Kontrol Sistemleri Tasarımı

Kök Yer Eğrisi

Prof. Dr. Bülent E. Platin

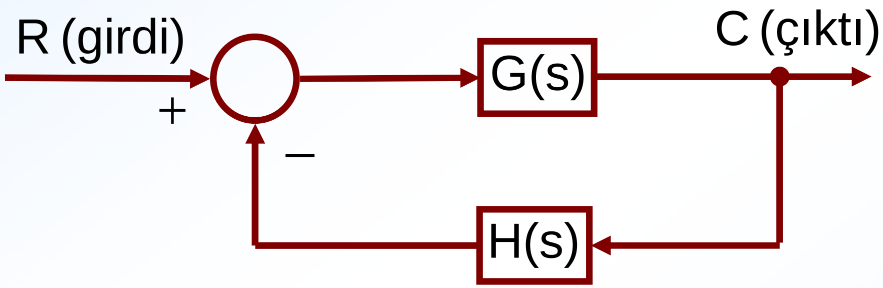
Sistem Dinamiği ve Kontrol Çalıştayı
31 Ağustos – 02 Eylül 2016

Kök Yer Eğrisi

Tanım

Verilen bir açık çevrim transfer fonksiyonu için açık çevrim kazancı K sıfırdan sonsuza değiştirildiğinde kapalı çevrim transfer fonksiyonunun kutuplarının karmaşık s-düzlemindeki geometrik yeri.

Bir geri beslemeli sistem için



açık çevrim transfer fonksiyonunun (AÇTF) standart kutup-sıfır-kazanç gösterimi:

$$G(s)H(s) = \frac{K\prod_{k=1}^{m}(s - z_k)}{\prod_{i=1}^{n}(s - p_i)} \quad , \quad K > 0$$

AÇTF'nin pay ve payındaki tüm faktörlerin s terimlerinin katsayılarının "1" olacak şekilde normalize edilmiş olduğuna dikkat ediniz.

burada K : Açık Çevrim Kazancı

z_k : Açık Çevrim Sıfırları (AÇS) - m tane

p_i : Açık Çevrim Kutupları (AÇK) - n tane

Kök Yer Eğrisi

Önemli bir nokta:

Kök yer eğrisini (KYE) hem AÇS hem de AÇK etkiler.

$$G(s)H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{K\prod_{k=1}^{m}(s-z_k)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}$$

AÇS : N(s) = 0 denkleminin kökleri

AÇK : D(s) = 0 denkleminin kökleri

Kapalı çevrim kutupları (KÇK) ise karakteristik denklemin kökleridir.

$$1 + G(s)H(s) = 0$$

ya da

$$D(s) + N(s) = 0$$

ya da

$$\boxed{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i) + K\prod_{k=1}^{m}(s-z_k) = 0} \quad \blacksquare$$

Kök Yer Eğrileri

Karakteristik denklem:

$$1 + G(s)H(s) = 0 \qquad \text{ya da} \qquad G(s)H(s) = -1$$

Dolayısıyla, kök yer eğrisinin yeni bir tanımı verilebilir.

Karmaşık s-düzleminde karakteristik denklemi sağlayan noktaların geometrik yeri.

G(s)H(s) karmaşık bir ifade olduğu için, karakteristik denklem genlik (modül) ve açı (argüman) cinsinden ifade edilebilir.

$$\left|G(s)H(s)\right| = 1 \qquad \text{Genlik (Modül) Koşulu}$$

$$\angle G(s)H(s) = \pm(2k+1)180^{\circ} \quad , \quad k = 0,1,2,... \qquad \text{Açı (Argüman) koşulu}$$

Genlik (Modül) Koşulu:

AÇTF'nin standart kutup-sıfır-kazanç gösterimi cinsinden yazılırsa:

$$K\prod_{k=1}^{m}\left|s - z_k\right| = \prod_{i=1}^{n}\left|s - p_i\right|$$

Bu ifade karmaşık s-düzleminin herhangi bir noktasında uygun bir K değeri seçerek sağlanabilir.

Dolayısıyla, bu kritik bir koşul değildir.

Kök Yer Eğrileri

Açı (Argüman) Koşulu:

AÇTF'nin standart kutup-sıfır-kazanç gösterimi cinsinden yazılırsa

$$\sum_{k=1}^{m} \angle(s-z_k) - \sum_{i=1}^{n} \angle(s-p_i) = \pm(2k+1)180^\circ \quad , \quad k = 0,1,2,...$$

Bu denklemde K bulunmadığına dikkat ediniz.

Bu koşulun karmaşık s-düzleminde rasgele seçilmiş bir noktada sağlanması beklenmemektedir. Diğer bir deyimle, bu koşul karmaşık s-düzleminin sadece bazı özel noktalarında sağlanabilir.

Dolayısıyla, Kök Yer Eğrisi (KYE) tanımı aşağıdaki gibi yenilenebilir.

Karmaşık s-düzleminde açı koşulunu sağlayan noktaların geometrik yeri.

O zaman, genlik koşulu ne işe yaramaktadır?

Bu koşul, KYE üzerindeki bir noktadaki K değerini bulmak için kullanılır!

Daha açık bir değişle:

Bu koşul, KYE üzerindeki bir KÇK konumuna karşın gelen K değerini bulmak için kullanılır!

Kök Yer Eğrileri

Örnek:

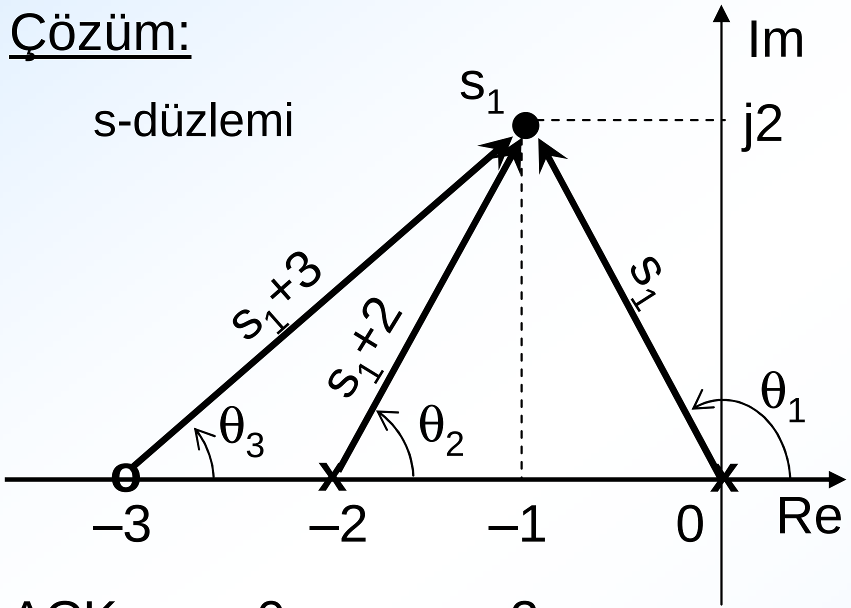
$s_1 = -1 + j2$ noktasının AÇTF'si yanda verilen bir geri besleme sisteminin KYE'si üzerinde olup olmadığını bulunuz.

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+3)}{s(s+2)}$$

Çevirisi: KÇK'dan birini sadece AÇ kazancını değiştirerek s_1'e yerleştirebilir miyiz?

Yanıt: Eğer –3'teki AÇS olmasaydı, "Evet"! NEDEN?

Çözüm:



AÇK: $p_1 = 0$ ve $p_2 = -2$
AÇS: $z_1 = -3$

Geometriyi kullanırsak,

$$\theta_1 + \theta_2 = 180^\circ \text{ ve } \theta_3 = 45^\circ$$

Açı koşulunu kullanırsak,

$$\theta_3 - (\theta_1 + \theta_2) = 45^\circ - 180^\circ = -135^\circ$$

Bu değer k'nın hiç bir pozitif tam sayı değeri için $\pm(2k+1)180^\circ$ olamayacaktır.

Dolayısıyla, $s_1 = -1 + j2$ bu sistemin bir KÇK'sı olamaz!

$\rightarrow$ Bu sistemin KYE'si s_1'den geçmez!

Kök Yer Eğrileri

Kurallar

KURAL 1: Kural numaraları önem ya da öncelik göstermemektedir.

KYE'nin karakteristik denklemin derecesi kadar kolu vardır.

$1 + G(s)H(s) = 0 \quad \rightarrow \quad D(s) + N(s) = 0 \quad \rightarrow \quad \text{maks}(n,m) = \text{kol \#}$

KURAL 2:

KYE'nin n adet kolu K = 0 için AÇK'dan başlar.

Fiziksel gerçekleştirilebilir sistemlerde $n \geq m$'dir. $\rightarrow$ Tüm kollar AÇK'dan başlar.

Eğer $m > n$ ise, kol sayısı m'dir. Bunlardan n adeti AÇK'dan, geri kalanlar $(m–n)$ ise ∞'dan başlar.

KURAL 3:

KYE'nin m adet kolu K = ∞ için AÇS'de biter.

Fiziksel gerçekleştirilebilir sistemlerde $n \geq m$'dir. $\rightarrow$ Bunlardan m adeti AÇS'de, geri kalanı $(n–m)$ ise ∞'da biter.

Eğer $m > n$ ise, tüm kollar AÇS'de biter.

Kurallar

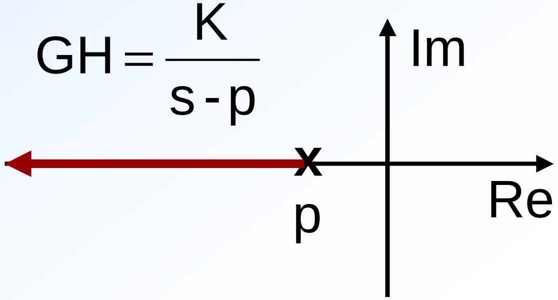
KURAL 4:

Gerçek eksenin, sağındaki AÇK ve AÇS sayıları toplamı tek olan bölümleri KYE'ye aittir.

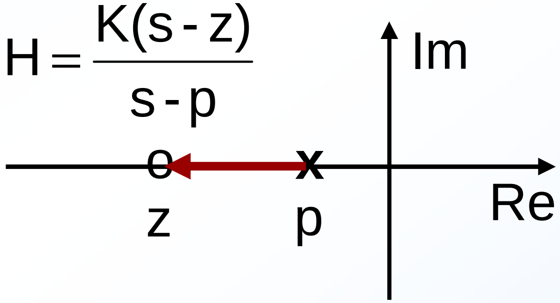
Karmaşık AÇK ve AÇS'lerin gerçek eksen üzerindeki KYE kollarının konumuna herhangi bir katkısı yoktur.

