# Kontrol Sistemleri Tasarımı

# Kontrolcü Tasarımı
# Tanımlar ve İsterler

**Prof. Dr. Bülent E. Platin**

**Sistem Dinamiği ve Kontrol Çalıştayı**
**31 Ağustos – 02 Eylül 2016**

# Kontrolcü Tasarımı İsterleri

**Birincil isterler:**
- Kararlılık
- Kalıcı rejim hatası
- Dinamik davranış

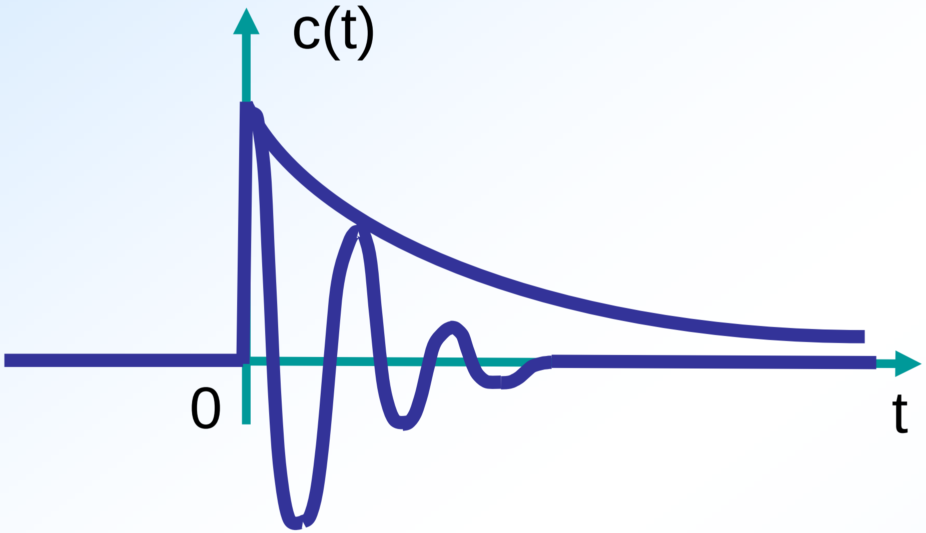
**İsterlerin işlevsel boyutu:**
- Servomekanizma başarımı
- Düzenleyici (Regülatör) başarımı

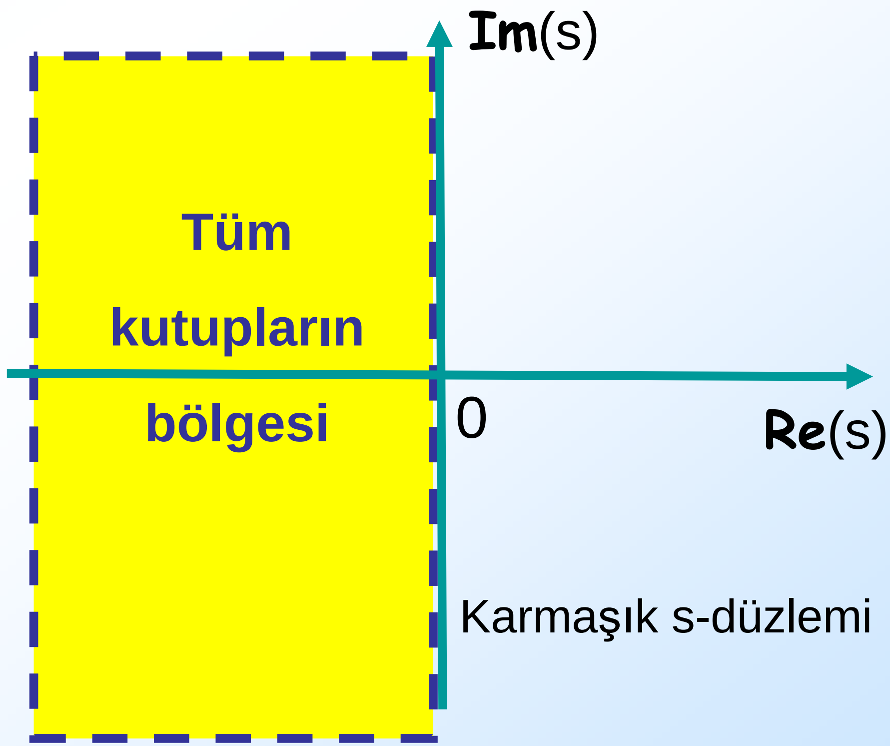
**Ek isterler:**
- Sistem belirsizliklerine duyarsızlık (dayanıklılık)
- En basit, en ucuz, en küçük, en hafif, en az enerji kullanan, en az bakım gerektiren, en uzun ömürlü
- ...

# Kararlılık

## Kararlı Sistem

Bu sistemlerin girişine ani bir darbe uygulandığında, sistemin çıktısı ilk değerine geri döner.



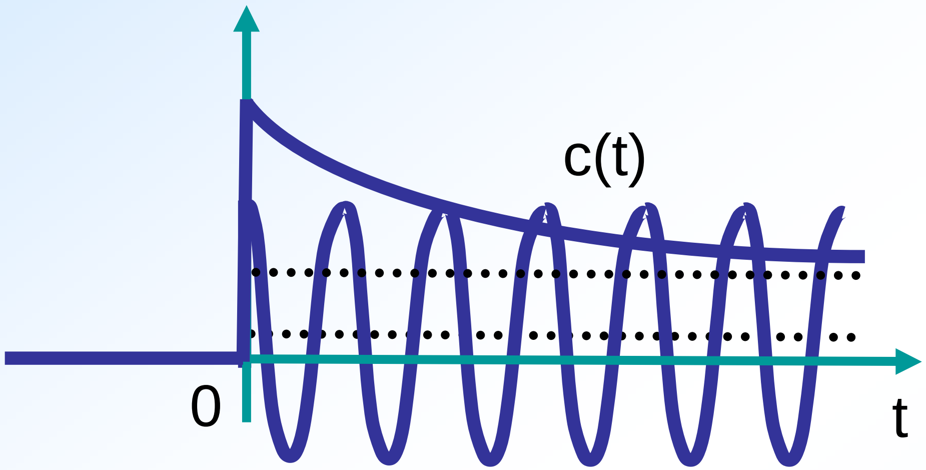




Teorem: Tüm kutuplarının gerçek kısımları negatif olan bir sistem **kararlı**dır.

