kapalı döngü* hata denklemi elde edilir.

$$\begin{aligned} I_k \ddot{q}_k + B_k \dot{q}_k &= I_k (\ddot{q}_k^* - \ddot{\varepsilon}_k) + B_k (\dot{q}_k^* - \dot{\varepsilon}_k) \\ &= n_k A_k [K_{pk} \varepsilon_k + K_{dk} \dot{\varepsilon}_k + K_{ik} \int_0^t \varepsilon_k d\tau + K_{vk} \dot{q}_k^* + K_{ak} \ddot{q}_k^*] - D_k \Rightarrow \\ I_k \ddot{\varepsilon}_k + (B_k + n_k A_k K_{dk}) \dot{\varepsilon}_k + n_k A_k K_{pk} \varepsilon_k + n_k A_k K_{ik} \int_0^t \varepsilon_k d\tau &= D_k' \end{aligned} \quad (6.1.8)$$

(6.1.8) denklemindeki *etkin saptırıcı girdi* şöyle tanımlanmıştır.

$$D_k' = D_k + (B_k - n_k A_k K_{vk}) \dot{q}_k^* + (I_k - n_k A_k K_{ak}) \ddot{q}_k^* \quad (6.1.9)$$

(6.1.9) denkleminde göre, \ddot{q}_k^* ve \dot{q}_k^* referans değerlerinin ε_k üzerindeki etkilerini azaltmak üzere, K_{ak} ve K_{vk} ileribesleme katsayıları şöyle seçilebilir.

$$K_{ak} = I_k^* / (n_k A_k^*) \quad (6.1.10)$$

$$K_{vk} = B_k^* / (n_k A_k^*) \quad (6.1.11)$$

(6.1.10) ve (6.1.11) denklemlerindeki $\{I_k^*, B_k^*, A_k^*\}$ üçlüsü, $\{I_k, B_k, A_k\}$ üçlüsünün nominal ya da kestirilen değerleridir. Bu şekilde seçilen ileribesleme katsayıları kullanılıncaya, (6.1.9) denklemi, etkin saptırıcı girdiyi, parametrik belirsizliklerin etkisi azaltılmış olarak, şöyle verir.

$$D_k' = D_k + \left(\frac{B_k}{B_k^*} - \frac{A_k}{A_k^*} \right) B_k^* \dot{q}_k^* + \left(\frac{I_k}{I_k^*} - \frac{A_k}{A_k^*} \right) I_k^* \ddot{q}_k^* \quad (6.1.12)$$

Bu arada, (6.1.8) denklemi, taraf tarafa I_k ile bölünerek ve türevi alınarak şöyle yazılabilir.

$$\ddot{\varepsilon}_k + (\beta_k + \alpha_k K_{dk}) \dot{\varepsilon}_k + \alpha_k K_{pk} \varepsilon_k + \alpha_k K_{ik} \varepsilon_k = \delta_k \quad (6.1.13)$$

(6.1.13) denkleminde şu tanımlar kullanılmıştır.

$$\beta_k = B_k / I_k \quad (6.1.14)$$

$$\alpha_k = n_k A_k / I_k \quad (6.1.15)$$

$$\delta_k = D_k' / I_k \quad (6.1.16)$$

(6.1.13) denklemi, çıktısı ε_k , girdisi ise δ_k olan, üçüncü mertebeden doğrusal bir sistemi temsil etmektedir. Bu sistemin *karakteristik polinomu*, (6.1.13) denkleminin *Laplace dönüşümü* alınarak aşağıda görüldüğü gibi elde edilir.

$$P(s) = s^3 + (\beta_k + \alpha_k K_{dk}) s^2 + \alpha_k K_{pk} s + \alpha_k K_{ik} \quad (6.1.17)$$

Bu sistemin *asimptotik kararlı* olması, karakteristik polinomunun aşağıdaki polinoma eşitlenmesiyle sağlanabilir.

$$\begin{aligned} P(s) &= (s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(s + \eta\omega_n) \Rightarrow \\ P(s) &= s^3 + (2\zeta + \eta)\omega_n s^2 + (1 + 2\zeta\eta)\omega_n^2 s + \eta\omega_n^3 \end{aligned} \quad (6.1.18)$$

Asimptotik kararlılığı garantilemek üzere, (6.1.18) denklemindeki parametreler için uygun değerler aşağıdaki gibi seçilebilir.

$$\omega_n \geq \omega_n^* ; \omega_n^* : \text{yeterince büyük pozitif bir değer} \quad (6.1.19)$$

$$\sqrt{2}/2 \leq \zeta \leq 1 \quad (6.1.20)$$

$$\eta \geq 1 \quad (6.1.21)$$

Yukarıdaki seçimi sağlayan kontrol katsayıları, (6.1.17) ile (6.1.18) denklemleri karşılaştırılarak elde edilebilir. Tabii, bu karşılaştırma, ancak α_k ve β_k parametrelerinin nominal ya da kestirilen değerleri (α_k^* ve β_k^*) için yapılabilir. Bu karşılaştırma, kontrol katsayılarını şöyle verir.

$$K_{ik} = \eta\omega_n^3/\alpha_k^* \quad (6.1.22)$$

$$K_{pk} = (1 + 2\zeta\eta)\omega_n^2/\alpha_k^* \quad (6.1.23)$$

$$K_{dk} = [(2\zeta + \eta)\omega_n - \beta_k^*]/\alpha_k^* \quad (6.1.24)$$

Yeterince büyük seçilmesi istenen ω_n parametresi ise, sistemin *geçici davranış* evresinden sonraki *kalıcı hatayı* küçültmek üzere aşağıda anlatılan biçimde belirlenebilir.

Eğer $\dot{\delta}_k$ (etkin saptırıcı girdinin türevi), frekansı ω_n olan bir sinüsoide göre çok yavaş denilebilecek bir biçimde değişiyorsa, (6.1.13) ve (6.1.22) denklemlerine göre, yaklaşık olarak aşağıdaki kalıcı hataya neden olur.

$$\varepsilon_k = \dot{\delta}_k/(\alpha_k K_{ik}) = (\alpha_k^*/\alpha_k)\dot{\delta}_k/(\eta\omega_n^3) \quad (6.1.25)$$

Bu hatanın küçültülmesi, yeterince küçük seçilen bir maksimum hata parametresi (ε_k^*) için, ω_n parametresinin aşağıdaki koşulu sağlamasıyla gerçekleştirilebilir.

$$|\varepsilon_k|_{max} \leq (\alpha_k^*/\alpha_k)\varepsilon_k^* \quad (6.1.26)$$

Bu koşulu sağlamak üzere ω_n parametresi, aşağıdaki *alt sınır* koşuluna uyacak biçimde seçilmelidir.

$$\omega_n \geq \omega_n^* = [\dot{\delta}_k^*/(\eta\varepsilon_k^*)]^{1/3} \quad (6.1.27)$$

(6.1.27) denklemindeki $\dot{\delta}_k^*$ terimi, $\dot{\delta}_k$ değişkeninin bilinen ya da kestirilen maksimum değeri olarak şöyle tanımlanmıştır.

$$\dot{\delta}_k^* = |\dot{\delta}_k|_{max} \quad (6.1.28)$$

Öte yandan, çeşitli fiziksel nedenlerle, ω_n parametresinin belli bir değer üstüne çıkması da istenmez. Dolayısıyla, şöyle bir *üst sınır* koşulunun da sağlanması gerekir.

$$\omega_n \leq \omega_n^{**} \quad (6.1.28)$$

6.2. Hesaplanan Tork Yöntemiyle Kontrol

6.2.1. Yöntemin Kısa Tanıtımı ve Tercih Edilebileceği Durumlar

Bu kontrol yöntemi, indirgeçli eyletim sistemlerinde hız indirgemesinin yeterince yüksek olmadığı ya da *indirgeçsiz eyletim* (*dolaysız* ya da *doğrudan* eyletim) kullanıldığı durumlarda, eklemelerin bağımsız kontrolü yöntemi yerine tercih edilebilir. Bu gibi durumlarda, manipülatörün dinamik davranışının eyleticiler üzerindeki etkisi, küçük bir saptırıcı girdi olmanın ötesine geçer. Dolayısıyla, eyleticilere uygulanan kontrol girdilerinin de birbirleri üzerinde ihmal edilemeyecek etkileri oluşur. Bu nedenle, uygulanacak kontrol yönteminin, tatminkar olabilmesi için eklem eyleticilerinin birbirleri üstündeki etkilerini hesaba katması ve bunları olabildiğince giderebilmesi lazımdır. Bu kısımda göz önüne alınan yöntem, işte böyle bir kontrol yöntemidir.

Ne var ki, bu yöntem, adı üstünde, hesaplama yükü fazla olan bir yöntemdir. Yöntemin uygulanışı esnasında, an be an, eklem değişkenlerinin ve türevlerinin ölçülen değerlerine bağlı olarak hareket denklemindeki kütle matrisinin ve eklentisel terimlerin hesaplanması gerekmektedir. Dolayısıyla, bu yöntem, özellikle, bu paragrafın başında bahsedilen biçimde eyletilen bir manipülatör yüksek konumlama hassasiyeti gerektiren görevler için kullanılacaksa tercih edilebilir. Ayrıca, manipülatörün gereken hesaplamalara vakit bırakmayacak kadar aşırı hızlı hareket etmemesi de gerekir. Bu yöntemle ilgili ayrıntılar aşağıda açıklanmıştır.

6.2.2. Manipülatör ile Eyletim Sisteminin Bütünleştirilmesi

Zemine göre duruşu eyletimli eklem değişkenleriyle belirtilen bir manipülatörün hareket denklemini, Bölüm 4'te etraflıca açıklandığı gibi, şöyle yazılabilir.

$$\hat{M}\ddot{q} = \bar{Q} + \bar{Z} \quad (6.2.1)$$

(6.2.1) denklemini, her eklem için ($k = 1, 2, \dots, m$ olmak üzere) ayrı ayrı şöyle de yazılabilir.

$$\sum_{j=1}^m M_{kj}\ddot{q}_j = Q_k + Z_k \quad (6.2.2)$$

Öte yandan, önceki kısımdaki (6.1.4) ve (6.1.5) denklemlerinde olduğu gibi, eyletim sistemine ait hareket denklemini ise şöyle yazılabilir.

$$I_k\ddot{q}_k + B_k\dot{q}_k = n_k A_k V_k - n_k^2 Q_k \quad (6.2.3)$$

(6.2.3) denkleminin Q_k için çözümü şöyle ifade edilebilir.

$$Q_k = N_k A_k V_k - N_k^2 I_k \ddot{q}_k - N_k^2 B_k \dot{q}_k \quad (6.2.4)$$

(6.2.4) denklemindeki N_k simgesi, "tork yükseltme oranı" adıyla şöyle tanımlanmıştır.

$$N_k = 1/n_k \quad (6.2.5)$$

(6.2.2) ve (6.2.4) denklemleri şöyle birleştirilebilir.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m M_{kj}\ddot{q}_j &= N_k A_k V_k - N_k^2 I_k \ddot{q}_k - N_k^2 B_k \dot{q}_k + Z_k \Rightarrow \\ \sum_{j=1}^m (M_{kj} + N_k^2 I_k \delta_{kj})\ddot{q}_j &= N_k A_k V_k + (Z_k - N_k^2 B_k \dot{q}_k) \end{aligned} \quad (6.2.6)$$

Dikkat edilirse, (6.2.6) ve (6.2.2) denklemlerinin formatı aynıdır. Dolayısıyla, aşağıda yeniden yapılan *bütünleştirme* tanımlarıyla (6.2.2) denklemini, (6.2.6) denklemini temsil etmek üzere kullanılabilir.

$$M_{kj} + N_k^2 I_k \delta_{kj} = M'_{kj} \Rightarrow M_{kj} \quad (6.2.7)$$

$$Z_k - N_k^2 B_k \dot{q}_k = Z'_k \Rightarrow Z_k \quad (6.2.8)$$

$$N_k A_k V_k = (A_k/A_k^*) N_k A_k^* V_k \Rightarrow \eta_k Q_k \quad (6.2.9)$$

$$\eta_k = A_k/A_k^* \quad (6.2.10)$$

$$Q_k = N_k A_k^* V_k \quad (6.2.11)$$

Yukarıdaki tanımlar kullanılarak (6.2.2) ve (6.2.1) sayılı hareket denklemleri, bütünleşik sistem için aşağıdaki biçimlerde yazılabilir.

$$\sum_{j=1}^m M_{kj} \ddot{q}_j = \eta_k Q_k + Z_k \quad (6.2.12)$$

$$\hat{M} \ddot{\bar{q}} = \hat{H} \bar{Q} + \bar{Z} \quad (6.2.13)$$

(6.2.13) denklemindeki \hat{H} matrisi, belirsizlik içeren elemanlardan oluşan köşegensel bir matristir. Bu matris şöyle tanımlanmıştır.

$$\hat{H} = \text{diag}(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots, \eta_m) \quad (6.2.14)$$

6.2.3. Hesaplanan Tork Yönteminin Uygulanışı

(6.2.13) denklemi şöyle de yazılabilir.

$$\hat{E} \hat{M} \ddot{\bar{q}} = \bar{Q} + \hat{E} \bar{Z} \quad (6.2.15)$$

(6.2.15) denkleminde,

$$\hat{E} = \hat{H}^{-1} = \text{diag}(1/\eta_1, 1/\eta_2, \dots, 1/\eta_m) \quad (6.2.16)$$

Hesaplanan tork yöntemi uyarınca, sistemi istenen biçimde eyletmek üzere, \bar{Q} dikeysıra matrisi, aşağıdaki denkleme göre oluşturulur.

$$\bar{Q} = \hat{M}^* \bar{u} - \bar{Z}^* \quad (6.2.17)$$

(6.2.17) denklemindeki \bar{u} dikeysıra matrisi, *ivme komutu* olarak adlandırılır. Aynı denklemdeki \hat{M}^* ve \bar{Z}^* matrisleri, \hat{M} ve \bar{Z} matrislerinin nominal ya da kestirilen değerleridir. Ayrıca, tanımları gereği, \hat{E} ve \hat{H} matrislerinin nominal değerleri birim matristir. Yani,

$$\hat{E}^* = \hat{H}^* = \hat{I} \quad (6.2.18)$$

Hesaplanan tork yönteminde, \bar{u} ivme komutu, *geçici kontrol girdisi* olarak kullanılır. Hesaplanan tork yöntemi, aşağıda anlatılan hesaplama aşamalarından geçilerek uygulanır.