Örnekler:

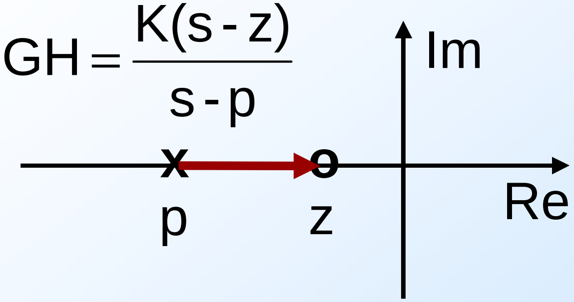
$$GH = \frac{K}{s-p}$$



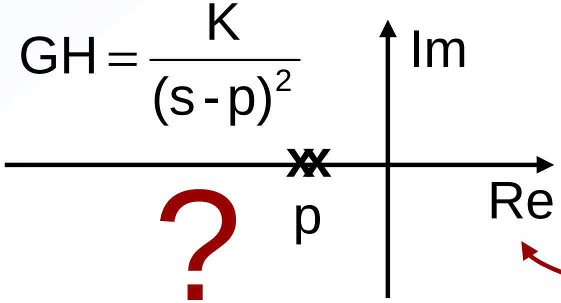
$$GH = \frac{K(s-z)}{s-p}$$



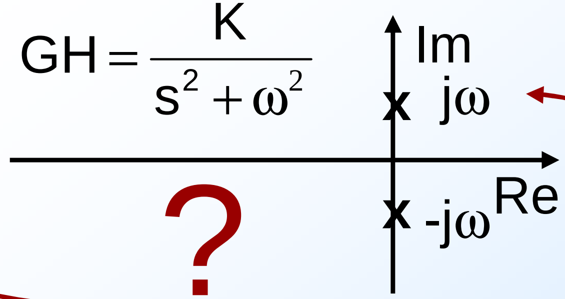
$$GH = \frac{K(s-z)}{s-p}$$



$$GH = \frac{K}{(s-p)^2}$$



$$GH = \frac{K}{s^2+\omega^2}$$



Gerçek eksenin hiç bir parçası KYE kolu değildir.

Kök Yer Eğrileri

Kurallar

KURAL 5:

KYE üzerinde iki ya da daha fazla kolun birleştiği ve/veya ayrıldığı özel noktalar bulunabilir. Bunlara <u>eyer noktası</u> denir. Eyer noktaları katlı KÇK'lara karşın gelirler.

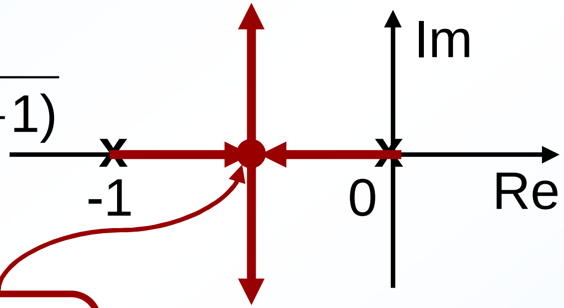
Eyer noktaları d[G(s)H(s)]/ds = 0 çözümlerinden açı koşulunu sağlayanlardır.

Eyer noktalarında, q adet kol birbirine göre 360°/q açı ile bu noktalarda birleşirler ve/veya ayrılırlar. Birleşen ve ayrılan kolların açısal oluşumları birbirine göre 180°/q kayıktır.

<u>Dikkat:</u> Eyer noktaları gerçek eksen üzerinde olmak zorunda değildir.

Örnek:

$$GH = \frac{K}{s(s+1)}$$



$$\frac{d}{ds}[G(s)H(s)] = \frac{d}{ds}\left[\frac{K}{s(s+1)}\right] = -\frac{K(2s+1)}{s^2(s+1)^2} = 0$$

$$\boxed{s = -\frac{1}{2}} \;, \quad q = 2 \quad , \quad \text{ayrılma açısı}: \frac{360^\circ}{q} = 180^\circ \quad , \quad \text{kayma açısı}: \frac{180^\circ}{q} = 90^\circ$$

Kök Yer Eğrisi

Kurallar

KURAL 6:

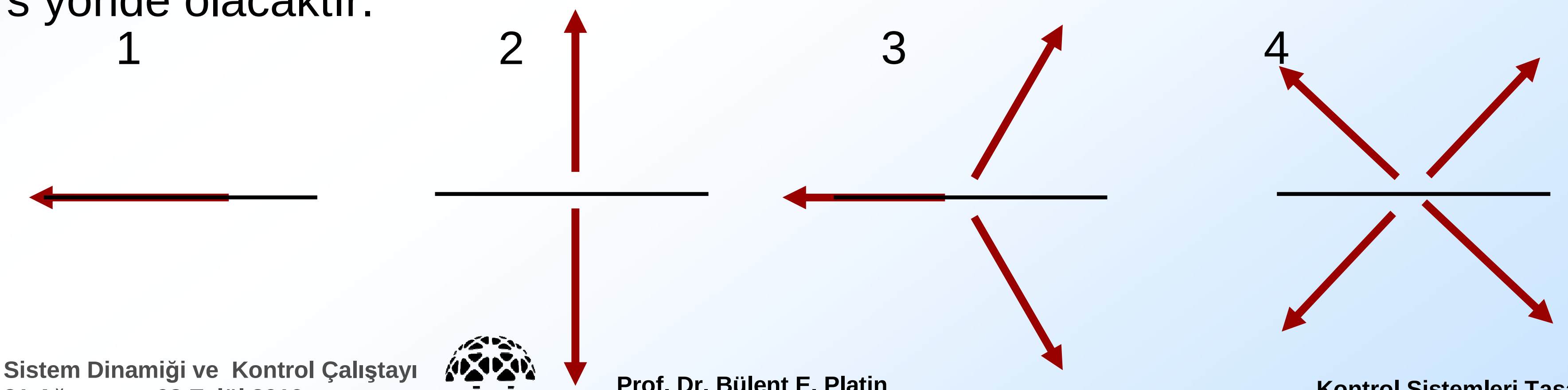
Eğer $m \neq n$ ise, büyük s değerleri için $|n – m|$ sayıda kol sonsuza gider ($n > m$) ya da sonsuzdan gelir ($n < m$). Bu kolların sonsuza gidişleri ya da sonsuzdan gelişleri gerçel eksenle θ_k açısı yapan ve <u>merkez</u> diye adlandırılan $s = \sigma_a$ noktasından geçen doğrulara asimtotiktir.

$$\theta_k = \frac{(2k+1)180^\circ}{|n-m|} \quad ; \quad k = 0,1,2,...; |n-m|-1 \qquad \text{ve} \qquad \sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{k=1}^{m} z_k}{n-m}$$

$n = m$ olası durumunda, asimtot yoktur.

Karmaşık AÇK ve AÇS'ların yalnızca gerçel kısımları σ_a'ya katkıda bulunur.

İlk 4 n-m değeri için asimtot yerleşimleri aşağıda verilmiştir. Eksi değerler için oklar ters yönde olacaktır.



Kök Yer Eğrisi

Kuralllar

KURAL 7:

KYE gerçel eksene göre simetriktir.

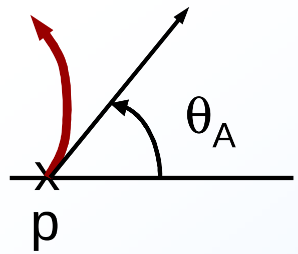
Temel neden KÇK'ların ya gerçel ve/veya karmaşık eşlenik olmasıdır.

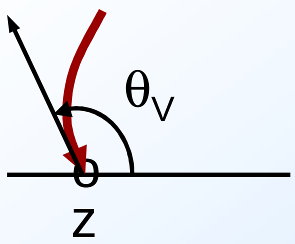
KURAL 8:

AÇK'lardan ayrılış ve AÇS'lara varış açıları aşağıdaki gibidir.

$$\theta_A = 180^\circ + \lim_{s \to p} \arg[G(s)H(s)(s-p)]$$

$$\theta_V = 180^\circ - \lim_{s \to z} \arg[G(s)H(s)/(s-z)]$$





AÇK'ların ve/veya AÇS'ların q adet katlı olması durumunda, bu ifadeler aşağıdaki şekilde kullanılmalıdır.

$$q\theta_A = (2k+1)180^\circ + \lim_{s \to p} \arg[G(s)H(s)(s-p)^q] \quad ; \quad k = 0,1,\ldots,q-1$$

$$q\theta_V = (2k+1)180^\circ - \lim_{s \to z} \arg[G(s)H(s)/(s-z)^q] \quad ; \quad k = 0,1,\ldots,q-1$$

Kök Yer Eğrisi

Kurallar

KURAL 9:

KYE kollarının sanal ekseni kestiği noktalara karşın gelen ω ve K değerleri aşağıdaki iki yöntemden biri kullanılarak elde edilir.

1. Routh-Hurwitz ölçütünde marjinal kararlılık koşulu kullanılır.
2. Karakteristik denklemde $s = j\omega$ kullanılarak bulunan karmaşık denklem çözülür.

KURAL 10:

$n \geq m + 2$ olması durumunda sistem kutuplarının toplamının korunumu.

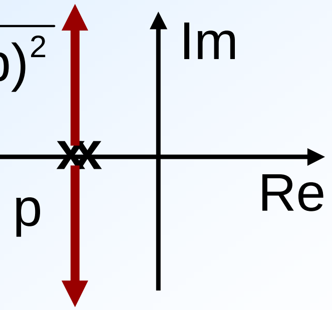
$$\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\right)_{CL} = \left(\sum_{i=1}^{n} p_i\right)_{OL}$$

Bu kural, K değiştikçe bazı kollar sağa doğru gidiyorsa, diğer bazı kolların sağa doğru giden bu kolları dengeleyecek şekilde sola doğru gideceğini işaret etmektedir.