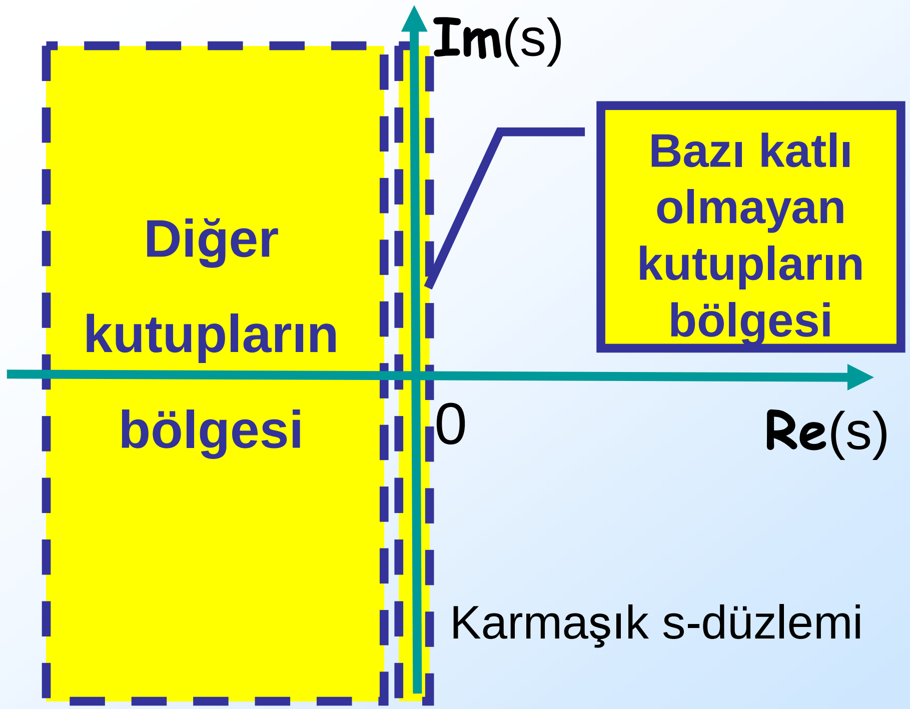
# Kararlılık

## Marjinal Kararlı Sistem

Bu sistemlerin girişine ani bir darbe uygulandığında, sistemin çıktısı ya ilk değerinden başka bir sonlu değere oturur ya da sonlu bir değer etrafında sonlu genlikte sürekli salınır.



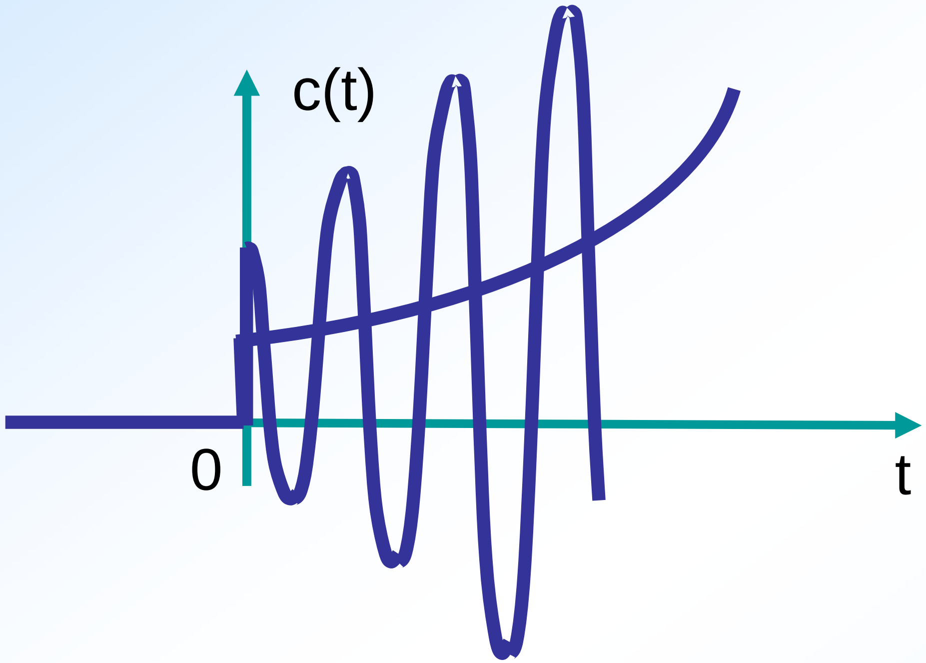

<u>Teorem:</u> Sanal eksen üzerinde bazı katlı olmayan kutupları olan ve geri kalan tüm kutuplarının gerçek kısımları negatif olan bir sistem **marjinal kararlı**dır.