Birinci aşamada, uygun görülen bir kontrol kuralına göre, \bar{u} ivme komutunun değeri, şöyle hesaplanır.

$$\bar{u} = \bar{f}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, \bar{q}^*, \dot{\bar{q}}^*, \ddot{\bar{q}}^*, t) \quad (6.2.19)$$

(6.2.19) denkleminde, \bar{q} ve $\dot{\bar{q}}$, t anında ölçülen değerlerdir; \bar{q}^* , $\dot{\bar{q}}^*$, ve $\ddot{\bar{q}}^*$ ise, t anı için belirtilmiş olan referans değerleridir. Aynı denklemdeki \bar{f} işlevi, kullanılan kontrol kuralını karakterize eden bir işlevdir. Bu işlev, belirtilen argümanlardan bazılarının tümlevlerini de içerebilir.

İkinci aşamada, yine ölçülmüş olan \bar{q} ve $\dot{\bar{q}}$ değerleri ile parametrelerin ve görev kuvveti ile momentinin nominal ya da kestirilen değerleri kullanılarak $\hat{M}^* = \hat{M}^*(\bar{q})$ ve $\bar{Z}^* = \bar{Z}^*(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$ matrisleri hesaplanır. Daha sonra, bu matrisler kullanılarak (6.2.17) denkleminde göre, \bar{Q} dikeysıra matrisi (yani eyletim torkları ve kuvvetlerinden oluşan matris) hesaplanır.

Üçüncü aşamada ise, (6.2.11) denkleminde göre, eyleticilere uygulanması gereken eyletim voltajları, $k \in \{1, 2, 3, \dots, m\}$ için, şöyle hesaplanır.

$$V_k = Q_k / (N_k A_k^*) \quad (6.2.20)$$

6.2.4. İvme Komutunun Belirlenmesi

(6.2.17) denklemi, (6.2.15) denkleminde yerine konunca, aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\hat{E}\hat{M}\ddot{q} = \hat{M}^*\bar{u} - (\bar{Z}^* - \hat{E}\bar{Z}) \quad (6.2.21)$$

(6.2.21) denklemi, $\hat{E} = \hat{H}^{-1}$ olduğu hatırlanarak, şöyle de yazılabilir.

$$\begin{aligned} \ddot{q} &= (\hat{M}^{-1}\hat{H}\hat{M}^*)\bar{u} - \hat{M}^{-1}(\hat{H}\bar{Z}^* - \bar{Z}) \Rightarrow \\ \ddot{q} &= \hat{N}\bar{u} - \bar{\delta} \end{aligned} \quad (6.2.22)$$

(6.2.22) denkleminde şu tanımlar kullanılmıştır.

$$\hat{N} = \hat{M}^{-1}\hat{H}\hat{M}^* \quad (6.2.23)$$

$$\bar{\delta} = \hat{M}^{-1}(\hat{H}\bar{Z}^* - \bar{Z}) \quad (6.2.24)$$

Dikkat edilirse, \hat{N}^* ve $\bar{\delta}^*$ nominal değerler olmak üzere,

$$\hat{N} \approx \hat{N}^* = \hat{I} \quad (6.2.25)$$

$$\bar{\delta} \approx \bar{\delta}^* = \bar{0} \quad (6.2.26)$$

(6.2.22) denklemi, aşağıdaki hata denklemi biçiminde de yazılabilir.

$$\ddot{\varepsilon} = -\hat{N}\bar{u} + \ddot{q}^* + \bar{\delta} \quad (6.2.27)$$

(6.2.27) denklemindeki hata tanımı şöyledir.

$$\bar{\varepsilon} = \bar{q}^* - \bar{q} \quad (6.2.28)$$

a) Geri Adımlı Kontrol Kuralı

(6.2.27) denklemindeki ivme komutu (\bar{u}), çeşitli kontrol kurallarından birine göre oluşturulabilir. Burada, uygulanması oldukça kolay olan *geri adımlı kontrol kuralı* tercih edilmiştir. Bu kuralı uygulamak üzere, (6.2.27) denklemi, iki aşamalı olarak şöyle ayrıştırılır.

$$\dot{\bar{\varepsilon}} = \bar{\gamma} \quad (6.2.29)$$

$$\dot{\bar{\gamma}} = -\hat{N}\bar{u} + \dot{\bar{q}}^* + \bar{\delta} \quad (6.2.30)$$

Geri adımlı kontrol kuralı uygulanırken, asıl amaç (6.2.29) denklemiyle ifade edilen $\bar{\varepsilon}$ hatasını küçültmek olsa bile, önce bir adım geriye gidilerek (6.2.30) denklemi göz önüne alınır. Bu denklemdeki ivme komutu (\bar{u}), $\bar{\gamma}$ ile gösterilen *hata değişim hızının* aşağıda belirtilen hedef değere ulaşmasını sağlayacak biçimde belirlenir.

$$\bar{\gamma}^* = -\hat{K}_1\bar{\varepsilon} \quad (6.2.31)$$

Bu belirlemenin istenen sonucu olarak $\bar{\gamma}$, $\bar{\gamma}^*$ hedefine yaklaşırken, (6.2.29) denklemi de aşağıdaki denkleme yaklaşır.

$$\dot{\bar{\varepsilon}} = -\hat{K}_1\bar{\varepsilon} \quad (6.2.32)$$

(6.2.31) ve (6.2.32) denklemlerindeki \hat{K}_1 matrisi, normu yeterince büyük olan bir *pozitif belirli matris* olarak seçilir. Böylece, $\bar{\gamma} \rightarrow \bar{\gamma}^*$ yakınsaması gerçekleşirken $\bar{\varepsilon} \rightarrow \bar{0}$ yakınsaması da sağlanmış olur.

Yeniden (6.2.30) denkleminde dönülecek olursa, $\bar{\gamma} \rightarrow \bar{\gamma}^* = -\hat{K}_1 \bar{\varepsilon}$ yakınsamasını sağlamak amacıyla, ivme komutu şöyle oluşturulabilir.

$$\bar{u} = \hat{K}_2(\bar{\gamma} - \bar{\gamma}^*) + \ddot{q}^* \quad (6.2.33)$$

(6.2.33) denklemindeki \hat{K}_2 matrisi de, normu yeterince büyük olan bir *pozitif belirli matris* olarak seçilir. Bu denkleme göre oluşturulan ivme komutu, (6.2.30) denkleminde yerine konunca, aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\gamma}} &= -\hat{N}\hat{K}_2(\bar{\gamma} - \bar{\gamma}^*) - \hat{N}\ddot{q}^* + \ddot{q}^* + \bar{\delta} \Rightarrow \\ \dot{\bar{\gamma}} + \hat{N}\hat{K}_2\bar{\gamma} &= \hat{N}\hat{K}_2\bar{\gamma}^* + \bar{\delta}' \end{aligned} \quad (6.2.34)$$

(6.2.34) denkleminde aşağıdaki tanımlar kullanılmıştır.

$$\bar{\delta}' = \bar{\delta} - \hat{N}'\ddot{q}^* \quad (6.2.35)$$

$$\hat{N}' = \hat{N} - \hat{I} \quad (6.2.36)$$

Daha önce, (6.2.25) ve (6.2.26) denklemleriyle, $\hat{N} \approx \hat{I}$ ve $\bar{\delta} \approx \bar{0}$ olduğu belirtilmişti. Dolayısıyla, (6.2.35) ve (6.2.36) denklemlerine göre de, $\hat{N}' \approx \hat{0}$ ve $\bar{\delta}' \approx \bar{0}$ olur. Böylece, (6.2.34) denkleminde göre, normu yeterince büyük olan bir \hat{K}_2 matrisiyle $\bar{\gamma} \rightarrow \bar{\gamma}^*$ yakınsaması sağlanabilir. Bu yakınsamanın sağlanabileceği, aşağıdaki *asimptotik kararlılık analizi* ile gösterilmiştir.

(6.2.34) denkleminde betimlenen sistemin asimptotik kararlı olup olmadığını anlamak için aynı sistemin girdisiz (serbest) davranışlarını betimleyen aşağıdaki denklemi göz önüne almak gerekir.

$$\dot{\bar{\gamma}} + \hat{N}\hat{K}_2\bar{\gamma} = \bar{0} \quad (6.2.37)$$

Eğer (6.2.37) denkleminde temsil edilen girdisiz sistem asimptotik kararlı ise, (6.2.34) denkleminde betimlenen girdili sistem de, *doğrusallık* özelliği nedeniyle, asimptotik kararlı olur. Girdisiz sistemin asimptotik kararlılık analizi, aşağıdaki Lyapunov işlevi (V) aracılığıyla yapılabilir.

$$V = \bar{\gamma}^t \hat{K}_3 \bar{\gamma} \quad (6.2.38)$$

(6.2.38) denklemindeki \hat{K}_3 matrisi, *simetrik ve pozitif belirli* olarak seçilen *sabit* bir matristir. Lyapunov işlevinin türevi, (6.2.37) denkleminde yararlanılarak şöyle ifade edilir.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \bar{\gamma}^t \hat{K}_3 \dot{\bar{\gamma}} + \dot{\bar{\gamma}}^t \hat{K}_3 \bar{\gamma} \Rightarrow \\ \dot{V} &= -\bar{\gamma}^t \hat{K}_3 \hat{N} \hat{K}_2 \bar{\gamma} - \bar{\gamma}^t \hat{K}_2 \hat{N}^t \hat{K}_3 \bar{\gamma} = -\bar{\gamma}^t (\hat{K}_3 \hat{N} \hat{K}_2 + \hat{K}_2 \hat{N}^t \hat{K}_3) \bar{\gamma} \Rightarrow \\ \dot{V} &= -\bar{\gamma}^t \hat{K}_4 \bar{\gamma} \end{aligned} \quad (6.2.39)$$

(6.2.39) denklemindeki \hat{K}_4 matrisi şöyle tanımlanmıştır.

$$\hat{K}_4 = \hat{K}_3 \hat{N} \hat{K}_2 + \hat{K}_2 \hat{N}^t \hat{K}_3 \quad (6.2.40)$$

Bu arada, (6.2.23) ve (6.2.14) denklemlerinden hatırlanacağı üzere,

$$\hat{N} = \hat{M}^{-1} \hat{H} \hat{M}^* \quad (6.2.41)$$

$$\hat{H} = \text{diag}(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots, \eta_m) \quad (6.2.42)$$

Öte yandan, herhangi bir sistemin kütle matrisi (gerçek ya da kestirilen), her zaman simetrik ve pozitif belirlidir. Ayrıca, (6.2.42) denklemine göre, \hat{H} matrisi pozitif elemanlı bir köşegensel matristir; yani \hat{H} matrisi de pozitif belirlidir.

Yukarıdaki açıklamalar ile (6.2.41) ve (6.2.42) denklemlerine göre, (6.2.40) denklemiyle tanımlanan \hat{K}_4 matrisinin de simetrik ve pozitif belirli olduğu görülmektedir. Dolayısıyla, (6.2.38) ve (6.2.39) denklemlerine göre, V işlevi, aşağıdaki özelliklere sahip olur.

$$\bar{\gamma} \neq \bar{0} \Rightarrow V > 0, \dot{V} < 0$$

$$\bar{\gamma} = \bar{0} \Rightarrow V = 0, \dot{V} = 0$$

Bu özellikler nedeniyle de, (6.2.34) denklemiyle betimlenen sistem, asimptotik kararlı olur. Dolayısıyla, $\bar{\delta}' \approx \bar{0}$ olduğu için, normu yeterince büyük olacak biçimde seçilen bir \hat{K}_2 matrisiyle $\bar{\gamma} \rightarrow \bar{\gamma}^*$ yakınsaması ve bu sayede de $\bar{q} \rightarrow q^*$ yakınsaması sağlanabilir.

b) İvme İleribeslemeli PD Kontrol Kuralı

Yukarıda açıklanan ve asimptotik kararlılık sağladığı gösterilen *geri adımlı kontrol kuralı*, aslında, *ivme ileribeslemeli PD kontrol kuralı* ile eşniteliklidir. Bunu görmek için, (6.2.29), (6.2.31) ve (6.2.34) denklemleri birleştirilerek elde edilen aşağıdaki denklem kullanılabilir.

$$\ddot{\bar{\epsilon}} + \hat{N}\hat{K}_2\dot{\bar{\epsilon}} + \hat{N}\hat{K}_2\hat{K}_1\bar{\epsilon} = (\hat{I} - \hat{N})\ddot{q}^* + \bar{\delta} \quad (6.2.43)$$

Öte yandan, ivme ileribeslemeli PD kontrol kuralına göre, ivme komutu şöyle oluşturulur.

$$\bar{u} = \ddot{q}^* + \hat{K}_p\bar{\epsilon} + \hat{K}_d\dot{\bar{\epsilon}} \quad (6.2.44)$$

(6.2.44) denklemi yerine konunca, (6.2.27) denklemi şu şekli alır.

$$\ddot{\bar{\epsilon}} + \hat{N}\hat{K}_d\dot{\bar{\epsilon}} + \hat{N}\hat{K}_p\bar{\epsilon} = (\hat{I} - \hat{N})\ddot{q}^* + \bar{\delta} \quad (6.2.45)$$

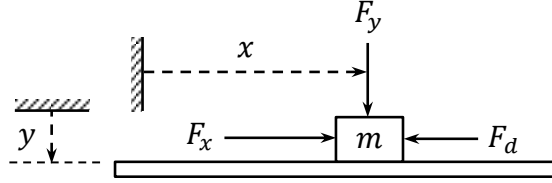
(6.2.43) ve (6.2.45) denklemleri karşılaştırılınca görülür ki, geri adımlı ve ivme ileribeslemeli PD kontrol kuralları gerçekten de eşniteliklidir. Bu eşniteliklilik, aşağıdaki katsayı matrisi eşleşmeleriyle daha da pekişerek eşdeğerlilik biçimine dönüşür.

$$\hat{K}_d = \hat{K}_2 \text{ ve } \hat{K}_p = \hat{K}_2\hat{K}_1 \quad (6.2.46)$$

BÖLÜM 7

MANİPÜLATÖRLERİN YÜZEY TEMASLI KONUM KONTROLU

7.1. Bir Yüzeyle Esnek Temaslı Konum Kontrolunun Esasları



Şekil 7.1 Yatay Bir Düzlem Üzerinde Konum Kontrolü

Şekil 7.1'de yatay bir düzlem ve bu düzlem üzerindeki konumu kontrol edilmek istenen bir cisim görülmektedir. Cismin düzlem üzerindeki konumu kontrol edilirken, düzlemin dikey yöndeki hareketliliğine rağmen, cismin düzlemle temasının da sürekli kalması istenmektedir. Bu iki istemi yerine getirmek amacıyla cisme F_x ile F_y kontrol kuvvetleri uygulanmaktadır. Robotik uygulamalarda, bu kuvvetler, bir manipülatör tarafından uygulanır. Cisme uygulanan diğer kuvvetler ise, yatay yöndeki F_d saptırıcı kuvveti, cismin kendi ağırlığı (mg) ve düzlemin uyguladığı N temas kuvvetidir. Buradaki incelemede, cisimle düzlem arasındaki olası sürtünme kuvvetinin de F_d kapsamına alındığı varsayılmıştır.