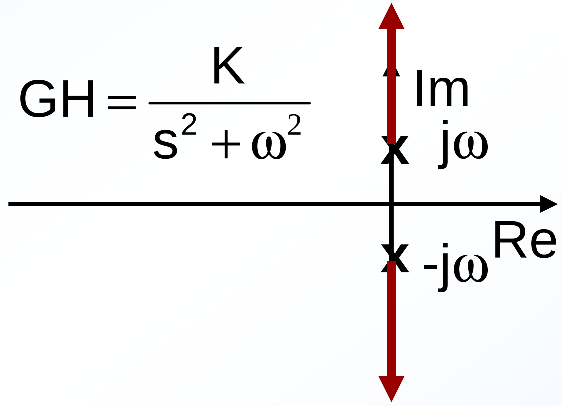
Kök Yer Eğrisi

Örnekler

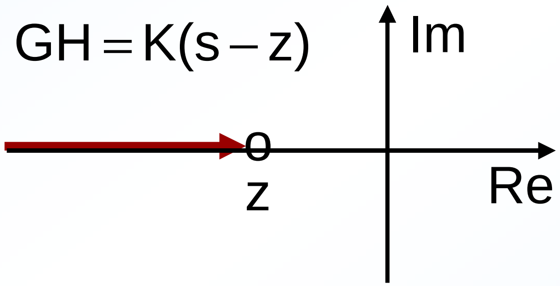
$$GH=\frac{K}{(s-p)^2}$$



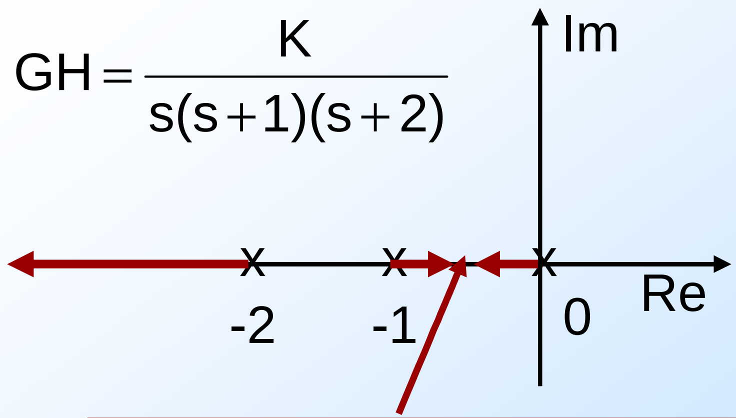
$$GH=\frac{K}{s^2+\omega^2}$$



$$GH=K(s-z)$$



$$GH=\frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$



Tam ortada mı birleşirler?
Sonra nereye giderler?

Kök Yer Eğrisi

Örnek:

$$GH = \frac{K}{s(s+1)(s+2)} \quad \rightarrow \quad \text{3 AÇK } (p_1 = 0,\ p_2 = -1,\ p_3 = -2) \text{ \& AÇS yok!}$$

1. n = 3, m = 0 $\rightarrow$ 3 kol bulunmakta.
2. Kollar $p_1 = 0$, $p_2 = -1$, $p_3 = -2$ noktalarından başlamakta.
3. m = 0 olduğu için tüm kollar ∞'da sonlanmakta.
4. Gerçel eksenin [–∞ , –2] ve [–1 , 0] bölümleri KYE kollarına ait.
5. Eyer noktaları için d[G(s)H(s)]/ds = 0 denklemi çözülmeli.

$$\frac{d}{ds}\left[s(s+1)(s+2)\right] = 3s^2 + 6s + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad s_{1,2} = -1 \pm 1/\sqrt{3} = \begin{cases} \boxed{-0.423} & \text{KYE'de} \\ \cancel{1.577} & \text{KYE'de değil} \end{cases}$$

6. n – m = 3 – 0 = 3 adet asimtot var. Açılar: 60°, 180°, 300° (–60°)

   Merkezin konumu: $\sigma_a = [(0-1-2)-(\ )]/(3-0) = -1$
7. √
8. Ayrılış ve varış açılarını hesaplamaya gerek yok.
9. Kolların sanal ekseni kestiği noktalar için karakteristik denklemi kullanalım.

   $1 + G(s)H(s) = 0 \quad \rightarrow \quad s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0$

Kök Yer Eğrisi

Örnek:

$$GH = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$ Karakteristik denklem: $s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0$

Routh-Hurwitz:

Marjinal kararlılık koşulu: $(3)(2) = (1)(K) \rightarrow K = 6$

$K = 6$ ile karakteristik denklem: $s^3 + 3s^2 + 2s + 6 = (s+3)(s^2+2) = 0 \rightarrow s_{1,2} = \pm j\sqrt{2}$

$s_3 = -3$ iki kol sanal ekseni keserken üçüncü kolda gelinen noktayı verir.

KURAL 10'u hatırlayalım! $0 - 1 - 2 = 2(0) - 3$ √

Karakteristik denklemde $s = j\omega$ kullanımı:

$(j\omega)^3 + 3\,(j\omega)^2 + 2(j\omega) + 6 = (K - 3\omega^2) + j\omega(2 - \omega^2) = 0$

$K = 3\omega^2 \quad \& \quad \omega^2 = 2 \quad \rightarrow \quad \omega = \sqrt{2} \quad \& \quad K = 6$

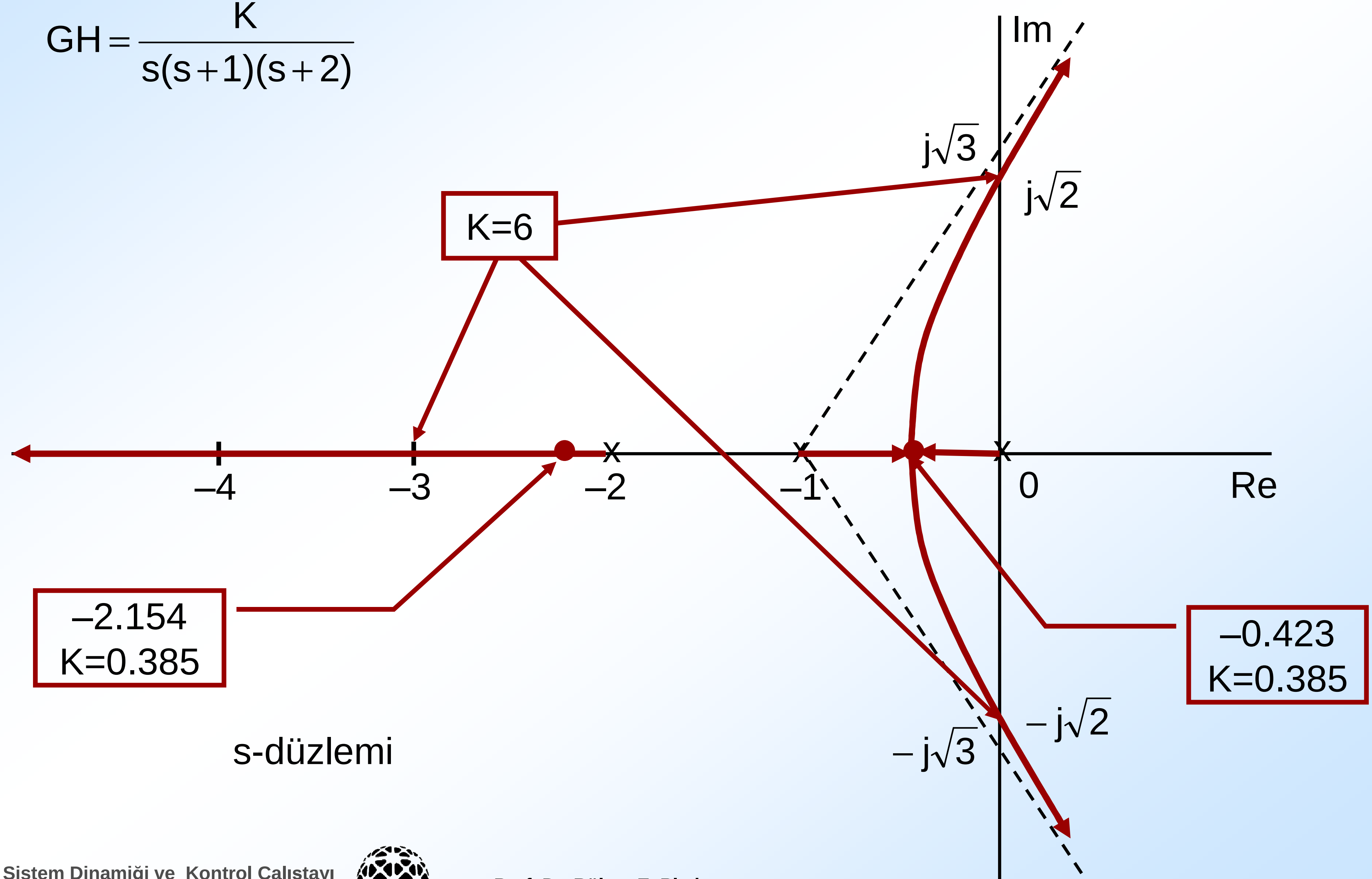
Bazı özel noktalarda K değerleri:

$s_1 = -3$	$\rightarrow$	$K = \lvert -3 \rvert . \lvert -3+1 \rvert . \lvert -3+2 \rvert = 6$	beklendik sonuç
$s_1 = -1$	$\rightarrow$	$K = \lvert -1 \rvert . \lvert -1+1 \rvert . \lvert -1+2 \rvert = 0$	beklendik sonuç
$s_1 = j\sqrt{2}$	$\rightarrow$	$K = \lvert j\sqrt{2} \rvert . \lvert j\sqrt{2}+1 \rvert . \lvert j\sqrt{2}+2 \rvert = \sqrt{2}\,\sqrt{3}\,\sqrt{6} = 6$	beklendik sonuç
$s_1 = -0.423$	$\rightarrow$	$K = \lvert -0.423 \rvert . \lvert -0.423+1 \rvert . \lvert -0.423+2 \rvert = 0.385$	

Kök Yer Eğrisi

Örnek:

$$GH = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$



Kök Yer Eğrisi

Örnek:

$$GH = \frac{K}{s(s+3)(s^2+2s+2)} \quad \rightarrow \quad 4 \text{ AÇK } (p_1 = 0,\ p_2 = -3,\ p_{3,4} = -1 \pm j) \text{ \& AÇS yok!}$$

1. $n = 4$, $m = 0$ $\rightarrow$ 4 kol var.
2. Kollar $p_1 = 0$, $p_2 = -3$, $p_{3,4} = -1 \pm j$ noktalarından başlamakta.
3. $m = 0$ olduğu için tüm kollar ∞'da sonlanmakta.
4. Gerçel eksenin [–3 , 0] bölümü bir KYE koluna ait.
5. Eyer noktaları için d[G(s)H(s)]/ds = 0 denklemi çözülmeli.

$$\frac{d}{ds}\left[s(s+3)(s^2+2s+2)\right] = 4s^3 + 5s^2 + 16s + 6 = 0 \quad \rightarrow \quad s_{1,2,3} = \begin{cases} \boxed{-2.29} \\ \cancel{-0.731 \pm j0.348} \end{cases}$$