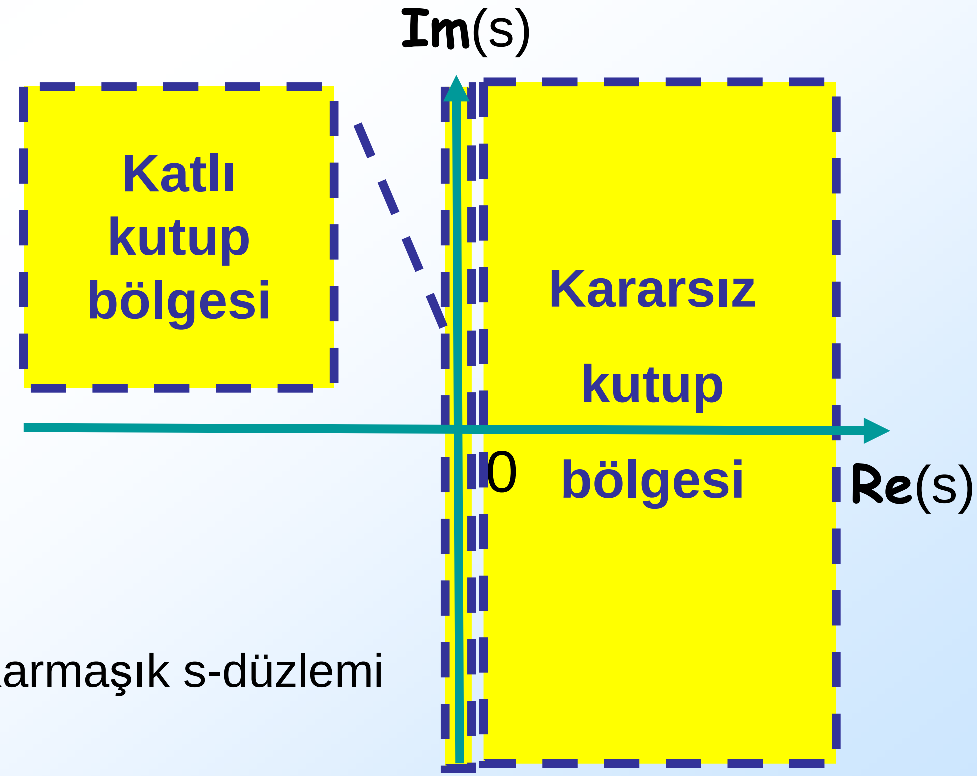


# Kararlılık

## Kararsız Sistem

Bu sistemlerin girişine ani bir darbe uygulandığında, sistemin çıktısı herhangi bir sınır olmadan büyür.




Karmaşık s-düzlemi

<u>Teorem:</u> Bazı kutuplarının gerçek kısımları pozitif olan ve/veya sanal eksen üzerinde bazı katlı kutupları olan bir sistem **kararsız**dır.

# Kararlılık ve Dinamik Davranış

## Sistem Kutuplarının s-düzlemindeki Yerleri ile İlişki

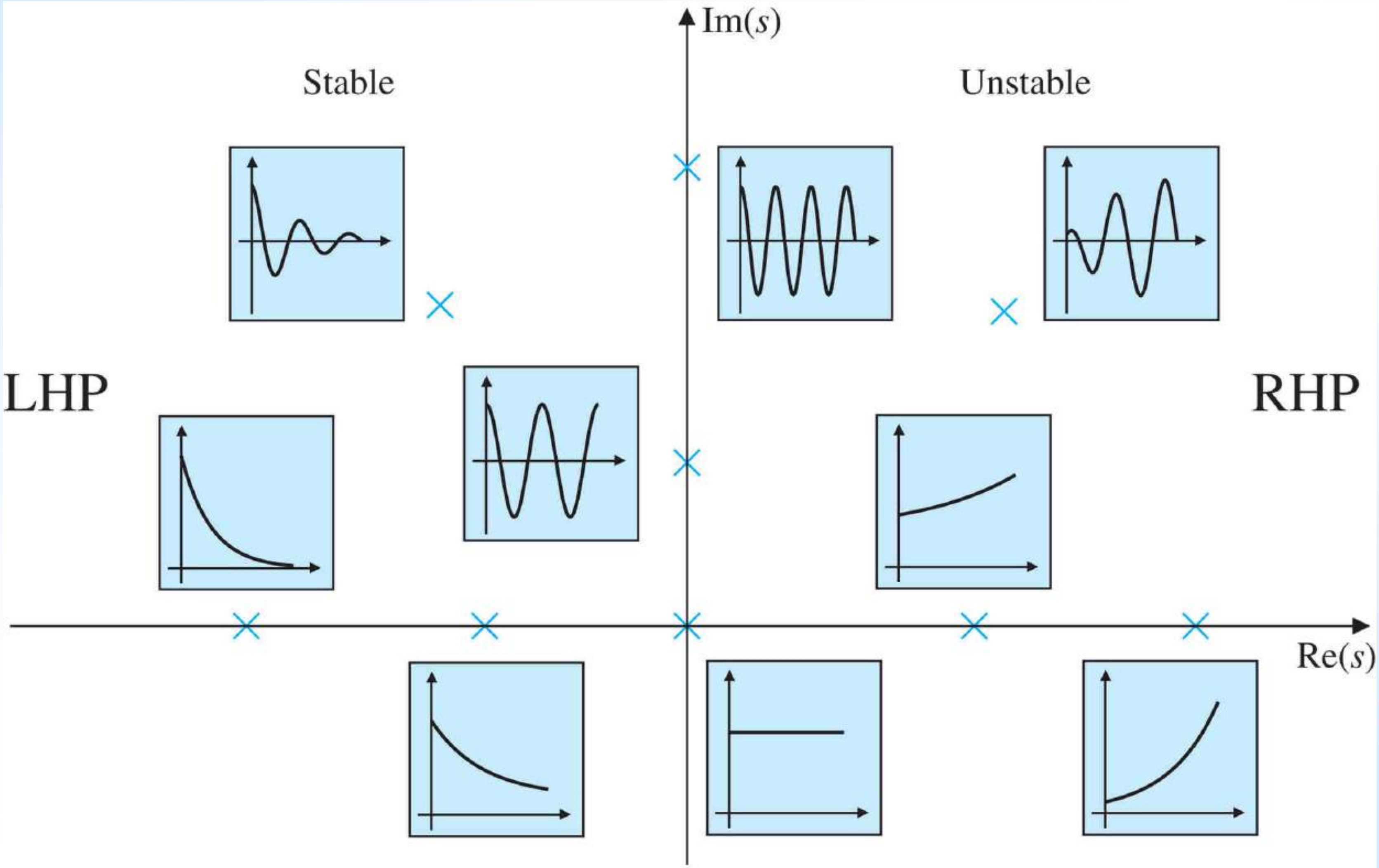
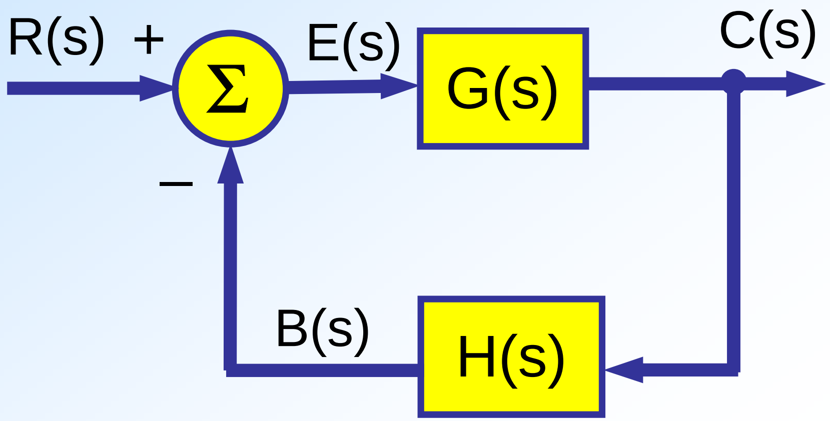