Cismin x ve y yönlerindeki hareket denklemleri, aşağıda yazıldığı gibidir.

$$m\ddot{x} = F_x - F_d \quad (7.1.1)$$

$$m\ddot{y} = F_y - N + mg \quad (7.1.2)$$

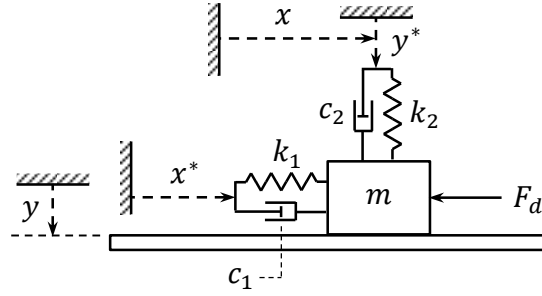
Burada incelenen sistemle ilgili temel varsayım şudur: Cismin yatay ve dikey yönlerdeki konumu ve hızı (x , \dot{x} , y , \dot{y}) ölçülebilmekte, fakat N temas kuvveti ölçülememektedir. Dolayısıyla, cisimle düzlem arasındaki temasın varlığını ve niteliğini gösteren N kuvveti, y ve \dot{y} ölçümlerine dayanarak dolaylı bir biçimde kontrol edilecektir. Diğer bir deyişle, dikey yöndeki istemin de, yatay yönde olduğu gibi, konum kontroluyla karşılanmasına çalışılacaktır.

Yukarıda açıklanan kontrol yaklaşımı uyarınca, kontrol kuvvetleri, PD kontrol kuralına göre şöyle oluşturulabilir.

$$F_x = k_1(x^* - x) + c_1(\dot{x}^* - \dot{x}) \quad (7.1.3)$$

$$F_y = k_2(y^* - y) + c_2(\dot{y}^* - \dot{y}) \quad (7.1.4)$$

Dikkat edilirse, PD kontrol kuralını uygulamak, cismin yatay ve dikey hareketlerini birer *esnek ileteç* (yay ve sönümleyici çifti) aracılığıyla kontrol etmekle eşniteliklidir. Eşnitelikli esnek ileteçli sistemde, cismin hareketleri, ileteçlerin öbür uçları istenen biçimde hareket ettirilerek kontrol edilir. Eşnitelikli esnek ileteçli sistem, Şekil 7.2'de gösterilmiştir.



Şekil 7.2 Eşnitelikli Esnek İleteçli Sistem

(7.1.3) denklemdeki x^* , istenen hareketi temsil eden referans girdisidir. (7.1.4) denklemdeki y^* referans girdisi ise, şöyle tanımlanmıştır.

$$y^* = y^\circ + h \quad (7.1.5)$$

(7.1.5) denklemdeki y° terimi, düzlemin nominal dikey hareketini göstermektedir. Bir çok uygulamada, düzlemin sabit durması beklenir, yani y° sabittir. Düzlemin istenmeyen ve beklenmeyen hareketliliği, çevreden iletilen titreşim ve sarsıntılar nedeniyle ortaya çıkar. Yine (7.1.5) denklemdeki *baskı parametresi* olarak adlandırılan h eklentisi ise, düzlemlerle teması kaybetmemek için $N > 0$ olmasını sağlamak amacıyla, cisim düzlemin yüzeyinden daha öteye doğru zorlamak için kullanılan sabit bir parametredir.

(7.1.3) ve (7.1.4) denklemleri kullanılıncaya, (7.1.1) ve (7.1.2) denklemlerinden aşağıdaki *kapalı çevrim* denklemleri elde edilir.

$$m\ddot{x} = k_1(x^* - x) + c_1(\dot{x}^* - \dot{x}) - F_d \Rightarrow$$

$$m\ddot{\varepsilon} + c_1\dot{\varepsilon} + k_1\varepsilon = F_d + m\ddot{x}^* \quad (7.1.6)$$

$$\varepsilon = x^* - x \quad (7.1.7)$$

$$m\ddot{y} = k_2(y^\circ + h - y) + c_2(\dot{y}^\circ - \dot{y}) - N + mg \Rightarrow$$

$$N = k_2(y^\circ + h - y) + c_2(\dot{y}^\circ - \dot{y}) + m(g - \ddot{y}) \quad (7.1.8)$$

a) Yatay Yöndeki Kontrol Parametrelerinin Belirlenmesi

Kontrol sisteminin yatay yönde asimptotik kararlı olabilmesi için c_1 ve k_1 katsayıları, şöyle seçilebilir.

$$c_1 = 2\zeta\omega_n m \quad (7.1.9)$$

$$k_1 = \omega_n^2 m \quad (7.1.10)$$

$$\omega_n \geq \omega_n^* > 0, \quad \sqrt{2}/2 \leq \zeta \leq 1 \quad (7.1.11)$$

Yukarıdaki katsayılar kullanılıncaya, (7.1.6) denklemi şu şekli alır.

$$\ddot{\varepsilon} + 2\zeta\omega_n\dot{\varepsilon} + \omega_n^2\varepsilon = \delta = (F_d + m\ddot{x}^*)/m \quad (7.1.12)$$

Eğer, $F_d(t)$ ile $\ddot{x}^*(t)$ değişkenleri zaman içinde çok hızlı değişmiyorsa, (7.1.12) denkleminde göre, yaklaşık olarak, aşağıdaki kalıcı hata oluşur.

$$\varepsilon \approx \delta/\omega_n^2 = (F_d + m\ddot{x}^*)/k_1 \quad (7.1.13)$$

(7.1.13) denklemine göre, kalıcı hatayı olabildiğince küçültmek için k_1 katsayısını olabildiğince büyütmek gerekir. Bu gereklilik ise, esnek ileteçli sistem benzeşimine göre, yatay ileteç için olabildiğince sert (yani esnekliği olabildiğince az olan) bir yay seçerek sağlanır. Böyle çok sert bir ileteçle de, toplam saptırıcı etki ($F_d + m\ddot{x}^*$) ne olursa olsun, $\varepsilon \approx 0$ ya da $x \approx x^*$ olması sağlanır. Örneğin, yüzey üzerinde yazı yazılacaksa, yazının güzel ve düzgün olması (yani titreşim ve biçimsiz olmaması) için yatay iletecin yeterince sert seçilmesi gerekir. Bu gereklilik ise, $k_1 \geq k_1^*$ olacak biçimde seçilen yeterince büyük bir k_1 katsayısı ile sağlanır. Toplam saptırıcı etkinin en büyük değeri ve belli bir hata toleransı (ε^*) için k_1^* alt sınır değeri, (7.1.13) denkleminde şöyle belirlenir.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{max} &= (F_{dmax} + m\ddot{x}_{max}^*)/k_1 \leq \varepsilon^* \Rightarrow \\ k_1 &\geq k_1^* = (F_{dmax} + m\ddot{x}_{max}^*)/\varepsilon^* \end{aligned} \quad (7.1.14)$$

b) Dikey Yöndeki Kontrol Parametrelerinin Belirlenmesi

Kontrol sisteminin dikey yönde tatminkar olabilmesi için aşağıdaki koşulun sağlanması gerekir.

$$0 < N_{min} \leq N \leq N_{max} \quad (7.1.15)$$

(7.1.15) eşitsizliğinde, $N \geq N_{min}$ olması, hem cismin yüzeye temasının kesilmemesi hem de cismin yüzeye yeterince bastırılmış olarak temas halinde tutulması için gerekir. Böylece, yüzey üzerindeki işlemin etkinlikle yapılabilmesi sağlanır. Öte yandan, $N \leq N_{max}$ olması ise, hem cismin hem de yüzeyin hasar görmemesi için gerekir.

Örneğin, yüzey üzerinde yazı yazılacaksa, yazı aygıtı olan cismin (kalemin) yüzeye belli bir kuvvetle bastırılması gerekir. Aksi halde, zayıfça bastırarak yazılan yazı silik ve okunaksız olur. Buna karşılık, baskı kuvveti çok büyük olursa, o zaman da hem kalem hem de yüzey hasar görebilir. Bu durumda, dikey iletecin çok sert ya da çok yumuşak olmaması gerekir. Diğer bir deyişle, k_2 katsayısı, belli sınırlar içinde tutularak yani $k_2^o \leq k_2 \leq k_2^*$ olacak biçimde seçilmelidir.

Dikey iletecin sertlik ve yumuşaklık sınırlarını belirlemek üzere, (7.1.8) denklemi kullanılarak (7.1.15) eşitsizliği şöyle yazılabilir.

$$N_{min} \leq k_2(y^\circ + h - y) + c_2(\dot{y}^\circ - \dot{y}) + m(g - \ddot{y}) \leq N_{max} \quad (7.1.16)$$

Öte yandan, cismin dikey yöndeki hareketi, cisim düzlemlerle temas halinde kaldığı sürece bellidir. Dolayısıyla, dikey yöndeki kontrolün amacı, asimptotik kararlılık olmayıp yalnızca baskı kuvvetinin ayarlanmasıdır. Bu nedenle, $c_2 = 0$ seçimi yapılabilir ve dikey yönde yalnızca P (oransal) kontrol kuralı uygulanabilir. Böyle yapılırken, (7.1.16) eşitsizliği, aşağıdaki daha basit eşitsizliğe dönüşür.

$$N_{min} \leq k_2(y^\circ - y + h) + m(g - \ddot{y}) \leq N_{max} \quad (7.1.17)$$

Düzlemin hareketi belli olduğuna göre, k_2 parametresi için uygun bir değer, $h > y - y^\circ$ olduğu varsayımıyla, aşağıdaki eşitsizliği sağlayacak biçimde seçilebilir.

$$\frac{N_{min} - mg + m\ddot{y}}{h - (y - y^\circ)} \leq k_2 \leq \frac{N_{max} - mg + m\ddot{y}}{h - (y - y^\circ)} \quad (7.1.18)$$

c) Dikey Yöndeki Kontrol için Örnek

Daha önce de bahsedildiği gibi, düzlemin dikey yöndeki hareketi, genellikle titreşim biçimindedir. Bir titreşim hareketi ise, basitleştirme amacıyla üst harmonikler gözardı edilerek şöyle ifade edilebilir.

$$y = y^\circ + y_a \sin(\omega t) \quad (7.1.19)$$

(7.1.19) denkleminde, y_a titreşimin genliği, ω ise frekansıdır. Bu titreşim aşağıdaki ivmeye neden olur.

$$\ddot{y} = -\omega^2 y_a \sin(\omega t) \quad (7.1.20)$$

(7.1.19) ve (7.1.20) denklemleri, $h > y_a$ olduğu varsayımıyla kullanılınca, (7.1.18) eşitsizliği şu şekli alır.

$$\frac{N_{min} - mg - m\omega^2 y_a \sin(\omega t)}{h - y_a \sin(\omega t)} \leq k_2 \leq \frac{N_{max} - mg - m\omega^2 y_a \sin(\omega t)}{h - y_a \sin(\omega t)} \quad (7.1.21)$$

(7.1.21) eşitsizliği, $-1 \leq \sin(\omega t) \leq 1$ olduğundan dolayı, aşağıdaki her iki uç durumda da, yani hem $\sin(\omega t) = 1$ hem de $\sin(\omega t) = -1$ için sağlanmalıdır.

$$\frac{N_{min} - mg - m\omega^2 y_a}{h - y_a} = k_{min}^+ \leq k_2 \leq k_{max}^+ = \frac{N_{max} - mg - m\omega^2 y_a}{h - y_a} \quad (7.1.22)$$

$$\frac{N_{min} - mg + m\omega^2 y_a}{h + y_a} = k_{min}^- \leq k_2 \leq k_{max}^- = \frac{N_{max} - mg + m\omega^2 y_a}{h + y_a} \quad (7.1.23)$$