Eyer noktasındaki K değeri: K = –(–2.29)(–2.29+3)[(–2.29)2+2(–2.29)+2] = 4.33

6. $n - m = 4 - 0 = 4$ adet asimtot var. Açılar: 45°, 135°, 225°, 315°

Merkezin konumu: $\sigma_a = \dfrac{(0-3-1-1)-()}{4-0} = -1.25$

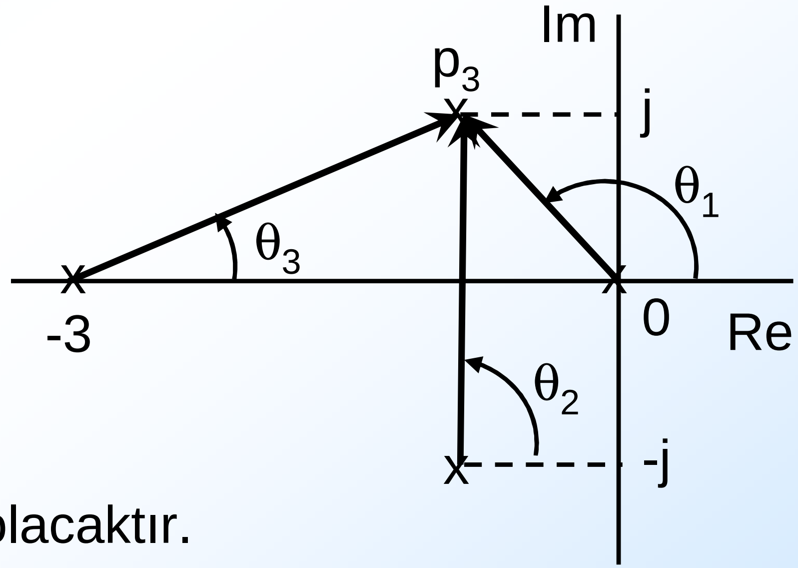
7. √
8. Karmaşık AÇK'lardan ayrılış açılarının hesaplanması gerekiyor. Ancak, Kural 7 nedeniyle bunlardan yalnızca birinin hesaplanması yeterli olacak.

Kök Yer Eğrisi

Örnek:

$$GH = \frac{K}{s(s+3)(s^2+2s+2)}$$

8. $p_3 = -1 + j$ den ayrılış açısı



$$\theta_A = 180^\circ + (-\theta_1 - \theta_2 - \theta_3)$$

$$\theta_A = 180^\circ + \left[-135^\circ - 90^\circ - \underbrace{\tan^{-1}(1/2)}_{26.6^\circ} \right]$$

$$\theta_A = -71.6^\circ (288.4^\circ)$$

Dolayısıyla, $p_4 = -1 - j$ den ayrılış açısı $+71.6°$ olacaktır.

Kök Yer Eğrisi

Örnek:

$$GH = \frac{K}{s(s+3)(s^2+2s+2)}$$

9. Sanal eksen kesim noktaları karakteristik denkleme dayalı Routh tablosu kullanılarak bulunabilir.

$$1 + G(s)H(s) = 0 \quad \rightarrow \quad s^4 + 5s^3 + 8s^2 + 6s + K = 0$$

s^4	1	8	K
s^3	5	6	
s^2	34/5	K	
s^1	6-25K/34		
s^0	K		

Marjinal kararlılık için:

$$6 - 25K/34 = 0 \quad \rightarrow \quad K = 204/25 = 8{,}16$$

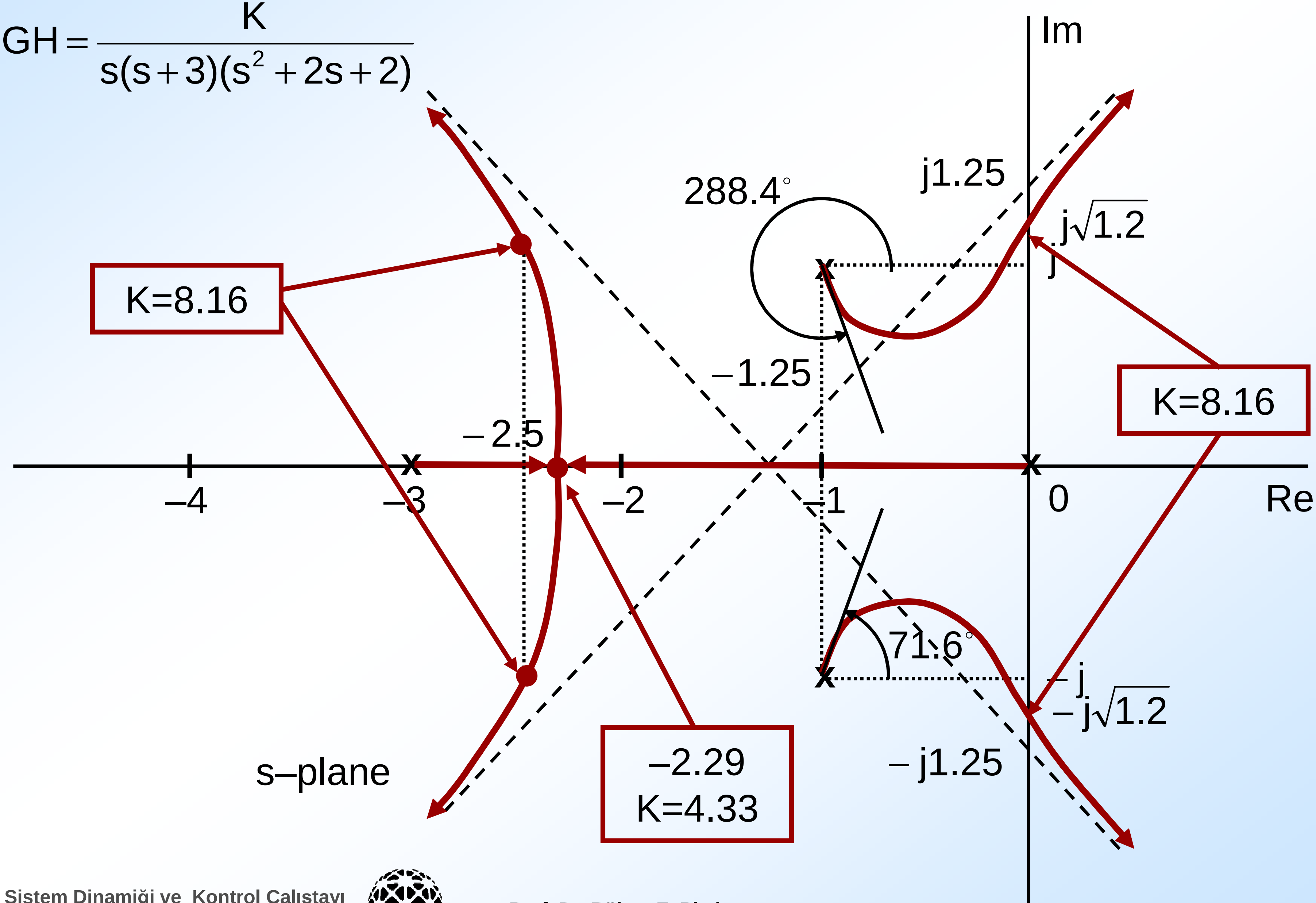
Yedek denklem:

$$(34/5)s^2 + 8{,}16 = 0 \quad \rightarrow \quad s = \pm j\sqrt{1.2} \cong \pm j1{,}095$$

Kök Yer Eğrisi

Örnek:

$$GH = \frac{K}{s(s+3)(s^2+2s+2)}$$



Kök Yer Eğrisi

Örnekler:

$$GH = \frac{K}{s(s+2)(s^2+2s+4)}$$

$$GH = \frac{K}{s(s+2)(s^2+2s+2)}$$

Kök Yer Eğrisi

Kök Yer Eğrilerinde Çembersel Kollar

Aşağıdaki koşulların tümünün sağlandığı durumlarda, kök yer eğrileri kollarının gerçek eksen üzerinde olmayan bölümleri çembersel yaylar şeklinde oluşur.

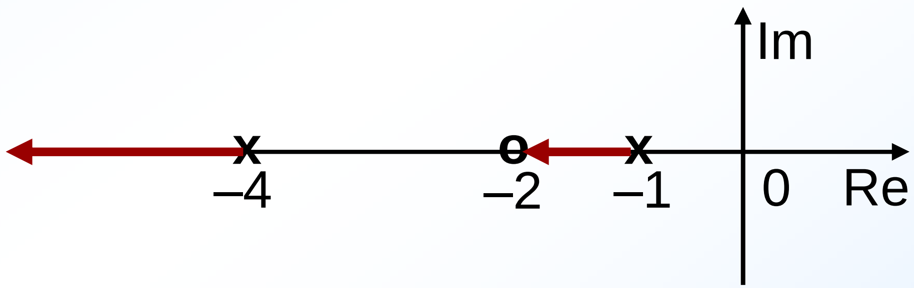
i. Bazıları ya da tümü gerçel ve/veya karmaşık olan (2 AÇK + 2 AÇS) ya da (2 AÇK + 1 AÇS) ya da (1 AÇK + 2 AÇS)

ii. 2 gerçek AÇK ve/veya 2 gerçek AÇS arasında birer/bir eyer

iii. AÇK'ların toplamı ve AÇS'lerin toplamı farklı değerler

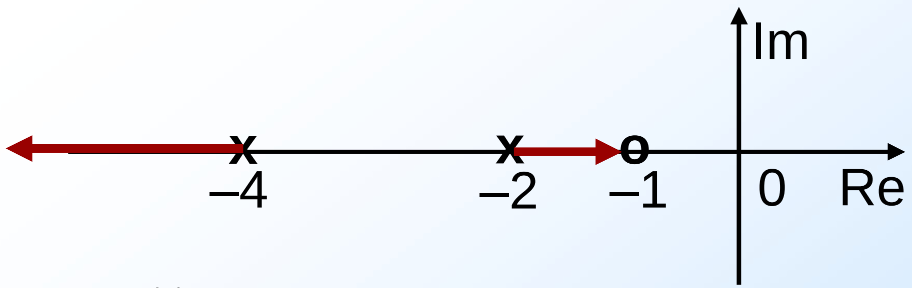
Örnekler:

$$GH = \frac{K(s+2)}{(s+1)(s+4)}$$



eyer yok → çember yok

$$GH = \frac{K(s+1)}{(s+2)(s+4)}$$



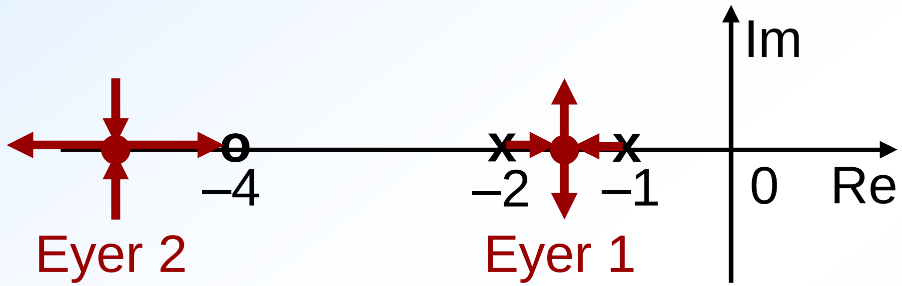
eyer yok → çember yok

Kök Yer Eğrisi

Kök Yer Eğrilerinde Çembersel Kollar

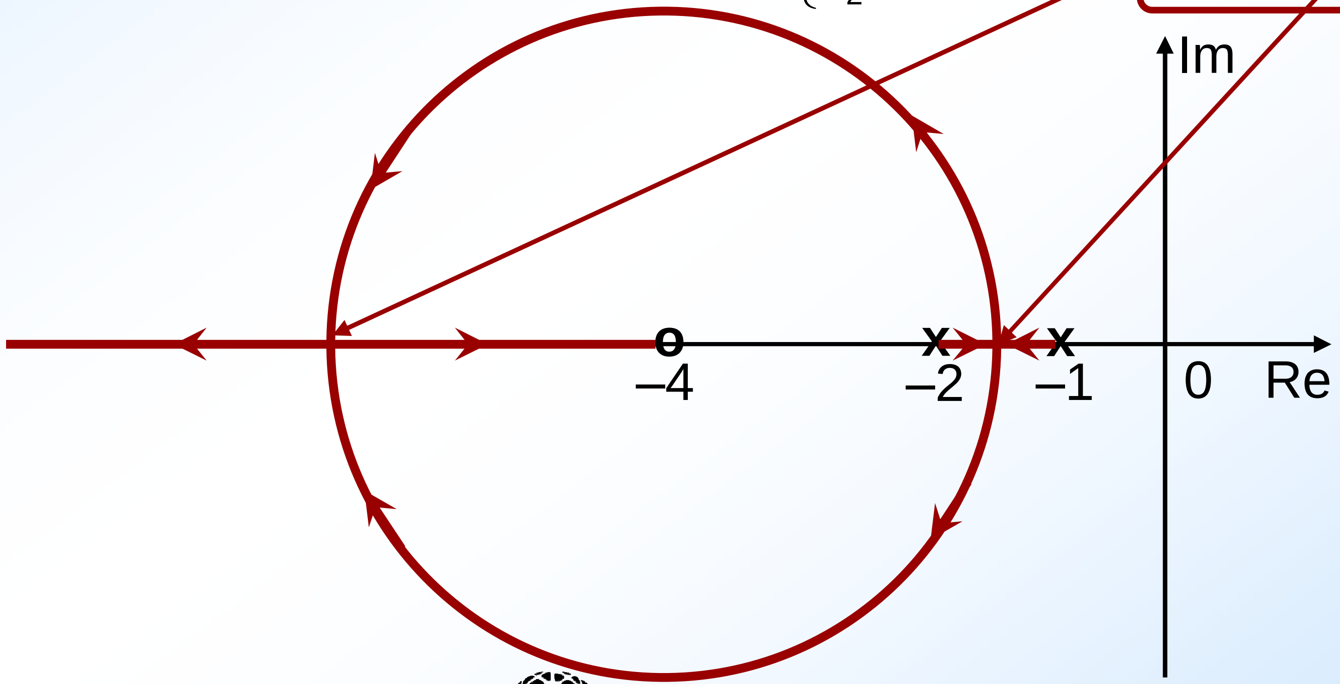
Örnek:

$$GH = \frac{K(s+4)}{(s+1)(s+2)}$$



2 eyer noktası

$$d(GH)/ds \rightarrow s^2 + 8s + 10 = 0 \rightarrow \begin{cases} s_1 = -4 + \sqrt{6} \cong \boxed{-1.55 \quad \rightarrow \quad K_1 = 0.101} \\ s_2 = -4 - \sqrt{6} \cong \boxed{-6.45 \quad \rightarrow \quad K_2 = 9.90} \end{cases}$$



s_1 ve s_2 ifadeleri çemberin merkezinin –4'de ve yarıçapının da $\sqrt{6}$ olduğunu işaret etmektedir.

Kök Yer Eğrisi

Kök Yer Eğrilerinde Çembersel Kollar

AÇK ve AÇS'ları p_1, p_2, z_1, z_2 olarak adlandıralım.

Çemberin merkezi:

$$\frac{z_1 z_2 - p_1 p_2}{z_1 + z_2 - (p_1 + p_2)}$$

Eğer yalnızca bir adet AÇK ya da AÇS varsa (bu durumda diğer AÇK ya da AÇS ∞'da demektir), çemberin merkezi var olan bu AÇK'da ya da AÇS'de olacaktır.

Çemberin yarıçapı:

$$\frac{\sqrt{(ZR - PU)(Z - P) + (R - U)^2}}{|Z - P|}$$

burada $P = p_1 + p_2$, $R = p_1 p_2$, $Z = z_1 + z_2$, $U = z_1 z_2$

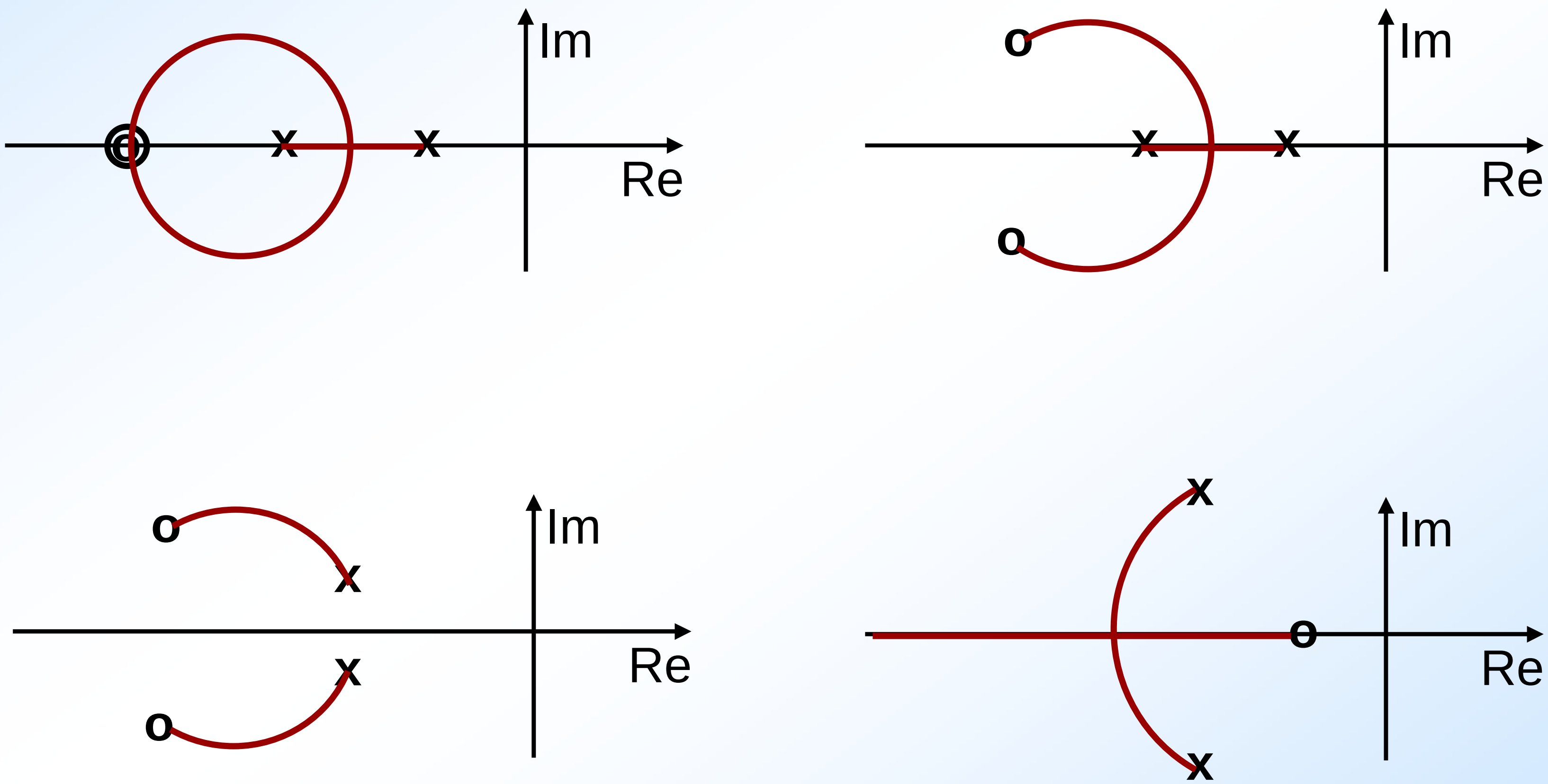
Eğer yalnızca bir adet AÇK ya da AÇS varsa, çemberin yarıçapı

$$\sqrt{(p_1 - z)(p_2 - z)} \qquad \text{yada} \qquad \sqrt{(p - z_1)(p - z_2)}$$

olacaktır.

Kök Yer Eğrilerinde Çembersel Kollar

Bazı Örnekler:

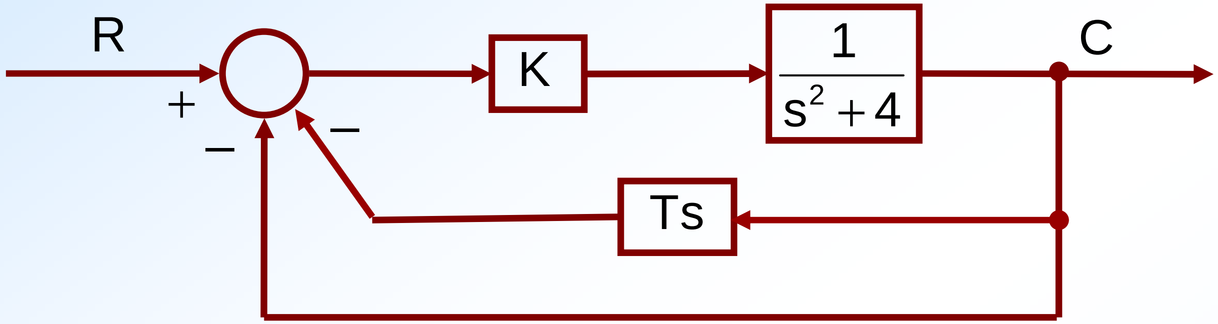


Kök Yer Eğrisi

Herhangi Bir Parametreye Göre Kök Yer Eğrisi

Örnek:

Aşağıdaki P-kontrolcü kullanılan, ancak konumla birlikte hız geri beslemesi de yapılan sistemi göz önüne alalım.