**Fig. 3.16 in G. F. Franklin, J. D. Powell, A. Emami-Naeini, Feedback Control of Dynamic Systems, 7e, Global Ed., Pearson Education, Ltd., 2015**

# Kalıcı Rejim Hatası

## Servomekanizma Problemi




AÇTF: $G_o(s) = G(s)H(s)$

KÇTF: $M(s) = \dfrac{C(s)}{R(s)} = \dfrac{G(s)}{1+G_o(s)}$

HataTF: $\dfrac{E(s)}{R(s)} = \dfrac{1}{1+G_o(s)}$

AÇTF aşağıdaki normalleştirilmiş biçimde yazılabilir

$$G_o(s) = \frac{K_{OL}\left(1+c_1 s+\cdots+c_p s^p\right)}{s^N\left(1+d_1 s+\cdots+d_q s^q\right)}$$

$K_{OL}$: açık çevrim kazancı, DC kazanç, kalıcı rejim kazancı

N : tip numarası (negatif olmayan bir tamsayı $N \geq 0$)

# Kalıcı Rejim Hatası

## Son Değer Teoremi

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0}\,[sF(s)]$$

sF(s)'in kutuplarının tümünün gerçek kısımları negatif ise geçerlidir.

Dolayısıyla, sadece kararlı sistemlere uygulanabilir.

## Hatanın kalıcı rejimdeki değeri

$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0}\,[sE(s)] = \lim_{s\to 0}\left[s\left(\frac{1}{1+G_0(s)}\right)R(s)\right]$$

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0}\left[\left(\frac{s}{1+\dfrac{K_{OL}\left(1+c_1 s+\cdots+c_p s^p\right)}{s^N\left(1+d_1 s+\cdots+d_q s^q\right)}}\right)R(s)\right] = \lim_{s\to 0}\left(\frac{s}{1+\dfrac{K_{OL}}{s^N}}R(s)\right)$$

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0}\left(\frac{s}{1+K_{OL}s^{-N}}R(s)\right)$$

$E_{ss}$'in değeri

N, $K_{OL}$ ve R(s)

tarafından belirlenir.

# Kalıcı Rejim Hatası

## Basamak Giriş

$$r(t) = r_0 h(t) \Rightarrow R(s) = \frac{r_0}{s}$$

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0}\left(\frac{s}{1+K_{OL}s^{-N}}\cdot\frac{r_0}{s}\right) \Rightarrow e_{ss} = \frac{r_0}{1+K_p}$$

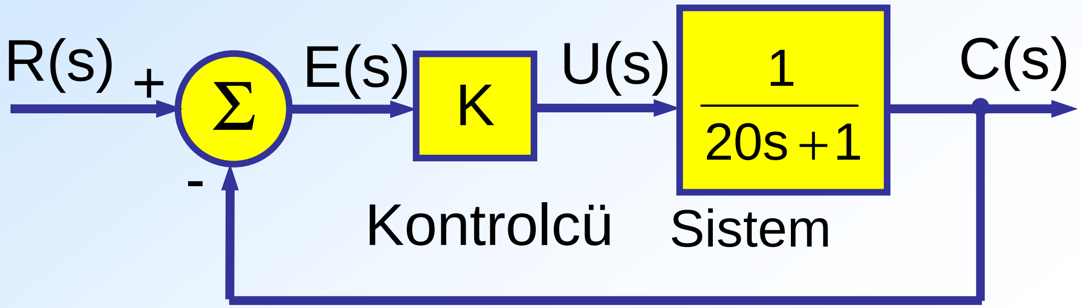
$K_p$ : konum hata katsayısı

$$K_p = K_{OL}\lim_{s\to 0}\left(s^{-N}\right)$$

| N | $K_p$ | $e_{ss}$ |
|---|---|---|
| 0 | $K_{OL}$ | $\frac{r_0}{1+K_{OL}}$ |
| $\geq 1$ | $\infty$ | 0 |