Özel bir uygulama olarak, $N_{min} = mg$ olması yeterli görülebilir. Bu durumda, $k_{min}^+ < 0$ olur ve pozitif alt limit $k_{min} = k_{min}^-$ olarak ortaya çıkar. Yani,

$$k_{min} = \frac{1}{\eta + 1} m\omega^2 \quad (7.1.24)$$

(7.1.24) denklemindeki η oranı, $\eta > 1$ olmak üzere, şöyle tanımlanmıştır.

$$\eta = h/y_a \quad (7.1.25)$$

Aynı uygulamada, N_{max} için de, $\mu > 1$ olmak üzere, $N_{max} = mg + \mu m\omega^2 y_a$ seçimi yapılabilir. Bunun üzerine, k_{max}^+ ve k_{max}^- için şu değerler oluşur.

$$k_{max}^+ = \frac{\mu - 1}{\eta - 1} m\omega^2 \quad \text{ve} \quad k_{max}^- = \frac{\mu + 1}{\eta + 1} m\omega^2 \quad (7.1.26)$$

Eğer, $\lambda > 1$ olmak üzere, $\mu = \lambda\eta$ seçimi yapılırsa, (7.1.26) denklem çiftine göre, k_{max}^+ ve k_{max}^- şu değerleri alırlar.

$$k_{max}^+ = \frac{\lambda\eta - 1}{\eta - 1} m\omega^2 \quad \text{ve} \quad k_{max}^- = \frac{\lambda\eta + 1}{\eta + 1} m\omega^2 \quad (7.1.27)$$

Dikkat edilirse, $k_{max}^- < k_{max}^+$. Dolayısıyla, k_2 için üst limit k_{max}^- olur. Yani,

$$k_{max} = \frac{\lambda\eta + 1}{\eta + 1} m\omega^2 \quad (7.1.28)$$

Yukarıdaki analize göre, k_2 katsayısı, k_{min} ile k_{max} arasında kalmak üzere şöyle seçilmelidir.

$$\frac{1}{\eta + 1} m\omega^2 \leq k_2 \leq \frac{\lambda\eta + 1}{\eta + 1} m\omega^2 \quad (7.1.29)$$

(7.1.29) koşulu uyarınca, k_2 için uygun bir değer, k_{min} ile k_{max} değerlerinin ortalaması olarak seçilebilir. Yani,

$$k_2 = \frac{1}{2}(k_{min} + k_{max}) = \frac{\lambda\eta+2}{2(\eta+1)}m\omega^2 \quad (7.1.30)$$

Daha spesifik olmak gerekirse, $\eta = 1.5$ ve $\lambda = 4$ oranları için, N_{min} ve N_{max} sınırları ile k_2 katsayısı aşağıdaki değerle ortaya çıkar.

$$N_{min} = mg, \quad N_{max} = mg + \lambda\eta m\omega^2 y_a = mg + 6m\omega^2 y_a \quad (7.1.31)$$

$$k_2 = \frac{8}{3}m\omega^2 \quad (7.1.32)$$

Yukarıdaki analize ve seçilen değerlere göre belirlenen k_2 katsayısı ile daha önce bahsedilmiş olan $c_2 = 0$ seçimi kullanılırsa, (7.1.8) denklemi, yüzeye uygulanan normal kuvveti şöyle verir.

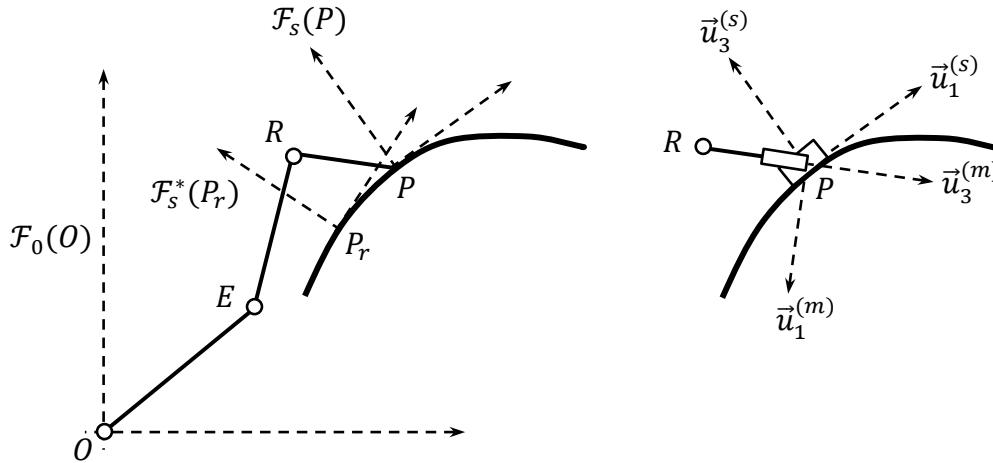
$$N = mg + \frac{12}{3}m\omega^2 y_a - \frac{5}{3}m\omega^2 y_a \sin(\omega t) \quad (7.1.33)$$

(7.1.33) denklemine göre, normal kuvvet, istenen sınırlar arasında kalarak aşağıda görüldüğü gibi değişir.

$$N_{min} < mg + \frac{7}{3}m\omega^2 y_a \leq N \leq mg + \frac{17}{3}m\omega^2 y_a < N_{max} \quad (7.1.34)$$

7.2. Manipülâtörler İçin Bir Yüzeyle Esnek Temaslı Konum Kontrolü

7.2.1. Bir Manipülâtörün Bir Yüzeyle Temasını Betimleyen Kinematik İlişkiler



Şekil 7.3 Bir Yüzeyle Temas Halinde Çalışan Bir Manipülâtör

Bir seri ya da paralel manipülâtörün işlem aygıtının zemine bağlı $\mathcal{F}_0(O)$ eksen takımına göre yönelimi ve uç noktasının konumu, daha önce de görüldüğü gibi, aşağıdaki \hat{C} ve \bar{p} matrisleriyle belirtilebilir.

$$\hat{C} = \hat{C}^{(0,m)} \quad (7.2.1)$$

$$\bar{p} = \bar{p}^{(0)} = \bar{r}_{P/O}^{(0)} \quad (7.2.2)$$

Eğer işlem aygıtının kendisinin ya da tuttuğu cismin yaptığı iş, bir yüzeyle temas halinde kalmak üzere sürdürülüyorsa, üçüncü eksenleri işlem yüzeyine dik olan $\mathcal{F}_s(P)$ ve $\mathcal{F}_s^*(P_r)$ gibi iki eksen takımı tanımlamak uygun olur. Şekil 7.3'te de görülen bu eksen takımları, şöyle tanımlanır.

$\mathcal{F}_s(P)$: Yüzey üzerinde işlem aygıtıyla birlikte hareket eden eksen takımı

$\mathcal{F}_s^*(P_r)$: $\mathcal{F}_s(P)$ için hedeflenen referans olarak belirtilen eksen takımı ($P_r = P_{ref}$)

Yukarıda tanımlanan eksen takımlarının yönelim ve konumları için aşağıdaki denklemler yazılabilir.

$$\hat{S} = \hat{C}^{(0,s)} = \hat{C}^{(0,m)}\hat{C}^{(m,s)} = \hat{C}\hat{D} \quad (7.2.3)$$

$$\hat{S}^* = \hat{C}^{(0,s^*)} = \hat{C}^{(0,m^*)}\hat{C}^{(m^*,s^*)} = \hat{C}^*\hat{D}^* = \hat{C}^*\hat{D} \quad (7.2.4)$$

$$\hat{S} = \hat{C}^{(0,s)} = \hat{C}^{(0,s^*)}\hat{C}^{(s^*,s)} = \hat{S}^*\hat{S}' \quad (7.2.5)$$

$$\hat{S}' = \hat{S}^{*t}\hat{S} \quad (7.2.6)$$

$$\hat{S}' = (\hat{D}^t\hat{C}^{*t})(\hat{C}\hat{D}) = \hat{D}^t(\hat{C}^{*t}\hat{C})\hat{D} = \hat{D}^t\hat{C}'\hat{D} \quad (7.2.7)$$

$$\hat{C}' = \hat{C}^{*t}\hat{C} \quad (7.2.8)$$

$$\bar{p}_r = \bar{p}_r^{(0)} = \bar{r}_{P_r/O}^{(0)} \quad (7.2.9)$$

$$\Delta\bar{p}^* = \Delta\bar{p}^{(s^*)} = \bar{p}^{(s^*)} - \bar{p}_r^{(s^*)} = \hat{S}^{*t}(\bar{p} - \bar{p}_r) = \hat{S}^{*t}\Delta\bar{p} \quad (7.2.10)$$

$$\Delta\bar{p}^* = \hat{D}^t\hat{C}^{*t}\Delta\bar{p} \quad (7.2.11)$$

Not: Yukarıdaki denklemlerde yer alan \hat{D} matrisi sabittir. Yürütülen yüzey temaslı iş esnasında, manipülatörle yüzey arasındaki temas sağlandığı sürece, manipülatör tarafından oluşturulan $\hat{Z} = \hat{C}\hat{D}$ matrisi, yüzey tarafından belirlenen \hat{S} matrisine intibak eder, yani $\hat{S} = \hat{Z} = \hat{C}\hat{D}$ olur. Böylece, \hat{C} matrisi, $\hat{C} = \hat{S}\hat{D}^t$ eşitliğine uyacak biçimde oluşur. Bu durum, Şekil 7.3'ün sağ yanında gösterilmiştir. Bu yan şekilde, işlem aygıtına (tutucuya) bağlı $\mathcal{F}_m(P)$ eksen takımı ile yüzeyle temas halinde tutularak manipüle edilen cisme bağlı $\mathcal{F}_s(P)$ eksen takımı birlikte görülmektedir. Manipülatörün cismi sımsıkı (hiç kaydırmadan) tuttuğu varsayıldığı için, $\mathcal{F}_s(P)$ 'nin $\mathcal{F}_m(P)$ 'ye göre duruşu (yönelimi ve konumu) değişmemektedir. Bu nedenle de, \hat{D} matrisi sabit kalmaktadır.

Eğer yönelim hatasını gösteren $\hat{S}' = \hat{S}^{*t}\hat{S}$ matrisi, \hat{I} birim matrisine yakınsa, dönme eksenini \vec{n} birim vektörüyle temsil edilen ve küçük bir $\Delta\psi$ açısına bağlı olan bir dönme matrisi olarak ifade edilebilir. Bu ifade, $\vec{n}^* = [\vec{n}]^{(s^*)}$ olmak üzere şöyle yazılabilir.

$$\hat{S}' = e^{\vec{n}^*\Delta\psi} = \hat{I} + \vec{n}^*\sin(\Delta\psi) + \vec{n}^{*2}[1 - \cos(\Delta\psi)] \approx \hat{I} + \vec{n}^*\Delta\psi \quad (7.2.12)$$

Bunun üzerine, $\hat{S}' = \hat{S}^{*t}\hat{S}$ eşitliği kullanılarak $\vec{n}^*\Delta\psi$ için aşağıdaki yaklaşık ifade elde edilir.

$$\vec{n}^*\Delta\psi \approx \hat{S}^{*t}\hat{S} - \hat{I} \quad (7.2.13)$$

(7.2.13) denkleminde dayanarak ve $\vec{n} = [\vec{n}]^{(0)}$ eşitliği kullanılarak, aşağıdaki denklemlerle ifade edilen *açısal değişim vektörü* ($\Delta\vec{\psi} = \vec{n}\Delta\psi$) tanımı yapılabilir.

$$\Delta\vec{\psi}^* = [\Delta\vec{\psi}]^{(s^*)} = \vec{n}^*\Delta\psi = (\hat{S}^{*t}\vec{n})\Delta\psi = (\hat{D}^t\hat{C}^{*t}\vec{n})\Delta\psi \quad (7.2.14)$$

Öte yandan, \bar{p} ve \hat{C} matrisleri ile \bar{p}_r ve \hat{C}^* matrisleri arasındaki ilişkiler, eklem değişkenlerindeki değişimlere ($\Delta q_1 = q_1 - q_1^*$, $\Delta q_2 = q_2 - q_2^*$, ... , $\Delta q_m = q_m - q_m^*$) bağlı olarak aşağıda gösterilen biçimlerde yaklaşık olarak ifade edilebilir.

$$\begin{aligned} \Delta \bar{p}^* &= \hat{S}^{*t} \Delta \bar{p} = \hat{S}^{*t} (\bar{p} - \bar{p}^*) \approx \hat{S}^{*t} \{ \bar{p}^* + \sum_{k=1}^m [(\partial \bar{p} / \partial q_k) |_{q_k^*}] \Delta q_k - \bar{p}^* \} \Rightarrow \\ \Delta \bar{p}^* &\approx \sum_{k=1}^m \hat{S}^{*t} \bar{V}_k(q_k^*) \Delta q_k = \sum_{k=1}^m \bar{V}_k^* \Delta q_k \end{aligned} \quad (7.2.15)$$

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{\psi}^* &= \tilde{n}^* \Delta \psi \approx \hat{S}^{*t} \hat{S} - \hat{I} = \hat{D}^t \hat{C}^{*t} \hat{C} \hat{D} - \hat{I} \Rightarrow \\ \Delta \tilde{\psi}^* &\approx \hat{D}^t \hat{C}^{*t} \hat{C} \hat{D} - \hat{I} = \hat{D}^t \hat{C}^{*t} \{ \hat{C}^* + \sum_{k=1}^m [(\partial \hat{C} / \partial q_k) |_{q_k^*}] \Delta q_k \} \hat{D} - \hat{I} \Rightarrow \\ \Delta \tilde{\psi}^* &\approx \hat{D}^t \hat{C}^{*t} \{ \sum_{k=1}^m [(\partial \hat{C} / \partial q_k) |_{q_k^*}] \hat{C}^{*t} \hat{C}^* \Delta q_k \} \hat{D} + \hat{D}^t \hat{C}^{*t} \hat{C}^* \hat{D} - \hat{I} \Rightarrow \\ \Delta \tilde{\psi}^* &\approx \sum_{k=1}^m \hat{D}^t \hat{C}^{*t} \bar{\Omega}_k(q_k^*) \hat{C}^* \hat{D} \Delta q_k = \sum_{k=1}^m \hat{S}^{*t} \bar{\Omega}_k(q_k^*) \hat{S}^* \Delta q_k \Rightarrow \\ \Delta \bar{\psi}^* &\approx \sum_{k=1}^m \hat{S}^{*t} \bar{\Omega}_k(q_k^*) \Delta q_k = \sum_{k=1}^m \bar{\Omega}_k^* \Delta q_k \end{aligned} \quad (7.2.16)$$

(7.2.15) ve (7.2.16) denklemlerinde şu tanımlar yapılmıştır.

$$\bar{V}_k^* = \hat{S}^{*t} \bar{V}_k(q_k^*) \quad (7.2.17)$$

$$\bar{\Omega}_k^* = \hat{S}^{*t} \bar{\Omega}_k(q_k^*) \quad (7.2.18)$$

(7.2.15) ve (7.2.16) denklemleri, değişimlerin yeterince küçük olduğu varsayımıyla (\approx) yerine ($=$) yazılarak, aşağıdaki tek denklem biçiminde birleştirilebilir.

$$\Delta \bar{\xi}^* = \hat{J}^* \Delta \bar{q} \quad (7.2.19)$$

(7.2.19) denkleminde aşağıda açıklanan iki tanım kullanılmıştır.