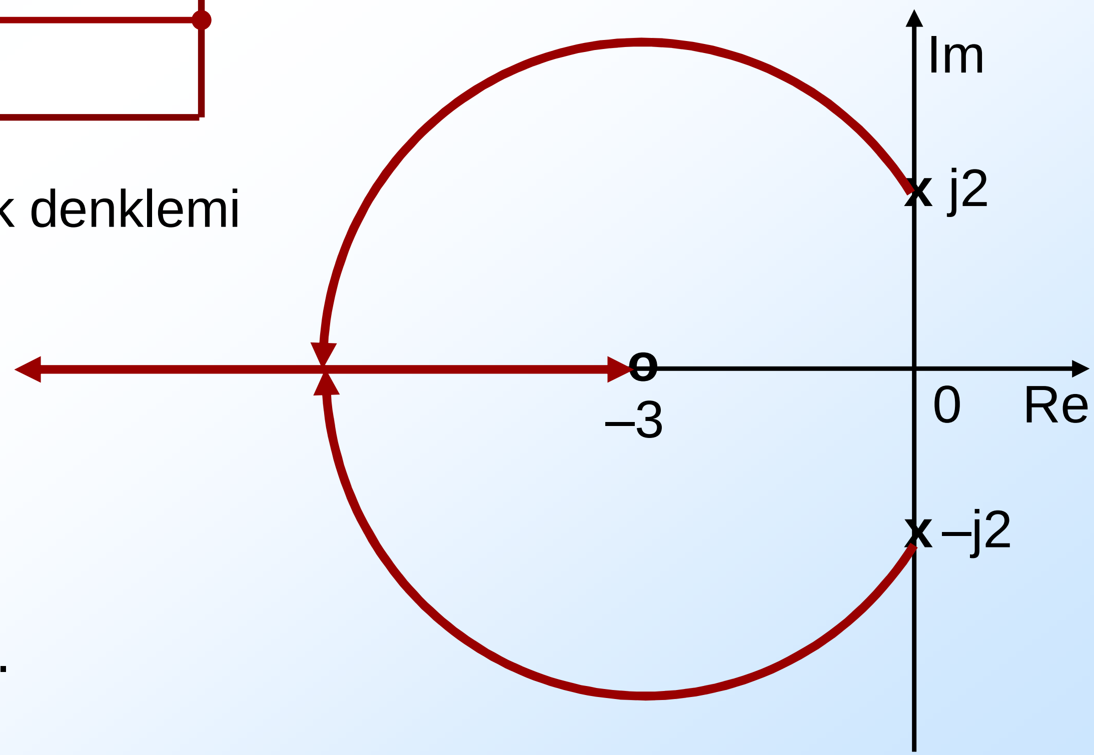
Kapalı çevrim sistem için karakteristik denklemi yazarsak:

$$1+G(s)H(s)=1+K\left(\frac{Ts+1}{s^2+4}\right)=0$$

Dolayısıyla, AÇTF:

$$G(s)H(s)=K\left(\frac{Ts+1}{s^2+4}\right)$$

T = 1/3 alırsak, yandaki KYE bulunur.



Kök Yer Eğrisi

Herhangi Bir Parametreye Göre Kök Yer Eğrisi

Takometre katsayısı T'nin KÇK üzerindeki etkisi incelenmek istenirse, ne yapılmalı?

T'ye göre bir kök yer eğrisi çizilmesi gerekiyor.

Ancak, T parametresi AÇTF'de kazanç olarak yer almamakta. $G(s)H(s) = K\dfrac{Ts+1}{s^2+4}$

<u>Bu sorunu aşağıdaki şekilde aşmak mümkündür:</u>

Karakteristik denklem $(s^2 + 4) + K(Ts + 1) = 0$ şeklinde yazılır.

Bu denklem $(s^2 + 4 + K) + T(Ks) = 0$ şeklinde düzenlenir.

Terimler $(s^2 + 4 + K)$ ile bölünerek, karakteristik denklem aşağıdaki yeni şekilde yazılır:

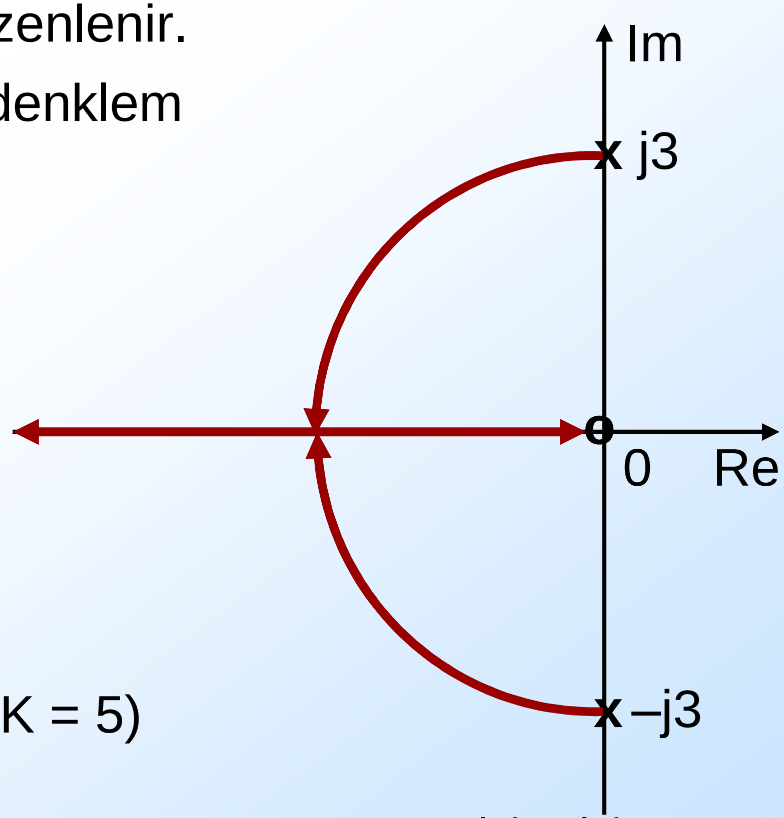
$$1 + G'(s)H'(s) = 1 + T\frac{Ks}{s^2+4+K} = 0$$

Bu yeni formda

$$G'(s)H'(s) = T\left(\frac{Ks}{s^2+4+K}\right)$$

yeni AÇTF olarak kabul edilir.

Böylece, T'ye göre KYE yandaki gibi elde edilir. (K = 5)



Kök Yer Eğrisi

Kök Yer Eğrisi Ailesi

İki parametreli bir sistemde, parametrelerden birini değişik değerlerde sabit tutarken AÇ kazancına göre çizilen kök yer eğrisi ailesi.

Son örnekte, K ve T parametrelerinden hangisine göre KYE çizildiğine bağlı olarak iki ayrı kök yer eğrisi ailesi oluşturmak mümkündür.

<u>Aile 1:</u>

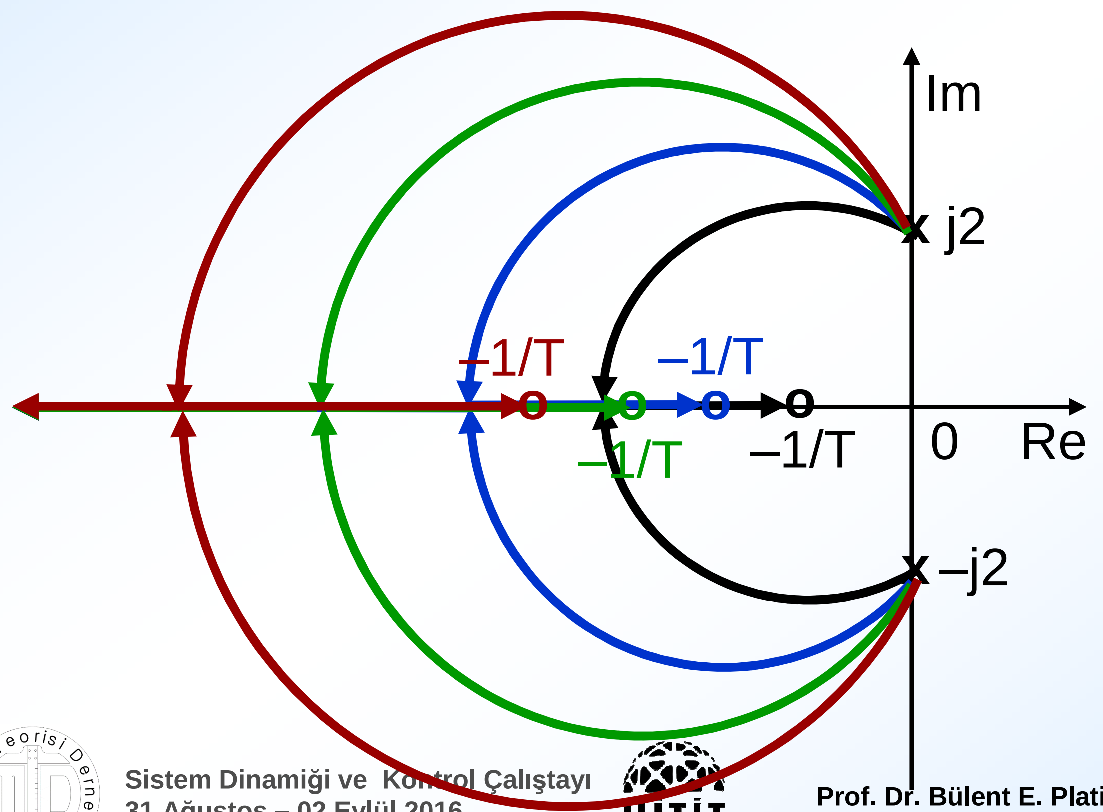
K'ya göre

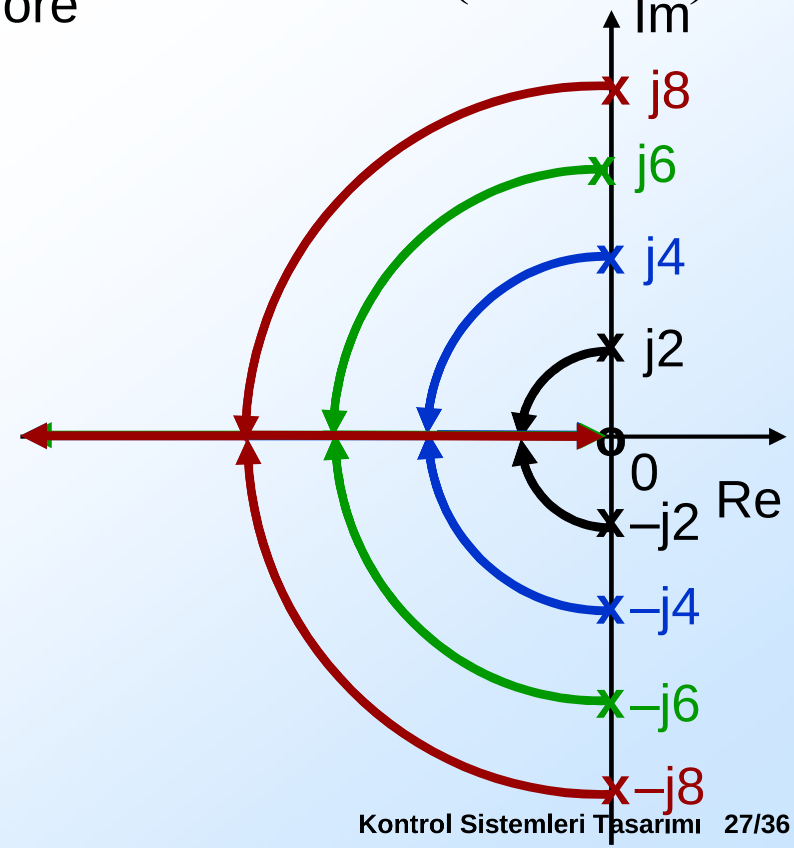
$$G(s)H(s) = K\left(\frac{Ts+1}{s^2+4}\right)$$