# Kalıcı Rejim Hatası

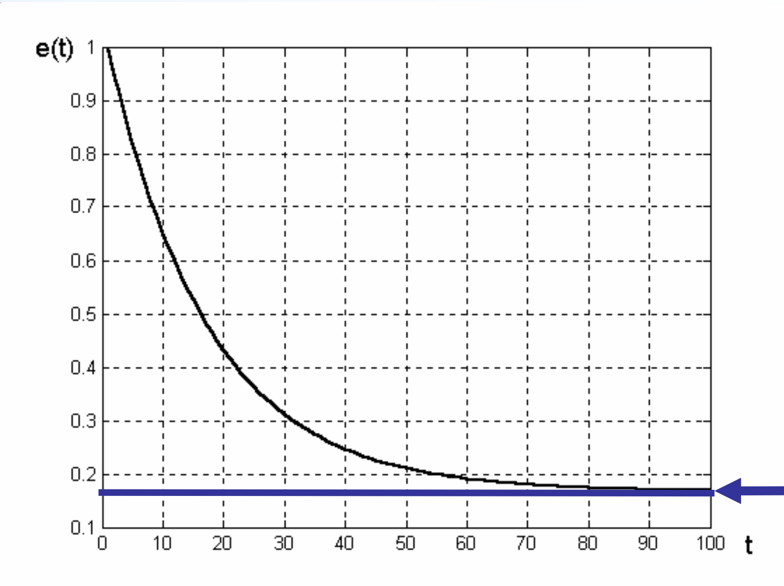
## Örnek




AÇTF: $G_0(s) = \dfrac{K}{20s+1} = \dfrac{K}{s^0(20s+1)}$

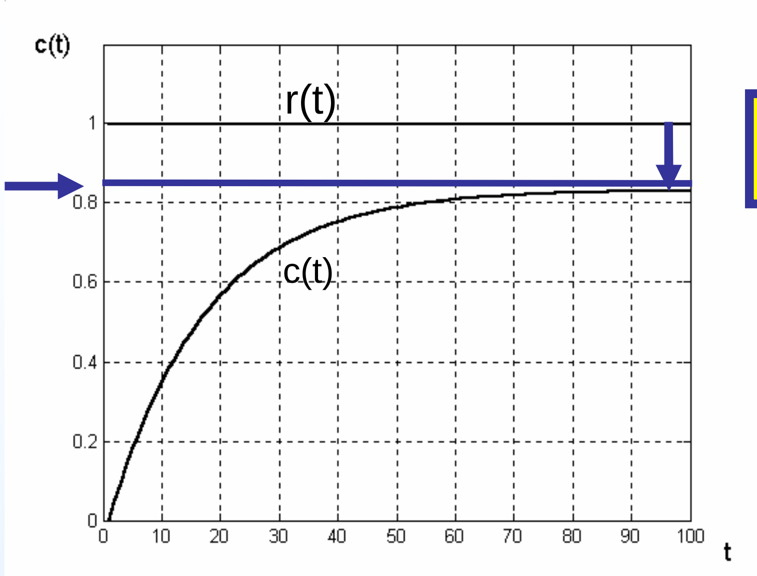
$\Rightarrow$ $N = 0 \quad \& \quad K_{OL} = K$

Karakteristik çokterimli: $D(s) = 20s + (K+1)$ $\Rightarrow$ Sistem K > -1 için kararlı




$e_{ss} = \dfrac{1}{1+K}$

$c_{ss} = \dfrac{K}{1+K}$




$e_{ss} = \dfrac{1}{1+K}$

kayma

# Kalıcı Rejim Hatası

## Rampa Giriş

$$r(t) = r_1 \, t \, h(t) \Rightarrow R(s) = \frac{r_1}{s^2}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} \left( \frac{s}{1 + K_{OL} s^{-N}} \cdot \frac{r_1}{s^2} \right) \Rightarrow e_{ss} = \frac{r_1}{K_v}$$

$K_v$ : hız hatası katsayısı

$$K_v = K_{OL} \lim_{s \to 0} \left( s^{1-N} \right)$$

| **N** | $\mathbf{K_v}$ | $\mathbf{e_{ss}}$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | $\infty$ |
| 1 | $K_{OL}$ | $r_1/K_{OL}$ |
| $\geq 2$ | $\infty$ | 0 |

# Kalıcı Rejim Hatası

## Parabolik Giriş

$$r(t) = \frac{1}{2} r_2 t^2 h(t) \Rightarrow R(s) = \frac{r_2}{s^3}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} \left( \frac{s}{1 + K_{OL} s^{-N}} \cdot \frac{r_2}{s^3} \right) \Rightarrow e_{ss} = \frac{r_2}{K_a}$$

$K_a$ : ivme hatası katsayısı

$$K_a = K_{OL} \lim_{s \to 0} \left( s^{2-N} \right)$$

| N | $K_v$ | $e_{ss}$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | $\infty$ |
| 1 | 0 | $\infty$ |
| 2 | $K_{OL}$ | $r_1/K_{OL}$ |
| $\geq 3$ | $\infty$ | 0 |

# Kalıcı Rejim Hatası

## Özet

| N | **Basamak** $r(t)=r_0h(t)$ | **Rampa** $r(t)=r_1th(t)$ | **Parabolik** $r(t)=0.5r_2t^2h(t)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | $\frac{r_0}{1+K_{OL}}$ | $\infty$ | $\infty$ |
| 1 | 0 | $\frac{r_1}{K_{OL}}$ | $\infty$ |
| 2 | 0 | 0 | $\frac{r_2}{K_{OL}}$ |
| 3 | 0 | 0 | 0 |

- Tip numarası arttıkça, kalıcı rejim başarımı düzelmekte
- AÇ kazancı arttıkça sonlu kalıcı rejim hatası azalmakta

# Dinamik Davranış

### Zamana göre

<u>Sistem yanıtının hızı:</u>
Sistem yanıtının ilk değerinden son değerine ne kadar hızlı eriştiği