(i) İşlem aygıtının ya da tuttuğu cismin duruşundaki hatayı $\mathcal{F}_s^*(P_r)$ eksen takımında temsil eden büyütülmüş dikeysıra matrisi:

$$\Delta \bar{\xi}^* = \Delta \bar{\xi}^{(s^*)} = \begin{bmatrix} \Delta \bar{p}^* \\ \Delta \bar{\psi}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{S}^{*t} \Delta \bar{p} \\ \hat{S}^{*t} \Delta \tilde{\psi} \end{bmatrix} \quad (7.2.20)$$

(ii) İşlem aygıtının uç noktasına ilişkin olup $\mathcal{F}_s^*(P_r)$ eksen takımına göre ifade edilmiş olan Jacobi matrisi:

$$\hat{J}^* = \begin{bmatrix} \bar{V}_1^* & \bar{V}_2^* & \bar{V}_3^* & \dots & \bar{V}_m^* \\ \bar{\Omega}_1^* & \bar{\Omega}_2^* & \bar{\Omega}_3^* & \dots & \bar{\Omega}_m^* \end{bmatrix} \quad (7.2.21)$$

Aynı Jacobi matrisi, işlem aygıtının $\mathcal{F}_s^*(P_r)$ eksen takımında ifade edilen ötelenme ve dönme hızları için de kullanılabilir. Şöyle ki,

$$\bar{\eta}^* = \hat{J}^* \dot{\bar{q}} \quad (7.2.22)$$

(7.2.22) denkleminde, $\bar{\eta}^*$ şöyle tanımlanmıştır.

$$\bar{\eta}^* = \bar{\eta}^{(s^*)} = \begin{bmatrix} \bar{v}^* \\ \bar{\omega}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{S}^{*t} \bar{v} \\ \hat{S}^{*t} \bar{\omega} \end{bmatrix} \quad (7.2.23)$$

(7.2.22) denklemini kullanılarak hız hatası da şöyle ifade edilebilir.

$$\begin{aligned} \bar{\eta}^* - \bar{\eta}_r^* &= \hat{J}^* (\dot{\bar{q}} - \dot{\bar{q}}_r) = \hat{J}^* (\dot{\bar{q}} - \dot{\bar{q}}^*) \Rightarrow \\ \Delta \bar{\eta}^* &= \hat{J}^* \Delta \dot{\bar{q}} \end{aligned} \quad (7.2.24)$$

7.2.2. Yüzeyle Esnek Temas Sağlayan Kontrol İlişkileri

İşlem aygıtına ya da işlem aygıtının tuttuğu cisme manipülatör tarafından uygulanan kuvvet ve moment vektörleri, $\mathcal{F}_s^*(P_r)$ eksen takımında aşağıdaki dikeysıra matrisleriyle gösterilebilir.

$$\bar{F}^* = [\bar{F}^*]^{(s^*)} \quad (7.2.25)$$

$$\bar{M}^* = [\bar{M}^*]^{(s^*)} \quad (7.2.26)$$

$$\bar{\mathcal{F}}^* = \begin{bmatrix} \bar{F}^* \\ \bar{M}^* \end{bmatrix} \quad (7.2.27)$$

İşlem aygıtı ya da tuttuğu cisim, $\mathcal{F}_s(P) \rightarrow \mathcal{F}_s^*(P_r)$ yakınsamasını sağlamak üzere kontrol edilmek istendiği için, $\bar{\mathcal{F}}^*$ dikeysıra matrisi, Kısım 7.1'de anlatılan "bir yüzeyle esnek temaslı kontrol" esasları göz önüne alınarak PD kontrol kuralına göre şöyle oluşturulabilir.

$$\bar{\mathcal{F}}^* = -\hat{K}_{PS}\Delta\bar{\xi}^* - \hat{K}_{DS}\Delta\bar{\eta}^* \quad (7.2.28)$$

(7.2.28) denklemindeki \hat{K}_{PS} ve \hat{K}_{DS} katsayı matrisleri, $\mathcal{F}_s^*(P_r)$ eksen takımına göre tanımlanan *yemel işlem uzayı* içinde seçilen oransal ve türevsel kontrol kazanç matrisleridir.

(7.2.19) ve (7.2.24) denklemleri kullanılarak (7.2.28) denklemini şöyle de yazılabilir.

$$\bar{\mathcal{F}}^* = -\hat{K}_{PS}\hat{J}^*\Delta\bar{q} - \hat{K}_{DS}\hat{J}^*\Delta\dot{\bar{q}} \quad (7.2.29)$$

Öte yandan, Bölüm 5'teki *sanal iş* analizine göre, $\bar{\mathcal{F}}^*$ dikeysıra matrisine eklem uzayında karşılık gelen eyletim kuvvet ve/veya torklarından oluşan \bar{Q} dikeysıra matrisi şöyle ifade edilir.

$$\bar{Q} = \hat{J}^{*t}\bar{\mathcal{F}}^* \quad (7.2.30)$$

(7.2.29) ve (7.2.30) denklemlerinden aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\bar{Q} = -\hat{K}_{PJ}\Delta\bar{q} - \hat{K}_{DJ}\Delta\dot{\bar{q}} \quad (7.2.31)$$

(7.2.31) denklemindeki \hat{K}_{PJ} ve \hat{K}_{DJ} katsayı matrisleri, *eklem uzayı* kapsamındaki oransal ve türevsel kontrol kazanç matrisleridir. Bu matrisler, *yemel işlem uzayı* kapsamında seçilen \hat{K}_{PS} ve \hat{K}_{DS} matrisleri ile aşağıdaki denklemlere göre ilişkilidirler.

$$\hat{K}_{PJ} = \hat{J}^{*t}\hat{K}_{PS}\hat{J}^* \quad (7.2.32)$$

$$\hat{K}_{DJ} = \hat{J}^{*t}\hat{K}_{DS}\hat{J}^* \quad (7.2.33)$$

\hat{K}_{PS} ve \hat{K}_{DS} matrisleri, genelliği pek de bozmadan, köşegenel olarak seçilebilir. Bu matrislerin köşegen elemanları, Kısım 7.1'de incelenen "bir yüzeyle esnek temaslı kontrol" esaslarına göre aşağıda açıklanan biçimde belirlenebilir.

(i) \hat{K}_{PS} matrisinin köşegen elemanlarına, yüzeyle göre serbest olan yönlerdeki $\Delta p_i^* = \bar{u}_i^t \Delta \bar{p}^*$ ve $\Delta \psi_j^* = \bar{u}_j^t \Delta \bar{\psi}^*$ değişimleri için büyükçe; yüzey tarafından kısıtlanmış olan $\Delta p_k^* = \bar{u}_k^t \Delta \bar{p}^*$ ve $\Delta \psi_l^* = \bar{u}_l^t \Delta \bar{\psi}^*$ değişimleri için de küçükçe değerler verilir.

(ii) \hat{K}_{DS} matrisinin köşegen elemanlarına ise, yüzeyle göre serbest olan yönlerdeki $\Delta v_i^* = \bar{u}_i^t \Delta \bar{v}^*$ ve $\Delta \omega_j^* = \bar{u}_j^t \Delta \bar{\omega}^*$ hız değişimleri için yeterli sönümlenme etkisi yaratmak üzere sıfırdan farklı pozitif değerler; yüzey tarafından kısıtlanmış olan yönlerdeki $\Delta v_k^* = \bar{u}_k^t \Delta \bar{v}^*$ ve $\Delta \omega_l^* = \bar{u}_l^t \Delta \bar{\omega}^*$ hız değişimleri için de sıfır değerleri verilir.

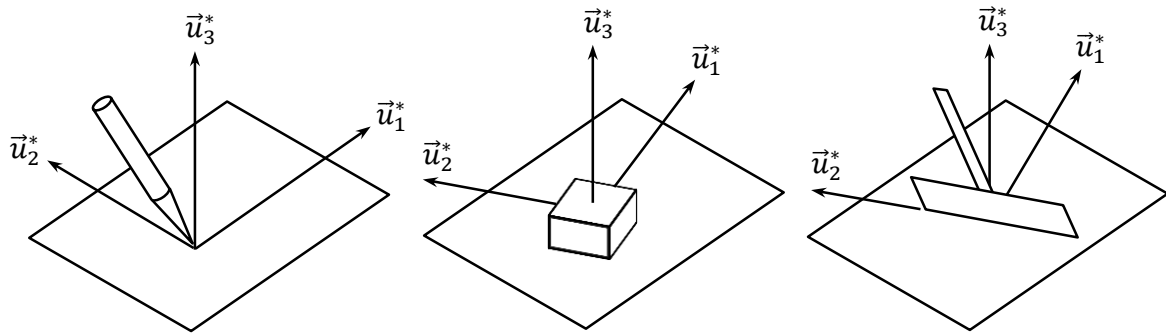
7.2.3. Örnekler

(i) Eğer işlem aygıtı yüzeye *noktasal* temas yapan bir şekle sahipse (örneğin bir kalemse), yüzeye göre kısıtlanmış olan konum/yönelim ve hız değişimleri şunlardır: Δp_3^* ve Δv_3^* . Dolayısıyla, K_{PS_3} katsayısına küçükçe bir değer; K_{DS_3} katsayısına ise sıfır değeri verilir. Diğer katsayılar ise büyükçe değerler verilir.

(ii) Eğer işlem aygıtı yüzeye *düzlemsel* temas yapan bir şekle sahipse (örneğin bir silgiyse), yüzeye göre kısıtlanmış olan konum/yönelim ve hız değişimleri şunlardır: Δp_3^* , $\Delta \psi_1^*$, $\Delta \psi_2^*$, Δv_3^* , $\Delta \omega_1^*$, $\Delta \omega_2^*$. Dolayısıyla, K_{PS_3} , K_{PS_4} , K_{PS_5} katsayılarına küçükçe değerler; K_{DS_3} , K_{DS_4} , K_{DS_5} katsayılarına ise sıfır değeri verilir. Diğer katsayılar ise büyükçe değerler verilir.

(iii) Eğer işlem aygıtı yüzeye *çizgisel* temas yapan bir şekle sahipse (örneğin bir sıyrıcıysa), yüzeye göre kısıtlanmış olan konum/yönelim ve hız değişimleri şunlardır: Δp_3^* , $\Delta \psi_1^*$; Δv_3^* , $\Delta \omega_1^*$. Dolayısıyla, K_{PS_3} ile K_{PS_4} katsayılarına küçükçe değerler; K_{DS_3} ile K_{DS_4} katsayılarına ise sıfır değeri verilir. Diğer katsayılar ise büyükçe değerler verilir.

Yukarıda sözü edilen üç değişik cisim, yüzey üzerindeki referans konumlarında iken Şekil 7.4'te gösterilmişlerdir. Şekildeki birim vektörler, \mathcal{F}_s^* eksen takımının temel vektörleridir.



Şekil 7.4 Düzlemsel Bir Yüzey Üzerinde Konumlandırılan Üç Değişik Cisim

7.3. Konum Kısıtlanmış İşlemlerde Birlikte Hareket ve Kuvvet-Moment Kontrolü

7.3.1. Kısıtlanmış Dinamik Formülasyon ve Kısıtlama Kuvvet ve Momentleri

Eğer bir seri ya da paralel manipülatörün işlem aygıtının duruşu üzerinde herhangi bir kısıtlama yoksa, \bar{q} dikeysıra matrisi, eyletimli eklem değişkenleriyle oluşturulabilir ve manipülatörün hareket denklemi şöyle yazılabilir.

$$\widehat{M}\ddot{\bar{q}} = \bar{Q} + \bar{Z} \quad (7.3.1)$$

$$\bar{q} \in \mathcal{R}^m, \bar{Q} \in \mathcal{R}^m \quad (7.3.2)$$

(7.3.1) denkleminde, \bar{Q} dikeysıra matrisi, eyletim kuvvet ve/veya torklarından; \bar{Z} dikeysıra matrisi ise, her türlü eklentisel kuvvet ve moment terimlerinden oluşmaktadır.