<u>Aile 2:</u>

T'ye göre

$$G'(s)H'(s) = T\left(\frac{Ks}{s^2+4+K}\right)$$





Kök Yer Eğrisi

Bütünleyici Kök Yer Eğrisi

Tanım:

Verilen bir açık çevrim transfer fonksiyonu için açık çevrim kazancı K, –∞'dan sıfıra değiştirildiğinde kapalı çevrim transfer fonksiyonunun kutuplarının karmaşık s-düzlemindeki geometrik yeri.

AÇTF'nin standart kutup-sıfır-kazanç gösterimi normal kök yer eğrisi ile aynıdır.

Tek değişiklik, K > 0 yerine K < 0 olmasıdır.

$$G(s)H(s) = \frac{K\prod_{k=1}^{m}(s-z_k)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)} \quad , \quad K<0$$

Genlik Koşulu:

"–" işarete dikkat

$$K\prod_{k=1}^{m}|s-z_k| = -\prod_{i=1}^{n}|s-p_i|$$

Açı Koşulu:

"çift" olmasına dikkat

$$\sum_{k=1}^{m}\angle(s-z_k) - \sum_{i=1}^{n}\angle(s-p_i) = \pm(2k)180^\circ \quad , \quad k=0,1,2,\ldots$$

Kök Yer Eğrisi

Bütünleyici Kök Yer Eğrisi Kuralları

KURAL 1: (aynı)
[kol sayısı]

KURAL 2: (değişik)
KYE'nin m adet kolu K = –∞ için AÇS'den başlar.

KURAL 3: (değişik)
KYE'nin n adet kolu K = 0 için AÇK'da biter.

KURAL 4: (değişik)
Gerçel eksenin, sağındaki AÇK ve AÇS sayıları toplamı çift olan bölümleri BKYE'ye aittir.

KURAL 5: (aynı)
[Eyer noktaları]

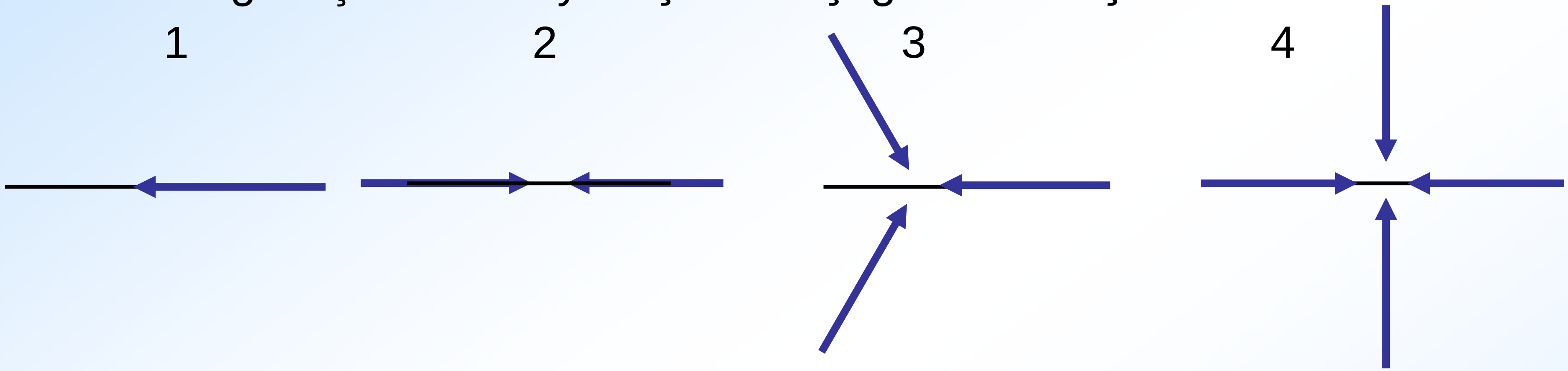
KURAL 6: (değişik)
Eğer $m \neq n$ ise, büyük s değerleri için $|n - m|$ sayıda kol sonsuzdan başlar $(m > n)$ ya da sonsuza gider $(m < n)$. [asimtot ve merkez σ_a ifadeleri aynı]

$$\theta_k = \frac{(2k)180^\circ}{|n-m|} \quad , \quad k = 0,1,2,\ldots; |n-m|-1 \qquad \text{and} \qquad \sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{k=1}^{m} z_k}{n-m}$$

Kök Yer Eğrisi

Bütünleyici Kök Yer Eğrisi Kuralları

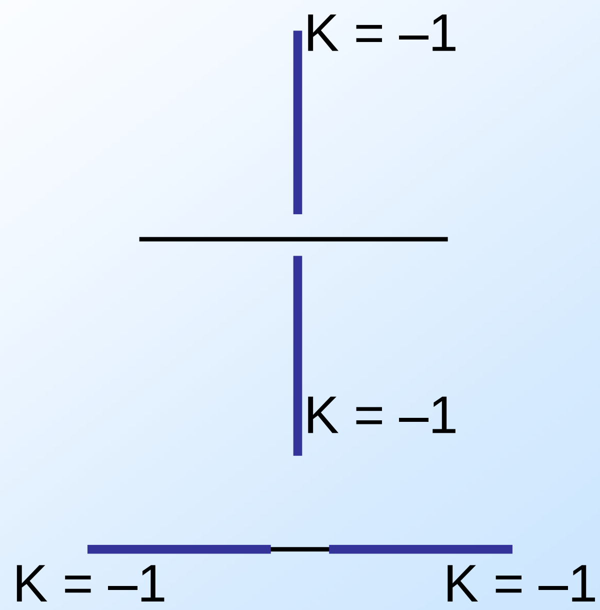
İlk 4 m-n değeri için asimtot yerleşimleri aşağıda verilmiştir.



m = n ise, asimtotik davranış açısından özel bir durum oluşmaktadır.
Karakteristik denklem aşağıdaki gibi yazılıp $|s| \to \infty$ alındığında

$$K = -\lim_{s\to\infty}\left(\frac{\prod_{i=1}^{n}|s-p_i|}{\prod_{k=1}^{n}|s-z_k|}\right) = -\lim_{s\to\infty}\left(\frac{s^n}{s^n}\right) = -1$$

K = –1 için iki asimtotik durum ortaya çıkar.



Bütünleyici Kök Yer Eğrisi Kuralları

KURAL 7: (aynı)

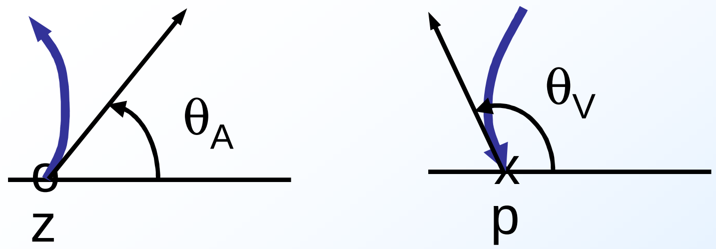
[gerçek eksene göre simetri]

KURAL 8: (değişik)

AÇK'lara varış ve AÇS'lardan ayrılış açıları aşağıdaki gibidir.

$$\theta_A = \lim_{s \to z} \arg\left[G(s)H(s)/(s-z)\right]$$

$$\theta_V = \lim_{s \to p} \arg\left[G(s)H(s)(s-p)\right]$$



KURAL 9: (aynı)

[sanal eksen kesim noktaları]

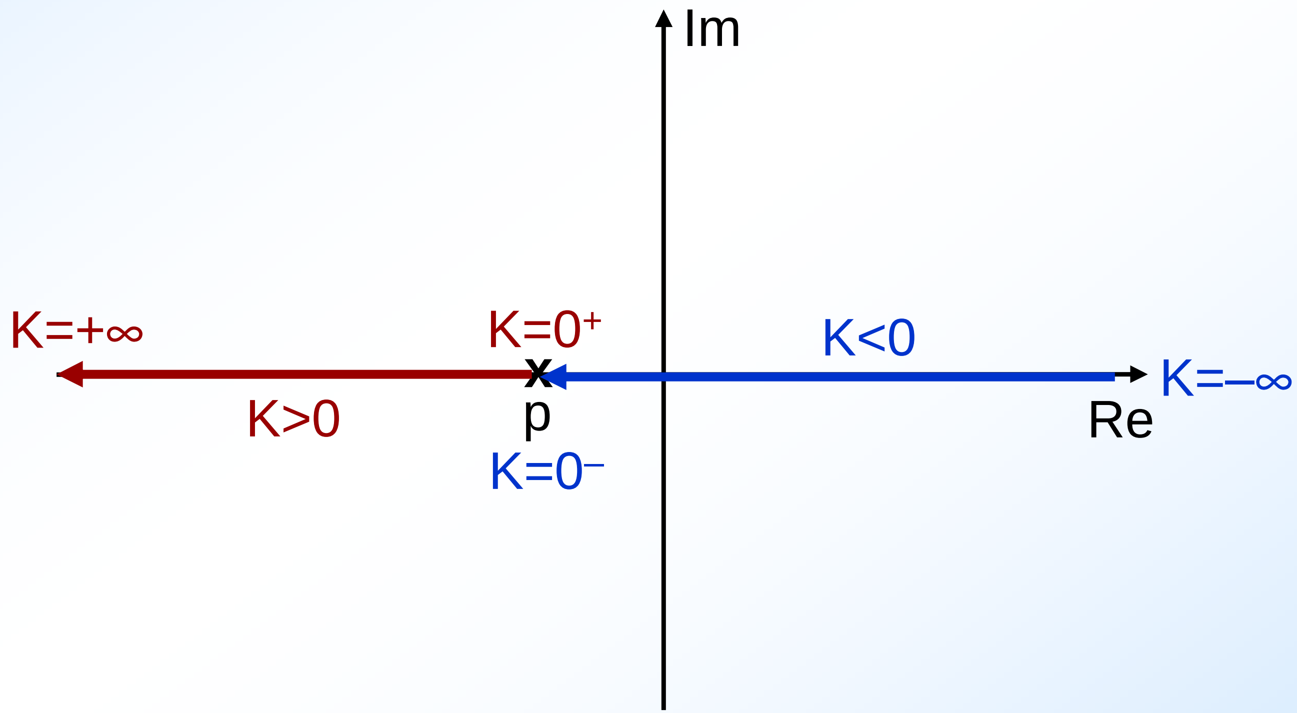
KURAL 10: (aynı)