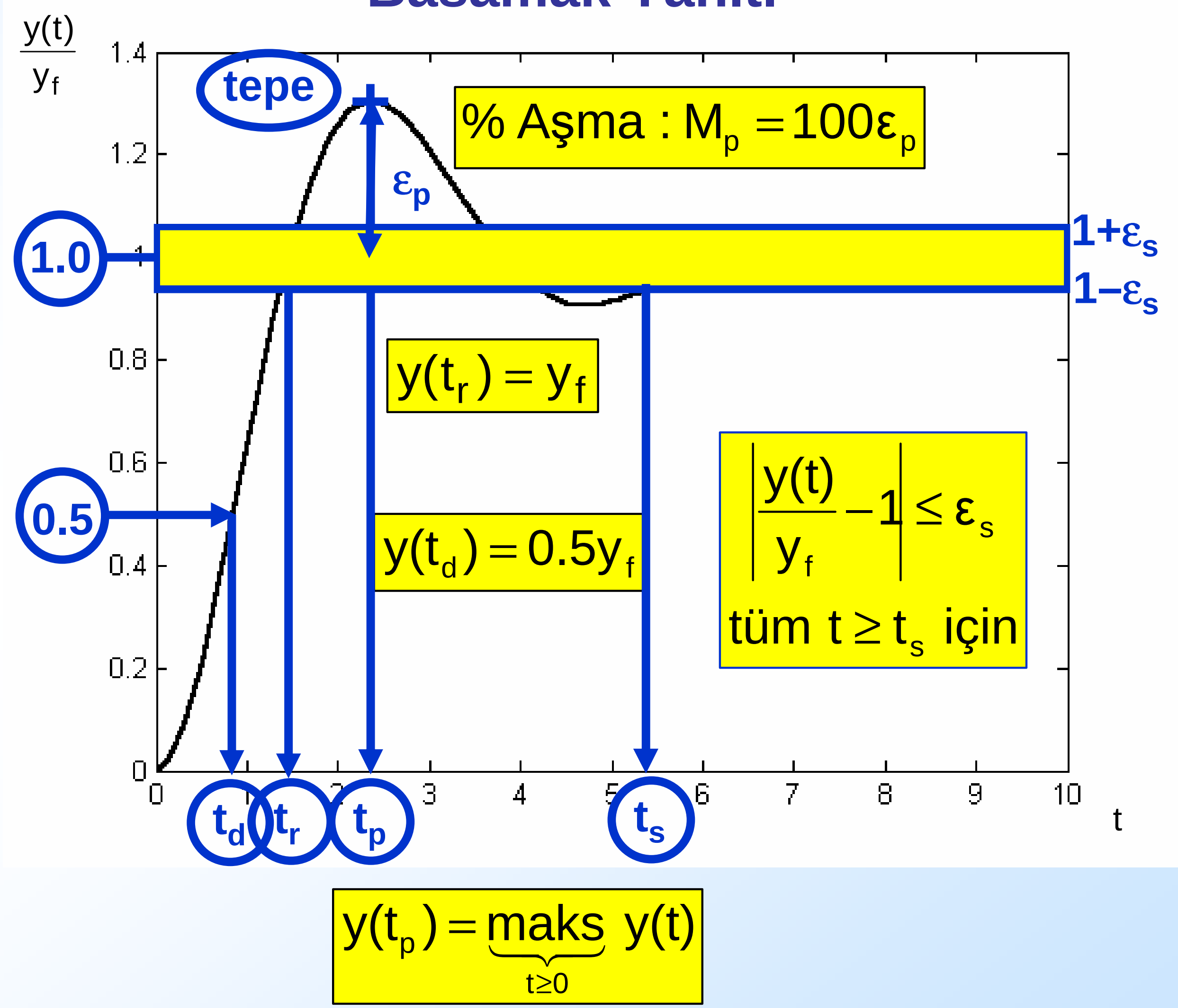
- Gecikme zamanı, $t_d$
- Yükselme zamanı, $t_r$
- Aşma zamanı, $t_p$
- Yerleşme zamanı, $t_s$