Eğer işlem aygıtının hareketi üzerinde bazı kısıtlamalar varsa, bu kısıtlamalar konum düzeyinde topluca şöyle ifade edilebilir.

$$\bar{\phi}(\bar{q}) = \bar{0}; \bar{\phi} \in \mathcal{R}^r, r < m \quad (7.3.3)$$

(7.3.3) denklemi, hız ve ivme düzeylerinde şöyle yazılabilir.

$$\hat{\Phi}\dot{\bar{q}} = \bar{0} \quad (7.3.4)$$

$$\hat{\Phi}\ddot{\bar{q}} + \bar{\alpha} = \bar{0} \quad (7.3.5)$$

$$\bar{\alpha} = \hat{\Phi}\dot{\bar{q}} \quad (7.3.6)$$

(7.3.4) ve (7.3.5) denklemlerindeki $\hat{\Phi} = \hat{\Phi}(\bar{q})$ matrisinin elemanları, aşağıdaki denkleme göre tanımlanmıştır.

$$\Phi_{ij} = \partial\phi_i/\partial q_j \quad (7.3.7)$$

(7.3.3) denklemiyle ifade edilen kısıtlamalar nedeniyle, aşağıdaki sanal değişim eşitliklerine göre tanımlanan ve *kısıtlama kuvvet ve/veya torkları* dikeysıra matrisi olarak anılan \bar{Q} ' matrisi oluşur.

$$\bar{\phi}(\bar{q}) = \bar{0} \Rightarrow \hat{\Phi}\delta\bar{q} = \bar{0} \Rightarrow$$

$$\bar{\lambda}^t \hat{\Phi}\delta\bar{q} = (\hat{\Phi}^t \bar{\lambda})^t \delta\bar{q} = (\bar{Q}')^t \delta\bar{q} = \delta W' = 0 \Rightarrow$$

$$\bar{Q}' = \hat{\Phi}^t \bar{\lambda} \quad (7.3.8)$$

$$\bar{\lambda} \in \mathcal{R}^r \quad (7.3.9)$$

Yukarıdaki $\bar{\lambda}$ dikeysıra matrisinin elemanları, her bir kısıtlamaya (yani $\bar{\phi}$ dikeysıra matrisinin her bir elemanına) ilişkin *Lagrange çarpanlarıdır*. Aslında, kısıtlama kuvvet ve momentlerinin *işlem uzayındaki* temsilcisi, $\bar{\lambda}$ matrisi olmaktadır. \bar{Q}' matrisi ise, kısıtlama kuvvet ve momentlerinin *eklem uzayındaki* temsilcisidir.

\bar{Q}' dikeysıra matrisinin eklenmesiyle, hareket denklemi, şu şekli alır.

$$\hat{M}\ddot{\bar{q}} = \bar{Q} + \bar{Q}' + \bar{Z} \quad (7.3.10)$$

(7.3.10) denklemi, şöyle de yazılabilir.

$$\hat{M}\ddot{\bar{q}} = \bar{Q} + \hat{\Phi}^t \bar{\lambda} + \bar{Z} \quad (7.3.11)$$

7.3.2. Birlikte Hareket ve Kuvvet-Moment Kontrolü

Bu kısımda açıklanan kontrol uygulamasının amacı, (7.3.10) ve (7.3.11) denklemleriyle temsil edilen sistemin hem hareketini hem de karşılaştığı kısıtlama kuvvet ve momentlerini kontrol altına almaktır. Bu amaçla kullanılacak kontrol girdisi, \bar{Q} dikeysıra matrisidir. Bu matris, eyletim kuvvet ve/veya torklarından oluşmaktadır.

Kontrol uygulaması esnasında, sistemin hareketini *eklem uzayında* gösteren \bar{q} ve $\dot{\bar{q}}$ matrisleri ile sistemin karşılaştığı kısıtlama kuvvet ve momentlerini *işlem uzayında* gösteren $\bar{\lambda}$ matrisinin ölçülebildiği varsayılmaktadır. Ne var ki, $\bar{Q} \in \mathcal{R}^m$ olduğu için, $\bar{q} \in \mathcal{R}^m$ ve $\bar{\lambda} \in \mathcal{R}^r$ matrisleri, doğal olarak, tüm elemanlarıyla birden kontrol edilemezler. Daha açık bir deyişle, \bar{q} matrisi, ancak $\bar{v} \in \mathcal{R}^{m-r}$ gibi daha düşük boyutlu bir hız matrisi aracılığıyla kontrol edilebilir.

Önceki paragrafta sözü edilen \bar{v} matrisi, eklem uzayındaki $\dot{\bar{q}}$ hız matrisi ile, (7.3.4) kısıtlama denklemini sağlamak üzere, şöyle bir denklemle ilişkilendirilebilir.

$$\dot{\bar{q}} = \hat{B}\bar{v} \quad (7.3.12)$$

(7.3.12) denklemindeki \hat{B} matrisi, (7.3.4) denklemini uyarınca, aşağıdaki denklemi sağlamalıdır.

$$\hat{\Phi}\hat{B} = \hat{0} \quad (7.3.13)$$

(7.3.13) denklemini sağlaması koşuluyla, \hat{B} matrisi keyfi olarak seçilebilir. Ancak, bu seçimi bir sistematığe bağlamak için \hat{B} matrisinin aşağıdaki denklemi de sağlaması istenebilir.

$$\hat{\Psi}\hat{B} = \hat{I} \quad (7.3.14)$$

(7.3.14) denklemindeki $\hat{\Psi}$ matrisinin $\hat{\Phi}$ matrisine bağlı özel bir seçimiyle, \hat{B} matrisi, aşağıda açıklanan biçimde belirlenebilir.

(7.3.13) ve (7.3.14) denklemleri, uygun ayrıştırmalarla, aşağıda görüldüğü gibi yazılabilir.

$$[\hat{\Phi}_a \quad \hat{\Phi}_b] \begin{bmatrix} \hat{B}_a \\ \hat{B}_b \end{bmatrix} = \hat{\Phi}_a \hat{B}_a + \hat{\Phi}_b \hat{B}_b = \hat{0} \quad (7.3.15)$$

$$[\hat{\Psi}_a \quad \hat{\Psi}_b] \begin{bmatrix} \hat{B}_a \\ \hat{B}_b \end{bmatrix} = \hat{\Psi}_a \hat{B}_a + \hat{\Psi}_b \hat{B}_b = \hat{I} \quad (7.3.16)$$

Yukarıdaki ayrıştırmalarda yer alan alt matrislerin boyutları şöyledir.

$$\hat{B}_a \in \mathcal{R}^{r \times (m-r)}, \quad \hat{B}_b \in \mathcal{R}^{(m-r) \times (m-r)}$$

$$\hat{\Phi}_a \in \mathcal{R}^{r \times r}, \quad \hat{\Phi}_b \in \mathcal{R}^{r \times (m-r)}, \quad \hat{\Psi}_a \in \mathcal{R}^{(m-r) \times r}, \quad \hat{\Psi}_b \in \mathcal{R}^{(m-r) \times (m-r)}$$

Burada, $\hat{\Phi}_a$ matrisinin tekil olmadığı varsayılmaktadır. Eğer manipülatörün özel bir duruşunda $\hat{\Phi}_a$ tekilleşirse, yeni $\hat{\Phi}_a$ tekil olmayacak biçimde farklı bir ayrıştırma yapılabilir. Tekil olmayan bir $\hat{\Phi}_a$ matrisine bağlı olarak da $\hat{\Psi}_a$ ve $\hat{\Psi}_b$ matrisleri şöyle seçilebilir.

$$\hat{\Psi}_a = \hat{\Phi}_b^t \quad (7.3.17)$$

$$\hat{\Psi}_b = 2\hat{\Phi}_b^t \hat{\Phi}_a^{-1} \hat{\Phi}_b \quad (7.3.18)$$

Yukarıdaki seçim üzerine, \hat{B}_a ve \hat{B}_b matrisleri, (7.3.15) ve (7.3.16) denklemlerinden şöyle elde edilir.

$$\hat{B}_b = (\hat{\Phi}_b^t \hat{\Phi}_a^{-1} \hat{\Phi}_b)^{-1} \quad (7.3.19)$$

$$\hat{B}_a = -(\hat{\Phi}_a^{-1} \hat{\Phi}_b)(\hat{\Phi}_b^t \hat{\Phi}_a^{-1} \hat{\Phi}_b)^{-1} \quad (7.3.20)$$

$\hat{\Psi}$ ve \hat{B} matrisleri, yukarıda açıklanan biçimde seçilip belirlendikten sonra, (7.3.12) denklemi kullanılarak (7.3.11) sayılı kısıtlanmalı hareket denklemi şöyle yazılabilir.

$$\hat{M}\hat{B}\dot{\bar{v}} - \hat{\Phi}^t \bar{\lambda} = \bar{Q} + \bar{Z} - \hat{M}\hat{B}\dot{\bar{v}} \quad (7.3.21)$$

(7.3.21) denklemi şöyle de yazılabilir.

$$[\hat{M}\hat{B} \quad -\hat{\Phi}^t] \begin{bmatrix} \dot{\bar{v}} \\ \bar{\lambda} \end{bmatrix} = \bar{Q} + \bar{Z} - \hat{M}\hat{B}\dot{\bar{v}} \quad (7.3.22)$$

(7.3.22) denkleminde uyum sağlamak üzere, \bar{Q} dikeysıra matrisi, $\bar{u} \in \mathcal{R}^{m-r}$ ve $\bar{\mu} \in \mathcal{R}^r$ gibi iki yeni dikeysıra matrisine bağlı olarak şöyle oluşturulabilir.

$$\bar{Q} = [\hat{M}\hat{B} \quad -\hat{\Phi}^t] \begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{\mu} \end{bmatrix} + \hat{M}\hat{B}\dot{\bar{v}} - \bar{Z}^* \quad (7.3.23)$$

(7.3.23) denklemindeki \bar{Z}^* matrisi, \bar{Z} matrisinin bilinen ya da kestirilen değeridir. Bu denklemle oluşturulan \bar{Q} matrisi yerine konunca, (7.3.22) denkleminde aşağıdaki basitleşmiş ve ayrılmış denklemler elde edilir.

$$\dot{\bar{v}} = \bar{u} - \bar{\delta}_v \quad (7.3.24)$$

$$\bar{\lambda} = \bar{\mu} - \bar{\delta}_\lambda \quad (7.3.25)$$

(7.3.24) ve (7.3.25) denklemlerindeki $\bar{\delta}_v \in \mathcal{R}^{m-r}$ ve $\bar{\delta}_\lambda \in \mathcal{R}^r$ dikeysıra matrisleri, sistem üzerindeki saptırıcı etkileri göstermektedir. Bu matrisler, aşağıdaki denkleme göre tanımlanmışlardır.

$$\begin{bmatrix} \bar{\delta}_v \\ \bar{\delta}_\lambda \end{bmatrix} = \bar{\delta} = [\hat{M}\hat{B} \quad -\hat{\Phi}^t]^{-1}(\bar{Z}^* - \bar{Z}) \quad (7.3.26)$$

(7.3.24) ve (7.3.25) denklemlerinde yer alan \bar{u} ve $\bar{\mu}$ dikeysıra matrisleri, "ivme komutu" ve "kuvvet-moment komutu" olarak adlandırılırlar. \bar{u} komutu ile sistemin hareket etmeye serbest olduğu yönlerdeki hareketi, \bar{v} hız matrisi aracılığıyla kontrol edilebilir. $\bar{\mu}$ komutu ile de sistemin hareket edemediği yönlerde karşılaştığı kısıtlama kuvvet ve momentlerini temsil eden $\bar{\lambda}$ matrisi kontrol edilebilir.

a) Hareket Kontrolü

(7.3.18) denklemindeki kontrol girdisi (\bar{u}), çeşitli kontrol kurallarından birine göre oluşturulabilir. Burada, basitliği ve yeterliliği nedeniyle, *ivme ileribeslemeli PI kontrol kuralı* tercih edilmiştir. Bu kontrol kuralına göre, kontrol girdisi şöyle oluşturulur.

$$\bar{u} = \dot{\bar{v}}^* + \hat{K}_p \bar{\varepsilon}_v + \hat{K}_i \int_0^t \bar{\varepsilon}_v(\tau) d\tau \quad (7.3.27)$$

$$\bar{\varepsilon}_v = \bar{v}^* - \bar{v}' \quad (7.3.28)$$

(7.3.28) denklemindeki \bar{v}^* ve \bar{v}' matrisleri, \bar{v} matrisinin istenen ve gözlemlenen değerleridir. Bu matrisler, iş planlamasıyla belirlenen $\dot{\bar{q}}^*$ ve hız sensörleriyle ölçülen $\dot{\bar{q}}'$ matrislerine, (7.3.12) ve (7.3.14) denklemlerinden kaynaklanan aşağıdaki denklemlerle bağlıdır.

$$\bar{v}^* = \hat{\Psi} \dot{\bar{q}}^* \quad (7.3.29)$$

$$\bar{v}' = \hat{\Psi} \dot{\bar{q}}' \quad (7.3.30)$$

Hız sensörlerinin kusursuz oldukları varsayılabilir. Dolayısıyla, $\bar{v}' \approx \bar{v} = \hat{\Psi} \dot{\bar{q}}$ olarak alınabilir. İvme ileribeslemesi için gereken $\dot{\bar{v}}^*$ terimi ise, (7.3.29) denkleminde şöyle elde edilir.

$$\dot{\bar{v}}^* = \hat{\Psi} \ddot{\bar{q}}^* + \dot{\hat{\Psi}} \dot{\bar{q}}^* \quad (7.3.31)$$

(7.3.27) denkleminde oluşturulan kontrol girdisi, (7.3.24) denkleminde yerine konunca, aşağıdaki hata denkleminde yol açar.

$$\begin{aligned} \dot{\bar{v}} &= \dot{\bar{v}}^* + \hat{K}_p \bar{\varepsilon}_v + \hat{K}_i \int_0^t \bar{\varepsilon}_v(\tau) d\tau - \bar{\delta}_v \Rightarrow \\ \dot{\bar{\varepsilon}}_v + \hat{K}_p \bar{\varepsilon}_v + \hat{K}_i \int_0^t \bar{\varepsilon}_v(\tau) d\tau &= \bar{\delta}_v \Rightarrow \\ \ddot{\bar{\varepsilon}}_v + \hat{K}_p \dot{\bar{\varepsilon}}_v + \hat{K}_i \bar{\varepsilon}_v &= \dot{\bar{\delta}}_v \end{aligned} \quad (7.3.32)$$