[sistem kutuplarının korunumu]

Bütünleyici Kök Yer Eğrisi

Örnek:

$$GH=\frac{K}{s-p}$$

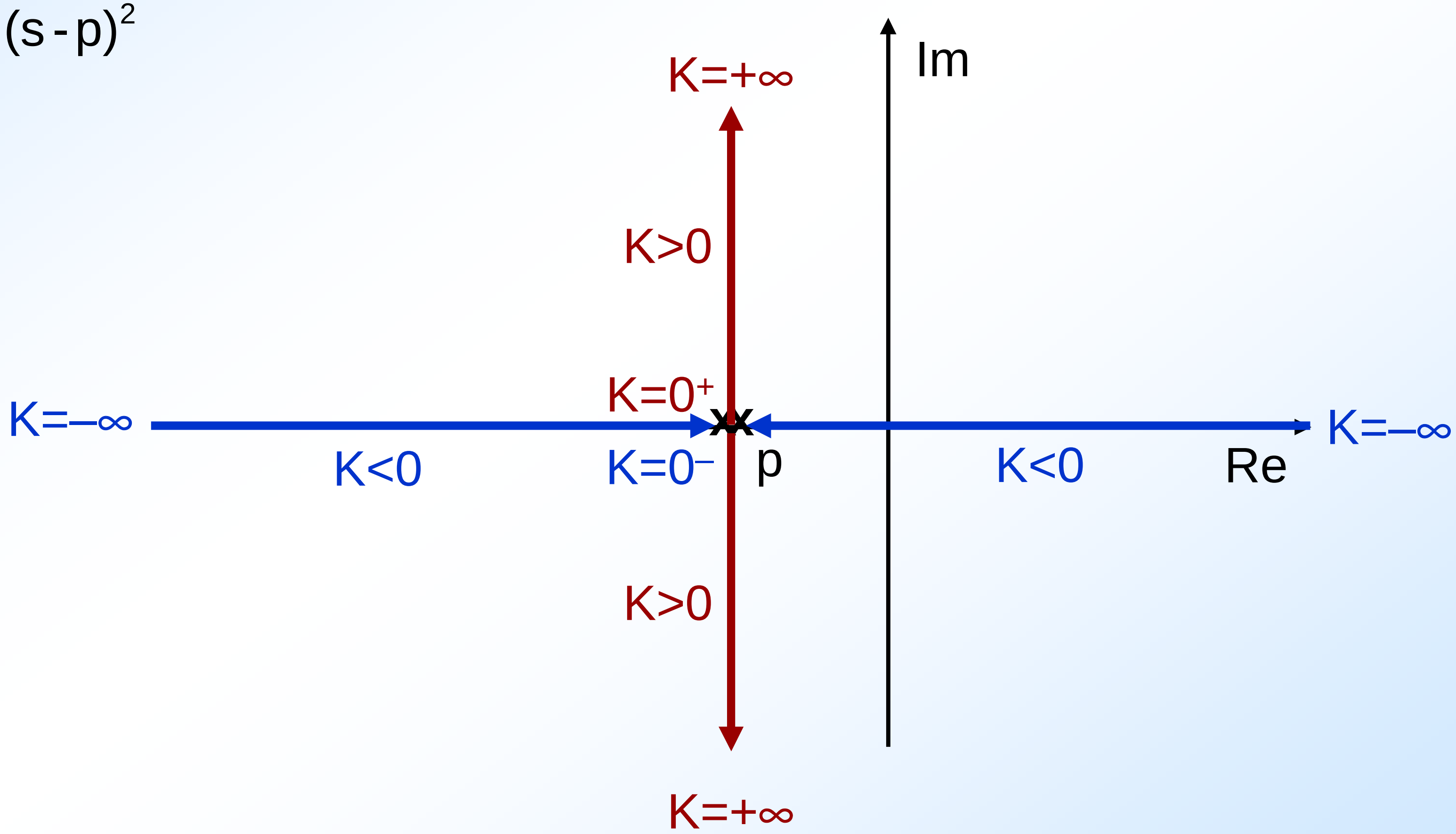


Kök Yer Eğrisi

Bütünleyici Kök Yer Eğrisi

Örnek:

$$GH = \frac{K}{(s-p)^2}$$

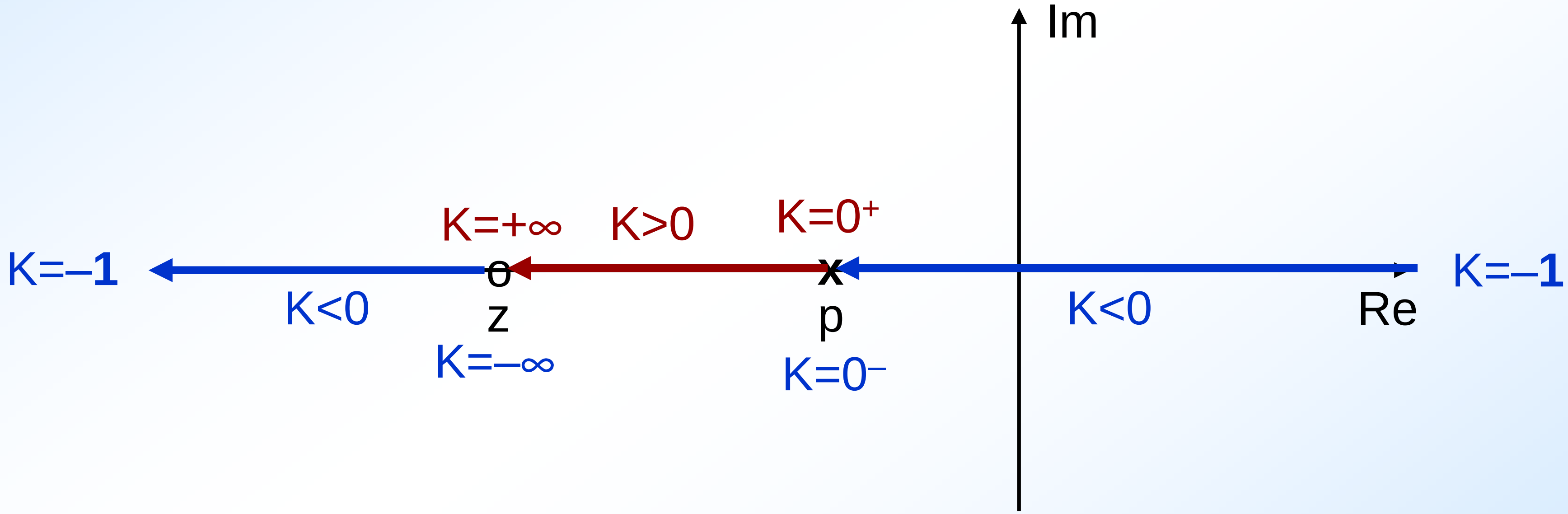


Kök Yer Eğrisi

Bütünleyici Kök Yer Eğrisi

Örnek:

$$GH = \frac{K(s-z)}{s-p}$$



Kök Yer Eğrisi

Bütünleyici Kök Yer Eğrisi

Örnek:

$$GH = \frac{K(1-s)}{(s+1)^2} \quad , \quad K > 0$$

Sıradan bir KYE adayı gibi duruyor! Öyle mi?

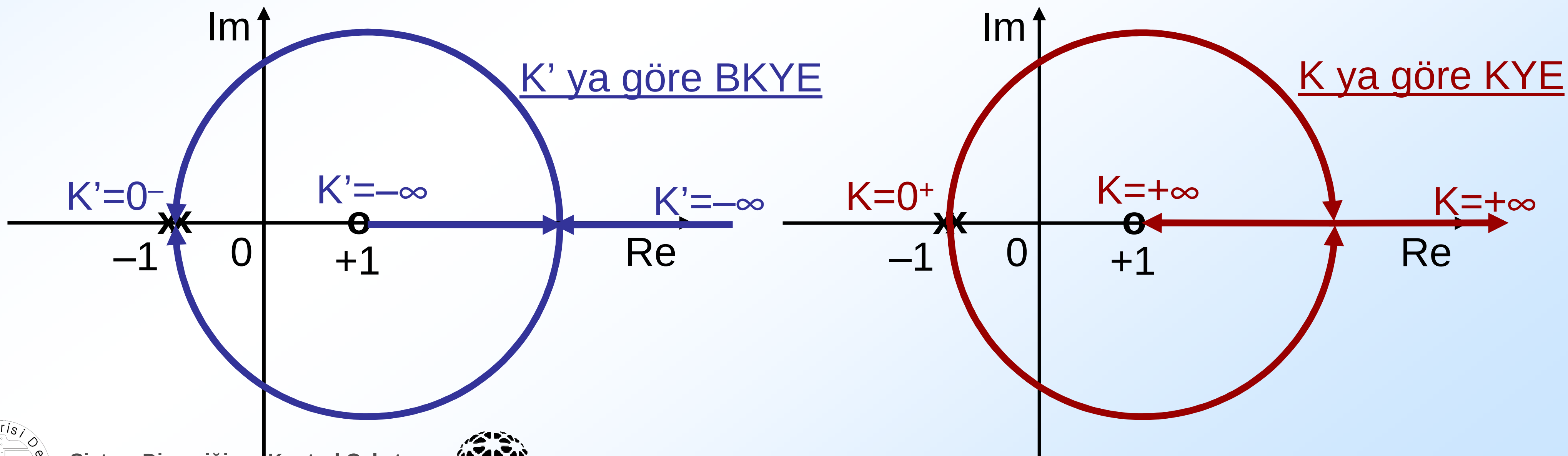
(1 – s) terimi nedeniyle standart değil. Bu terim (s – 1) şeklinde olmalıydı.

$$GH = -\frac{K(s-1)}{(s+1)^2} \quad , \quad K > 0$$

"–" işaretine dikkat!

$$GH = \frac{K'(s-1)}{(s+1)^2} \quad , \quad K' = -K < 0$$

K' ya göre bütünleyici KYE



Sorularınız