<u>Göreceli kararlılık:</u>

Sistem yanıtının ne kadar salınımlı ve/veya ne kadar aşmalı olduğu

- En fazla aşma, $M_p$
- Yerleşme zamanı, $t_s$

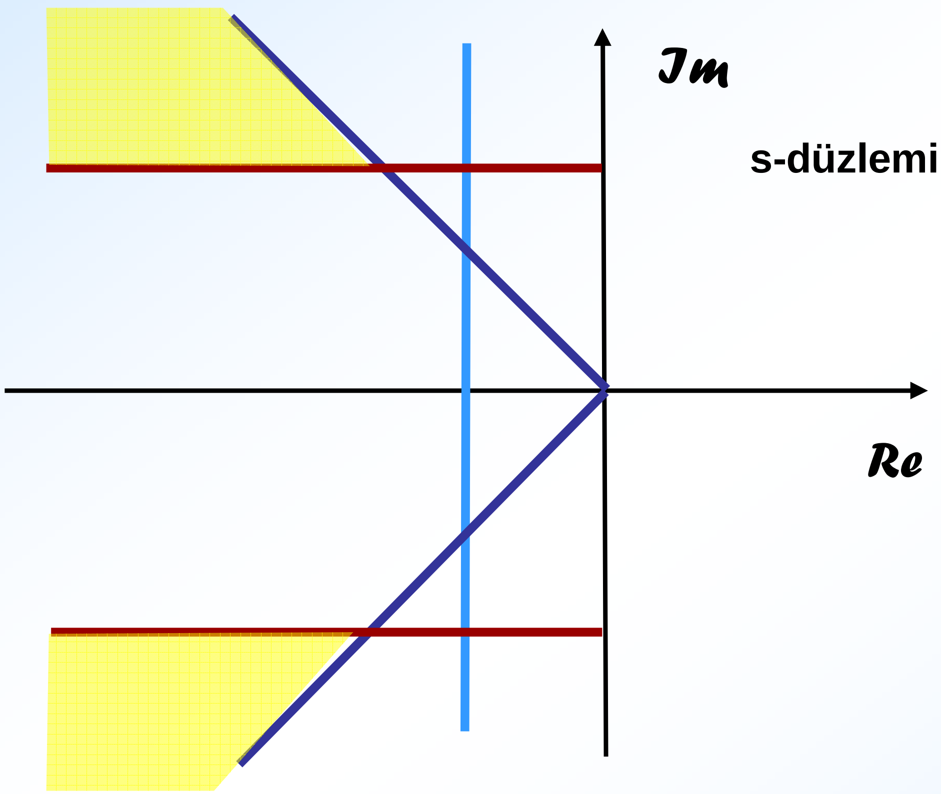
## Basamak Yanıtı



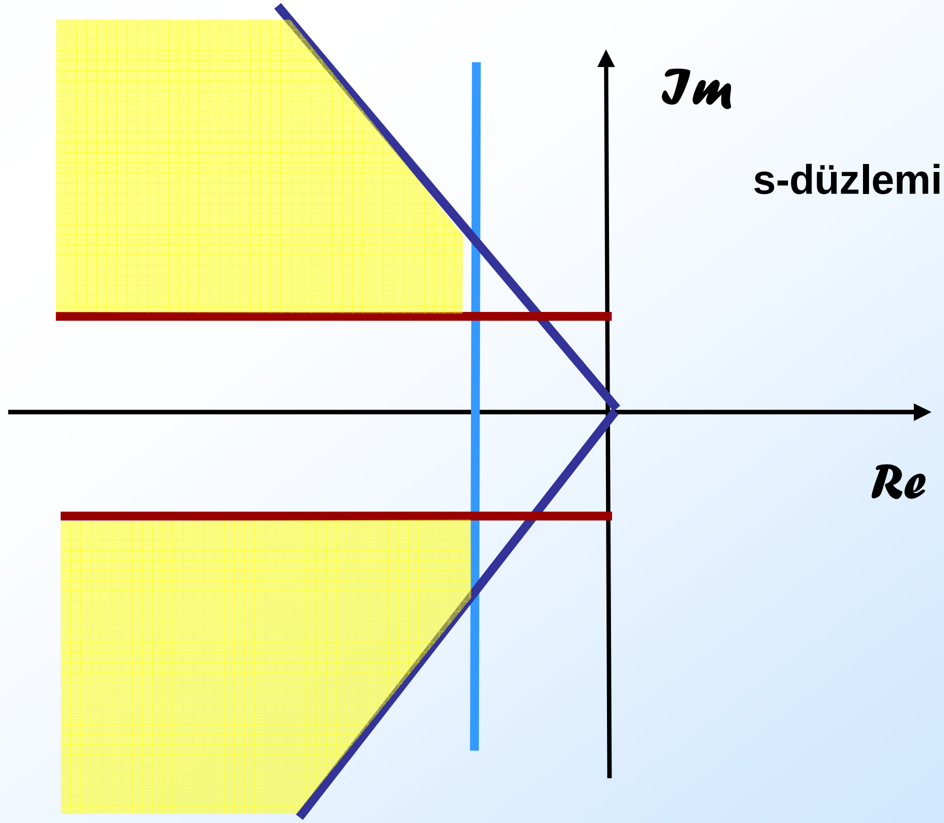
# Dinamik Davranış

## Dinamik Davranış İsterlerinin s-düzlemine İzdüşümü

$\varepsilon_p \leq \varepsilon_p^*$ $t_p \leq t_p^*$ $t_s \leq t_s^*$




Bölge Tipi 1




Bölge Tipi 2

# Dinamik Davranış

## Frekansa göre

Sistemin yanıt hızı: Sistemin anlamlı yanıtlar verebildiği hız bölgesi

- Bant genişliği, $\omega_b$
- Rezonans frekansı, $\omega_r$
- Kazanç geçiş frekansı, $\omega_g$
- Faz geçiş frekansı, $\omega_p$

Göreceli kararlılık: Sistem yanıtının kararlılık düzeyi

- Faz payı, FP
- Kazanç payı, KP

## Frekansa göre

Komut izleyebilme: Sistemin çalışma frekans bölgesinde verilen komutları izleyebilmesi

- Kazanç düzlüğü (± 3 dB)
- Faz farkı azlığı

Gürültü filitreleme: Sistem yanıtının çalışma frekansının üstündeki frekanslardaki gürültülere ne kadar duyarsız olduğu

- Bilgi/Gürültü oranı, S/N

Frekans maskeleme: Sistem yanıtının belli bir frekanstaki komutlara özellikle duyarsız olması

# Kontrolcü Tasarımı

## Verilen:

- Kontrol edilecek sistemin dinamiğinin modeli (transfer fonksiyonu) ve
- Sistem başarımı için bir dizi zaman/frekans yanıtı isterleri (tasarım özellikleri / başarım ölçütleri)
    - *Kontrol edilen sistemden beklentileri gösteren, net, ölçülebilir, matematiksel olarak ifade edilebilir bir ifade*

## İstenen:

- Kontrol stratejisinin (kapalı çevrim kontrolcünün türünün) ve
- bu kontrolcünün katsayılarının değerlerinin

kontrol edilecek sistemin verilen isterleri sağlayacak şekilde belirlenmesi.

# Kontrolcü Tasarımı

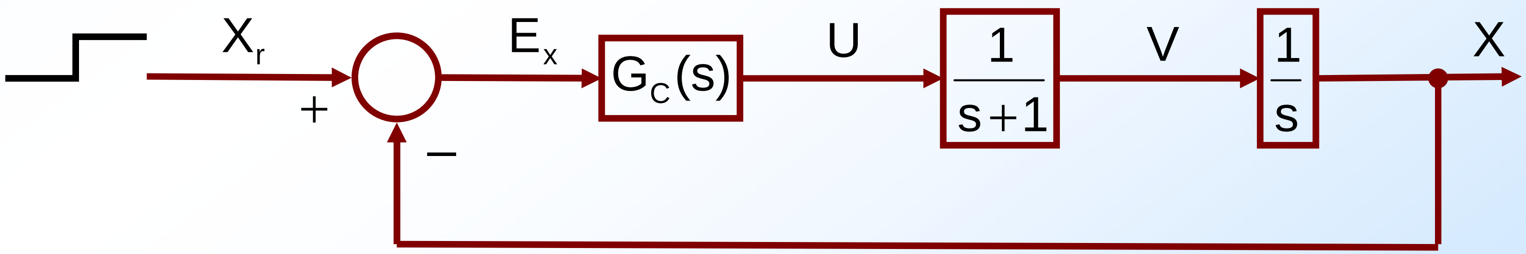
## Örnek

Vizkoz sürtünmeli (katsayısı b) bir tabla üzerinde hareket eden m kütlesine u kuvveti uygulanmaktadır. m'nin v hızı ile u arasındaki transfer fonksiyonu:

$$G_{VU}(s) = \frac{V(s)}{U(s)} = \frac{1}{ms + b}$$

m = 1 kg ve b = 1 N.s/m için bu kütlenin x konumu aşağıdaki isterleri sağlayacak şekilde kontrol edilmek istenmektedir: [Kütlenin anlık konumunun hatasız ölçülebildiği varsayılmalıdır (birim geri besleme)]

- Bir konumdan istenen diğer bir konuma gidebilmeli (basamak giriş)
- Son konumunda hiç bir hata olmamalı (kontrol sisteminin tip numarası 1 olmalı!)
- Konum değiştirirken hiç bir salınım olmamalı (sönümleme oranı $\zeta \geq 1$)
- Son konuma en yavaş 2 saniyede % 2 hata ile yaklaşabilmeli (yerleşme zamanı, $t_s \leq 2$ s)



## Örnek

**Çözüm:**

P-kontrolcüsü, $G_c(s) = K$ kullanalım. Niye?