(7.3.32) denklemiyle belirlenen hata dinamiğinin asimptotik kararlı olması için uygunca seçilen ω_n ve ζ değerleri kullanılarak \hat{K}_p ve \hat{K}_i matrisleri şöyle belirlenebilir.

$$\hat{K}_i = \omega_n^2 \hat{I} \quad (7.3.33)$$

$$\hat{K}_p = 2\zeta\omega_n \hat{I} \quad (7.3.34)$$

Sistemin hareket kontrolü yukarıda açıklanan biçimde gerçekleştirilince, \bar{v} hız matrisi, zamanın işlevi olarak elde edilmiş olur. Sistemin buna karşılık gelen konumu ise, (7.3.12) denkleminde oluşan aşağıdaki türevsel denklem tümlemlenerek elde edilir.

$$\dot{\bar{q}} = \bar{f}(\bar{q}, t) = \hat{B}(\bar{q})\bar{v}(t) \quad (7.3.35)$$

b) Kuvvet-Moment Kontrolü

(7.3.25) denklemdeki kontrol girdisi ($\bar{\mu}$), çeşitli kontrol kurallarından birine göre oluşturulabilir. Burada, basitliği ve yeterliliği nedeniyle, *kuvvet-moment ileribeslemeli PI kontrol kuralı* tercih edilmiştir. Bu kontrol kuralına göre, kontrol girdisi şöyle oluşturulur.

$$\bar{\mu} = \bar{\lambda}^* + \hat{H}_p \bar{\varepsilon}_\lambda + \hat{H}_i \int_0^t \bar{\varepsilon}_\lambda(\tau) d\tau \quad (7.3.36)$$

$$\bar{\varepsilon}_\lambda = \bar{\lambda}^* - \bar{\lambda}' \quad (7.3.37)$$

(7.3.37) denklemdeki $\bar{\lambda}^*$ ve $\bar{\lambda}' \approx \bar{\lambda}$ matrisleri, $\bar{\lambda}$ matrisinin istenen ve ölçülen değerleridir. Burada, ölçümler için kullanılan kuvvet-moment sensörlerinin kusursuz olduğu varsayılmıştır.

(7.3.36) denkleminde göre oluşturulan kontrol girdisi, (7.3.25) denklemde yerine konunca, aşağıdaki hata denkleminde yol açar.

$$\bar{\lambda} = \bar{\lambda}^* + \hat{H}_p \bar{\varepsilon}_\lambda + \hat{H}_i \int_0^t \bar{\varepsilon}_\lambda(\tau) d\tau - \bar{\delta}_\lambda \Rightarrow$$

$$\bar{\varepsilon}_\lambda + \hat{H}_p \bar{\varepsilon}_\lambda + \hat{H}_i \int_0^t \bar{\varepsilon}_\lambda(\tau) d\tau = (\hat{H}_p + \hat{I}) \bar{\varepsilon}_\lambda + \hat{H}_i \int_0^t \bar{\varepsilon}_\lambda(\tau) d\tau = \bar{\delta}_\lambda \Rightarrow$$

$$\dot{\bar{\varepsilon}}_\lambda + \hat{L}_p^{-1} \hat{H}_i \bar{\varepsilon}_\lambda = \hat{L}_p^{-1} \bar{\delta}_\lambda \quad (7.3.38)$$

(7.3.38) denklemdeki \hat{L}_p matrisi şöyle tanımlanmıştır.

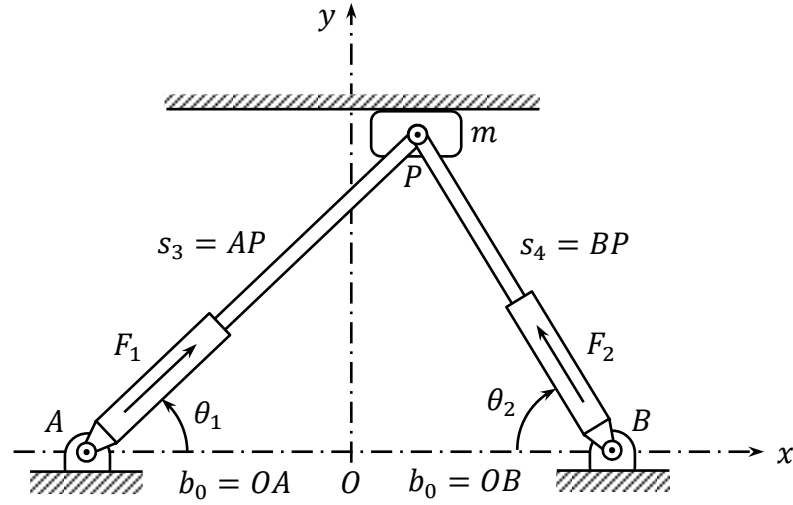
$$\hat{L}_p = \hat{H}_p + \hat{I} \quad (7.3.39)$$

(7.3.36) denklemiyle belirlenen hata dinamiğinin asimptotik kararlı olması için uygunca seçilen $h_p > 0$ ve $h_i > 0$ değerleri kullanılarak \hat{H}_p ve \hat{H}_i matrisleri şöyle belirlenebilir.

$$\hat{H}_p = h_p \hat{I}, \quad \hat{H}_i = h_i \hat{I} \quad (7.3.40)$$

Not: Kuvvet-moment kontrolcusunun daha basit olması için $\hat{H}_i = \hat{O}$ seçimi yapılarak yalnızca *kuvvet-moment ileribeslemeli P kontrol kuralı* uygulanması düşünülebilirdi. Ancak, o zaman, kontrolcunun $\bar{\delta}_\lambda$ bozucu girdisi üzerinde hiç bir *dinamik filtreleme* ve *yumuşatma* özelliği kalmazdı.

7.3.3. Örnek: Düzlemsel Bir Paralel Manipülatorün Hareket ve Kuvvet Kontrolü



Şekil 7.5 İki Serbestlik Dereceli Düzlemsel Bir Paralel Manipülator

Daha önce Bölüm 4'te incelenen düzlemsel paralel manipülator, burada tekrar göz önüne alınmıştır. Bu örnekteki görev tanımı şöyledir: Manipülator, taşıdığı cismin x yönündeki hareketini tepesindeki yatay ve sabit ($y = y_0 = \text{sabit}$) olan düzleme belli bir kuvvetle bastırarak kontrol edecektir. Sözü edilen kontrol senaryosu, Şekil 7.5'te gösterilmiştir. Kontrol sistemine geribesleme sağlamak üzere, yatay yönde x ve \dot{x} değerlerinin, dikey yönde ise yüzeye uygulanan normal kuvvetin uygun sensörlerle hatasız ölçülebildiği varsayılmaktadır. Bir başka varsayım da, yüzeyin yeterince kaygan olduğu, yani yüzeyle cisim arasındaki sürtünme kuvvetinin ihmal edilebilecek kadar küçük olduğudur.

Yüzeye uygulanan baskı kuvveti, aslında, $y = y_0$ kısıtlamasından kaynaklanan ve manipülatorün uç noktasına uygulanan dikey kısıtlama kuvvetinin tersidir. Kısıtlama denklemi, standart biçimiyle şöyle ifade edilir.

$$\phi(x, y) = y_0 - y = 0 \quad (7.3.41)$$

Kısıtlama kuvvetleri, kısıtlamaya ilişkin Lagrange çarpanı (λ) kullanılarak şöyle elde edilir.

$$\delta\phi = \delta(y_0 - y) = 0 \Rightarrow -\delta y = 0 \Rightarrow$$

$$-\lambda\delta y = Q'_x\delta x + Q'_y\delta y = 0 \Rightarrow$$

$$Q'_x = 0, \quad Q'_y = -\lambda \quad (7.3.42)$$

Bölüm 4'ün 4.5.9 kısmındaki örnekte, manipülatorün skalar hareket denklemleri, manipülatorün kütlelerinin taşınan cismin kütlelerine göre çok küçük olduğu varsayımıyla, kısıtlamasız hareketler için şöyle elde edilmişti.

$$m\ddot{x} = \frac{b_0+x}{\sqrt{(b_0+x)^2+y^2}}F_1 - \frac{b_0-x}{\sqrt{(b_0-x)^2+y^2}}F_2 \quad (7.3.43)$$

$$m\ddot{y} + mg = \frac{y}{\sqrt{(b_0+x)^2+y^2}}F_1 + \frac{y}{\sqrt{(b_0-x)^2+y^2}}F_2 \quad (7.3.44)$$

Bu örnekteki $y = y_0$ kısıtlaması ve ilgili kısıtlama kuvveti (λ) için içine katılınca, (7.3.43) ve (7.3.44) denklemleri aşağıda görülen şekilleri alırlar.

$$m\ddot{x} = \frac{b_0+x}{\sqrt{(b_0+x)^2+y_0^2}} F_1 - \frac{b_0-x}{\sqrt{(b_0-x)^2+y_0^2}} F_2 \quad (7.3.45)$$

$$mg = \frac{y_0}{\sqrt{(b_0+x)^2+y_0^2}} F_1 + \frac{y_0}{\sqrt{(b_0-x)^2+y_0^2}} F_2 - \lambda \quad (7.3.46)$$

(7.3.45) ve (7.3.46) denklemleri, kısaca şöyle de yazılabilir.

$$\ddot{x} = u \quad (7.3.47)$$

$$\gamma = \mu - g \quad (7.3.48)$$

(7.3.47) ve (7.3.48) denklemlerindeki *kontrol komutları* (u ve μ) ile *özgül baskı kuvveti* (γ), aşağıdaki denklemlere göre tanımlanmışlardır.

$$\gamma = \lambda/m \quad (7.3.49)$$

$$mu = \frac{b_0+x}{\sqrt{(b_0+x)^2+y_0^2}} F_1 - \frac{b_0-x}{\sqrt{(b_0-x)^2+y_0^2}} F_2 \quad (7.3.50)$$

$$m\mu = \frac{y_0}{\sqrt{(b_0+x)^2+y_0^2}} F_1 + \frac{y_0}{\sqrt{(b_0-x)^2+y_0^2}} F_2 \quad (7.3.51)$$

Manipüle edilen cismin yatay hareketinin istendiği gibi (yani $\varepsilon_x = x^* - x \approx 0$ olacak biçimde) kontrol edilebilmesi için u kontrol komutu, ivme ileribeslemeli PD kontrol kuralı uyarınca şöyle oluşturulabilir.

$$u = \ddot{x}^* + k_p \varepsilon_x + k_d \dot{\varepsilon}_x \quad (7.3.52)$$

Bu kontrol komutu, $k_p = \omega_n^2$ ve $k_d = 2\zeta\omega_n$ tanımlarıyla uygulanınca, (7.3.47) denkleminde aşağıdaki hata denklemi elde edilir.

$$\ddot{\varepsilon}_x + 2\zeta\omega_n \dot{\varepsilon}_x + \omega_n^2 \varepsilon_x = 0 \quad (7.3.53)$$

(7.3.53) denkleminde göre, ε_x hatası asimptotik olarak sifira yakınsar. Böylece, $x \rightarrow x^*$ yakınsaması da sağlanmış olur.

Manipüle edilen cismin yüzeye istendiği gibi (yani $\varepsilon_\gamma = \gamma^* - \gamma \approx 0$ olacak biçimde) bastırılabilmesi için μ kontrol komutu, özgül kuvvetin istenen değerini ve yerçekimi ivmesini ileribesleme terimleri olarak kullanan bir PI kontrol kuralı uyarınca şöyle oluşturulabilir.

$$\mu = (\gamma^* + g) + c_p \varepsilon_\gamma + c_i \int_0^t \varepsilon_\gamma(\tau) d\tau \quad (7.3.54)$$

(7.3.54) denkleminde göre oluşturulan kontrol komutu uygulanınca, (7.3.48) denkleminde aşağıdaki hata denklemi elde edilir.

$$(c_p + 1)\varepsilon_\gamma + c_i \int_0^t \varepsilon_\gamma(\tau) d\tau = 0 \Rightarrow \dot{\varepsilon}_\gamma + \omega_c \varepsilon_\gamma = 0 \quad (7.3.55)$$

(7.3.55) denklemindeki ω_c parametresi şöyle tanımlanmıştır.

$$\omega_c = c_i / (c_p + 1) \quad (7.3.56)$$

(7.3.55) denkleminde göre, ε_γ hatası asimptotik olarak sifira yakinsar. Böylece, $\gamma \rightarrow \gamma^*$ ve $\lambda \rightarrow \lambda^*$ yakinsamaları da sağlanmış olur.

Yukarıda belirlenen u ve μ kontrol komutlarını fiziksel olarak uygulayabilmek için gereken eyletim kuvvetleri ise, (7.3.50) ve (7.3.51) denklemleri çözülerek şöyle bulunur.

$$F_1 = m \frac{\sqrt{(b_0+x)^2+y_0^2}}{2b_0y_0} [(b_0-x)\mu + y_0u] \quad (7.3.55)$$

$$F_2 = m \frac{\sqrt{(b_0-x)^2+y_0^2}}{2b_0y_0} [(b_0+x)\mu - y_0u] \quad (7.3.56)$$

Dikkat edilirse, $y_0 > 0$ ve $b_0 > 0$ olduğu için, manipülatör, istenen görevi herhangi bir eyletimsel tekil durumla karşılaşmadan yerine getirebilir.

EK A: KAYNAKLAR

Özgün bir içeriğe sahip olan bu kitabın hazırlanmasında aşağıda belirtilen kaynaklardan temel yapı taşları ve yol gösterici unsurlar olarak yararlanılmıştır.