Tasarım ölçütleri bu kontrolcüyle sağlanıyor mu? Tek tek bakalım:

o Son konumuna sıfır hatayla gidebilmeli

$$\text{AÇTF:}\quad G_{OL}(s) = \frac{K}{s(s+1)} \rightarrow \boxed{\text{Tip No.} = 1} \rightarrow \textbf{EVET!}$$

o Konum değiştirirken hiç bir salınım olmamalı

$$\text{KÇTF:}\quad G_{CL}(s) = \frac{K}{s^2+s+K} \rightarrow \zeta = 1 \rightarrow 2\zeta\omega_n = 1 \rightarrow \omega_n = 0.5 \rightarrow K = 0.25$$

$$\boxed{G_{CL}(s) = \frac{0.25}{s^2+s+0.25} = \frac{0.25}{(s+0.5)^2}} \rightarrow \textbf{EVET!}$$

o % 2 oturma zamanı 2 saniyeden kısa olmalı

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{(1)(0.5)} = 8s > 2s \rightarrow \textbf{HAYIR!}$$

**Bu 3 isterin karşılandığı başka bir K değeri olabilir mi?**

K'nın [0, ∞] aralığında değiştiğinde KÇ kutupların karmaşık s-düzleminde nasıl yer değiştirdiğine bakılmalı $\rightarrow$ **KÖK YER EĞRİSİ**

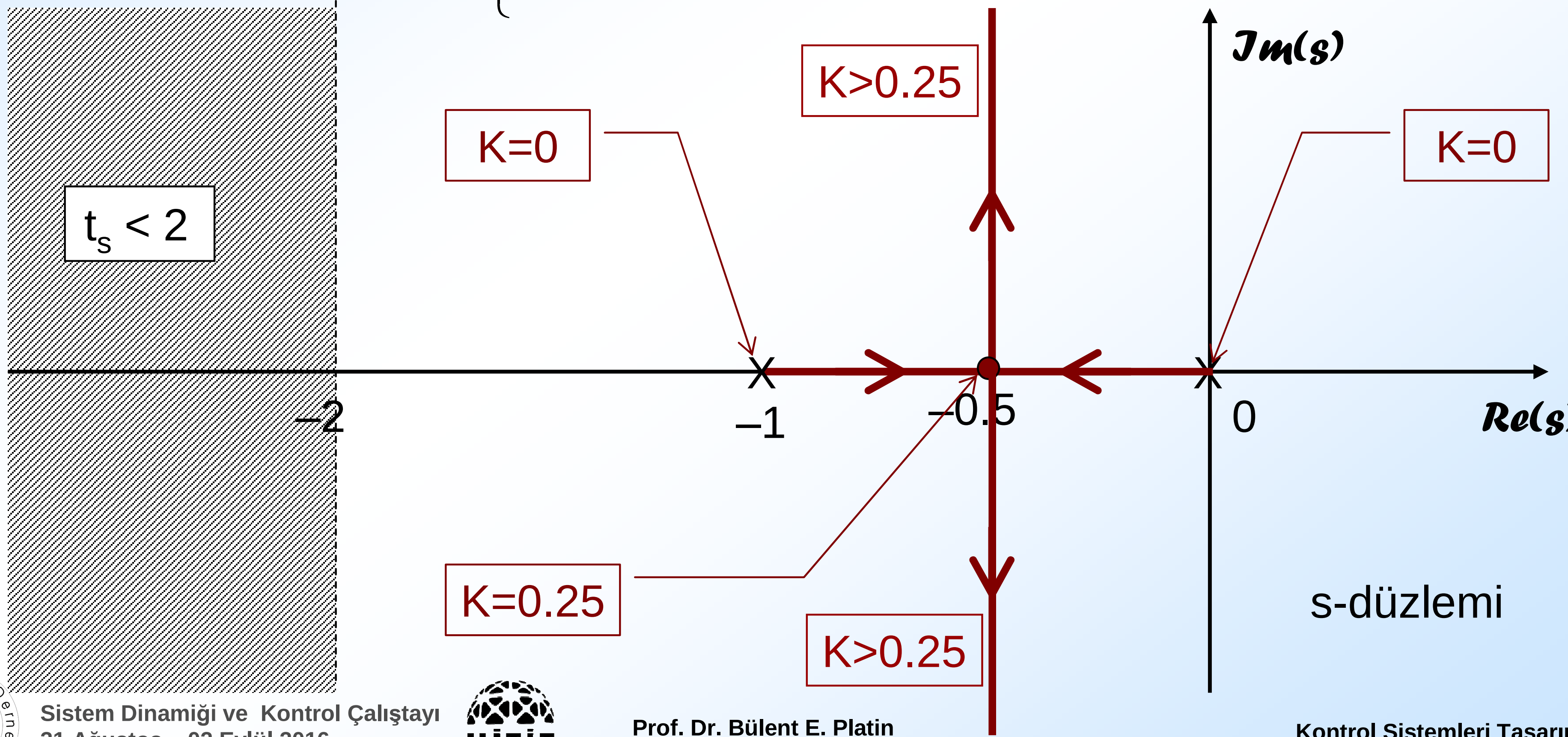
# Kontrolcü Tasarımı

## Kök Yer Eğrisi

KÇ kutupların s-düzlemindeki yerlerinin K'ya bağlı olarak değişiminin grafiksel gösterimi.

Karakteristik denklemin $s^2 + s + K = 0$ çözümü ile bulunur.

$$s_{1,2} = -0.5 \pm \sqrt{(0.5)^2 - K} = \begin{cases} -0.5 \pm \sqrt{(0.5)^2 - K} & \text{eğer } K < 0.25 \quad \text{(kritiküstü sönüm)} \\ -0.5 \text{ ve } -0.5 & \text{eğer } K = 0.25 \quad \text{(kritik sönüm)} \\ -0.5 \pm j\sqrt{K - (0.5)^2} & \text{eğer } K > 0.25 \quad \text{(kritikaltı sönüm)} \end{cases}$$



# Sorularınız