1. M. K. Özgören, "Lecture Notes for ME 522 (Principles of Robotics)", Makina Mühendisliği Bölümü, ODTÜ.
2. M. K. Özgören, "Lecture Notes for ME 502 (Advanced Dynamics)", Makina Mühendisliği Bölümü, ODTÜ.
3. M. K. Özgören, "Seri ve Paralel Manipulatörlerin Analitik ve Yarı-Analitik Yöntemlerle Konum ve Hız Analizleri", MakTeD Robot Kinematığı Çalıştayı, Gaziantep Üniversitesi, Eylül 2015.
4. J. Denavit, R. S. Hartenberg, "A Kinematic Notation for Lower-Pair Mechanisms Based on Matrices", ASME J. of Applied Mechanics, 22(2), pp. 215–221, 1955.
5. R. P. Paul, "Robot Manipulators: Mathematics, Programming and Control", MIT Press, Cambridge, MA, 1981.
6. J. J. Craig, "Introduction to Robotics, Mechanics and Controls", Addison-Wesley, Reading, MA, 1996.
7. W. Khalil, E. Dombre, "Modeling, Identification and Control of Robots", Hermes Penton Science, 2002.
8. J. Angeles, "Fundamentals of Robotic Mechanical Systems", Springer, 2014.
9. L. W. Tsai, "Robot Analysis: The Mechanics of Serial and Parallel Manipulators", Wiley, 1999.
10. H. Asada, J. J. E. Slotine, "Robot Analysis and Control", Wiley, 1986.
11. A. J. Koivo, "Fundamentals for Control of Robotic Manipulators", Wiley, 1989.
12. R. J. Schilling, "Fundamentals of Robotics: Analysis and Control", Prentice-Hall, 1990.
13. L. Sciavicco, B. Siciliano, "Modeling and Control of Robot Manipulators", McGraw-Hill, 1996.
14. M. W. Spong, S. Hutchinson, M. Vidyasagar, "Robot Modeling and Control", Wiley, 2006.
15. M. K. Ozgoren, "Some Remarks on Rotation Sequences and Associated Angular Velocities", Journal of Mechanism and Machine Theory, Vol. 29, No. 7, pp. 933-940, 1994.
16. M. K. Ozgoren, "Kinematic Analysis of a Manipulator with its Position and Velocity Related Singular Configurations", Journal of Mechanism and Machine Theory, Vol. 34, pp. 1075-1101, 1999.
17. M. K. Ozgoren, "Topological Analysis of Six-Joint Serial Manipulators and Their Inverse Kinematic Solutions", Journal of Mechanism and Machine Theory, Vol. 37, pp. 511-547, 2002.
18. M. K. Ozgoren, "Kinematic Analysis of Spatial Mechanical Systems Using Exponential Rotation Matrices", Journal of Mechanical Design, ASME, Vol. 129, pp. 1144-1152, November 2007.
19. M. K. Ozgoren, "Optimal Inverse Kinematic Solutions for Redundant Manipulators by Using Analytical Methods to Minimize Position and Velocity Measures", Journal of Mechanisms and Robotics, ASME, Vol. 5, pp. 031009:1-16, August 2013.
20. M. K. Ozgoren, "Kinematic Analysis of Spatial Mechanical Systems Using a New Systematic Formulation Method for Lower and Higher Kinematic Pairs", Journal of Mechanisms and Robotics, ASME, Vol. 6, pp. 041003:1-17, November 2014.

EK B: KÜÇÜK SÖZLÜK

Mekanik sistemler ve robotik alanında kullanılan ve kullanılabilecek bazı Türkçe terimlerin İngilizce karşılıkları bu küçük sözlük kapsamında belirtilmiştir. Bu terimlerin bazıları zaten kullanılmaktadır. Bazıları ise yeni önerilen ve tartışmaya açık terimlerdir. Önerilerden bazıları için esinlenme kaynakları da gösterilmiştir. Ayrıca, bazı kavramlar için birden fazla öneri de bulunmaktadır. Aynı İngilizce terim için yerine göre farklı Türkçe terimler kullanılabilir. Tabii, Bunun tersi de olabilir. Örneğin, "end-effector" terimi için "işlem aygıtı" ya da "uç işlemci" terimleri kullanılabilir. Öte yandan, "duruş" terimi için de "pose" ya da "posture" terimleri kullanılabilir. Türkçe'nin zengin yapım ekleri dağarcığından kaynaklanan kelime türetme yeteneği, ilginç nüans farklılıkları da doğurabilmektedir. Örneğin, her ikisi de İngilizce'deki "translation" kelimesine karşılık gelen "öteleme" ve "ötelenme" kelimelerinin anlamları arasında azımsanmayacak bir nüans farkı vardır. Hele, her ikisi de İngilizce'deki "resolution" kelimesine karşılık gelen "çözünürlük" ve "çözüşürme" kelimelerinin anlamları tümüyle farklıdır. Ayrıca, yine İngilizce'deki "resolution" kelimesine karşılık gelen "çözüşürme" ve "çözüşüm" kelimelerinin anlamları arasında da nüans farkı vardır.

A

Açık Çevrimli Kontrol = Döngüsüz Kontrol = Open-Loop Control

Artıksıl = Redundant (Esinlenme: Yoksul, Varsıl)

Artık Eyletimli = Over Actuated

Artçıl = Posterior

Aşırı Eyletimli = Over Actuated

Aşırı Artıksıl = Hyper Redundant

Aşırı Kısıtlı = Over Constrained

Altyazıt = Subscript

Asal = Principal

Atalet = Inertia

Atalet Momenti = Moment of Inertia

Atalet Çarpımsalı = Product of Inertia

Ataletsel Kuvvet = Inertia Force

Ataletsel Moment = Inertia Moment

Ataletsel Eksen Takımı = Inertial Reference Frame

Atalet Tensörü = Inertia Tensor

Aygıt = Tool, Device

Aygıt-Ekleme Kinematığı = Inverse Kinematics (from Tool to Joints)

Ayrıştırmak = To Partition

Ayrışka = Partition (Esinlenme: Bileşke, Yerleşke)

Ayrışık = Decoupled

Atılım Açısı = Hücum Açısı = Angle of Attack

B

Bağıl = Relative
Bağlanca = Network (Esinlenme: Eğlence, İzlenme)
Bağlantı = Connection
Bağlaç = Connecting Serial Chain (such as that between the platforms of a parallel manipulator)
Bağlaşık = Coupled
Bağlaşka = Linkage (Esinlenme: Yerleşke)
Bağlar Uzuu = Bağlantı Uzvu = Coupler Link (in a mechanism)
Bağlangaç = Coupler Link (in a mechanism) (Esinlenme: Solungaç)
Benzetim = Simulation
Benzeşim = Analogy
Bileşen = Component
Bileşke = Combination
Biçimlenme = Configuration
Boyut = Dimension
Bölüntü = Division, Partition
Bölüntülemek = To Divide, To Partition
Burulma Açısı = Twist Angle
Burgu = Vida = Screw
Burgusal Eklem = Vidasal Eklem = Screw Joint
Bükülme Açısı = Kıvrılma Açısı = Turn Angle, Deflection Angle

C, Ç

Çalışma Hacmi = İşlem Hacmi = Workspace
Çevrimiçi = Süreççi = Online
Çevrimdışı = Süreçdışı = Offline
Çözüştürmek = To Resolve (a vector)
Çözüşüm = Resolution (of a vector)
Çözünürlük = Resolution (of an image)

D

Dayanç = Mukavemet = Strength (Esinlenme: Basınç, Güvenç)
Derleşik (Derli Toplu) = Compact
Devinim = Hareket = Motion
Devinimsel Dinamik = Forward Dynamics, Direct Dynamics (for finding motion)
Devinimsel Dinamik = Devinimsel Dinamik
Devinimsel Tekillik = Motion Singularity
Devrik = Transpoz = Transpose
Dikeysıra Matrisi = Column Matrix
Döner Eklem = Revoluted Joint
Döner Uzuu = Crank (in a mechanism)

Döngüç (Döner Uzun) = Crank (in a mechanism) (Esinlenme: Süzgeç, Yüzgeç)
Döndürgeç = Crank (for cranking) (Esinlenme: Süzgeç, Yüzgeç)
Döndüreç = Crank (for cranking) (Esinlenme: Kaldıraç)
Dönmeölçer = Gyroscope
Döngü = Loop
Döngülü Kontrol = Kapalı Çevrimli Kontrol = Closed-Loop Control
Döngüsüz Kontrol = Açık Çevrimli Kontrol = Open-Loop Control
Döngü Kapanım Denklemi = Loop Closure Equation
Dönüşüm = Transformation
Dönüştürmek = To Transform
Dönüştürgeç = Transformer
Dörtleç = Quaternion
Durum = Situation, State
Duruş = Pose, Posture
Düzlemcil Atalet Terimi = Atalet Çarpımsalı = Product of Inertia (defined over a plane)

E

Eklem = Joint
Eklem-Aygıt Kinematığı = Forward Kinematics (from Joints to Tool)
Eklem Uzayı = Joint Space
Eklenti = Bias Term (in a nonhomogeneous expression)
Eksen Takımı = Reference Frame
Eksencil Atalet Terimi = Atalet Momenti = Moment of Inertia (defined about an axis)
Eksiksiz = Deficient (Esinlenme: Yoksul, Varsıl, Artıksız)
Eksik Eyletimli = Under Actuated
Eşlenik = Conjugate
Eşdeğerli = Equivalent (quantitatively)
Eşnitelikli = Equivalent (qualitatively)
Etkileşim = Interaction
Etkin = Effective, Dextrous
Etkili = Effective, Dextrous
Etki-Eylem Dinamiği = Forward Dynamics, Direct Dynamics (from Cause to Action)
Eylem-Etki Dinamiği = Inverse Dynamics (from Action to Cause)
Eyletmek = To Actuate
Eyletim = Actuation
Eyletici = Actuator
Eyletimsel Dinamik = Inverse Dynamics (for finding actuating forces/torques)
Eyletimcil Dinamik = Eyletimsel Dinamik
Eyletimsel Tekillik = Actuation Singularity

F

Fazla Eyletimli = Over Actuated

G

Geribesleme = Feedback

Geriye Doğru Kinematik = Ters Kinematik = Inverse Kinematics

Geriç ≈ Gerilme = Stress (Esinlenme: Basınç, Dayanç, Güvenç)

Gerinti ≈ Gerinim = Strain (Esinlenme: Esinti, Gezinti, Yaşantı)

H

Hücum Açısı = Atılım Açısı = Angle of Attack

I, i

İkileç = Diyardik

İleribesleme = Feedforward

İleri Kinematik = Forward Kinematics

İleriye Doğru Kinematik = Forward Kinematics

İleteç = Transmitter, Transmission Tool

İndirgeç = Redüktör = Reduction Gearbox

İşlem Aygıtı = End-Effector

İşlem Hacmi = Çalışma Hacmi = Workspace

İşlem Uzayı = Task Space

İvmeölçer = Accelerometer

K

Kaçıklık = Offset

Kalıcı Hata = Residual Error (after the transient response phase)

Kapalı Çevrimli Kontrol = Döngülü Kontrol = Closed-Loop Control

Kararlı = Stable

Kayar Eklem = Prismatic Joint

Kayar Uzuv = Slider (in a mechanism)

Kayaç = Slider (in a mechanism) (Esinlenme: Kaldıraç)

Kaygaç = Slider (in a mechanism) (Esinlenme: Süzgeç, Yüzgeç)

Kaymalı Yuvarlanma = Rolling with Slipping

Kaymasız Yuvarlanma = Rolling without Slipping

Kapanım = Closure

Kıvrılma Açısı = Bükülme Açısı = Turn Angle, Deflection Angle

Konum = Position

Konumsal Tekillik = Position Singularity

Kontrol = Control

Kontrolcu = Controller

Kontrol Kuralı = Control Law

O, Ö

Orta Dikme = Perpendicular Bisector (of a line segment)
Ortak Dikme = Common Normal (between two axes)
Öge = Element (e.g., element of a matrix)
Öncül = Anterior
Öteleme = Translation (driven)
Ötelenme = Translation (self driven)
Özgül = Specific
Özgül Kuvvet = Specific Force (force per unit mass)
Özgül Moment = Specific Moment (moment per unit rotational inertia)

R

Rank = Rank (of a matrix)

S, Ş

Salınmak = To Oscillate, To Rock
Salınım = Oscillation, Rocking
Salınır Uzuv = Rocker (in a mechanism)
Salıngaç = Rocker (in a mechanism) (Esinlenme: Solungaç)
Süreçi = Çevrimiçi = Online
Süreçdışı = Çevrimdışı = Offline

T

Ters Kinematik = Inverse Kinematics
Ters Dinamik = Inverse Dynamics
Tutucu = Gripper
Tümlev = Integral
Türev = Derivative

u, ü

Uç İşlemci = End-Effector
Uzuv = Link
Üstyazıt = superscript
Uzakçıl = Distal (Further Away from the Base)

y

Yakıncıl = Proximal (Closer to the Base)
Yakınsama = Convergence
Yandönme Açısı = Yaw Angle
Yankayma Açısı = Sideslip Angle
Yataysıra Matrisi = Row Matrix
Yerleşim = Location
Yenileme = Recursion, Renewal
Yenilemeli Denklem = Recursive Equation
Yineleme = Iteration, Repetition
Yinelemeli Çözüm = Iterative Solution
Yönelmek = To get oriented
Yöneltmek = To make oriented
Yönelim = Orientation (self driven)
Yöneltim = Orientation (driven)
Yunuslama Açısı = Pitch Angle
Yuvarlanma Açısı = Roll Angle
Yükselteç = Amplifier

ROBOT MANİPÜLATÖRLERİN DİNAMIĞI VE KONTROLU

Prof. Dr. M. Kemal ÖZGÖREN
Orta Doğu Teknik Üniversitesi



Bahçelievler Mahallesi 1. Cad. TRT Haber 1 Sitesi No: C8 Gölbaşı/ANKARA

Makina Teorisi Derneği Yayınları

Ders Notları Serisi No: 2

ISBN 978-605-84220-2-5