

Kontrol Sistemleri Tasarımı

Kök Yer Eğrisi ile Kontrolcü Tasarımı

Prof. Dr. Bülent E. Platin



Sistem Dinamiği ve Kontrol Çalıştayı
31 Ağustos – 02 Eylül 2016



Kök Yer Eğrisi ile Kontrolcü Tasarımı

Kontrol Sistemlerinde Tasarım İsterleri – Zaman Yanıtı

Özellik	Kapalı Çevrim Sistemin Zaman Yanıtı Özellikleri	AÇTF / KÇTF İsterler
Kararlılık	Zamanla durağanlaşan basamak yanıtı	KÇK'ların tümü s–düzleminin solunda
Kalıcı Rejim Yanıtı	Sıfır ya da küçük kalıcı hata	Yüksek tip numarası ve/veya büyük değerli hata katsayısı
Geçici rejim Yanıtı	Kısa yerleşme zamanı	Baskın KÇK'lar sanal eksenden uzakta
	Hızlı ilk yanıt, kısa yükselme ve aşma zamanı	Baskın KÇK'lar gerçek eksenden uzakta ve/veya KÇS'ler sanal eksene yakın
	Salınımsız yanıt	KÇK'ların tümü gerçek eksenin üzerinde
	Küçük aşma	Baskın KÇK'lar küçük eğimli sönümlenme doğrusu üzerinde

Kök Yer Eğrisi ile Kontrolcü Tasarımı

Kontrol Sistemlerinde Tasarım İsterleri – Zaman Yanıtı

Baskın kapalı çevrim kutupları:

Sanal eksene diğer kutuplardan en az 4–5 kez yakın olan ve yakınında kapalı çevrim sıfırı bulunmayan KÇK'lar.

Ana Sonuç:

Kalıcı rejim başarımı dışındaki zaman yanıtı özelliklerini **baskın kapalı çevrim kutuplarının s–düzlemindeki konumları** belirlemektedir.

Dolayısıyla,

- AÇTF'in tip numarası kalıcı rejim isterlerini sağlamalıdır.
- KYE'nin baskın kolları s–düzleminin arzulanan bölgelerinden geçmelidir.
- Bu bölgedeki baskın kol üzerindeki AÇ kazanç değerleri kalıcı rejim isterlerini sağlamalıdır.

Eğer bu 3 koşulun hepsi sağlanıyorsa, çözüm **uygun kazançlı bir P-kontrolcüdür**.

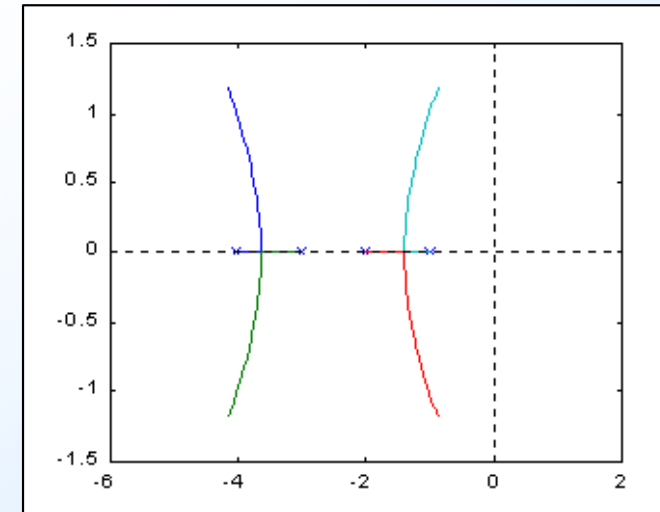
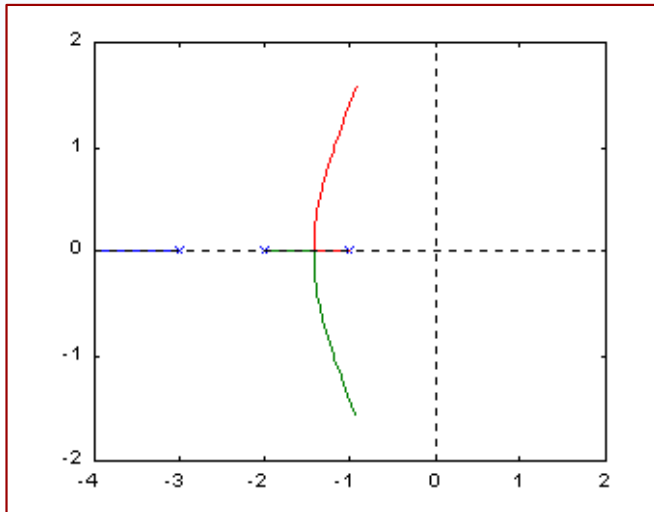
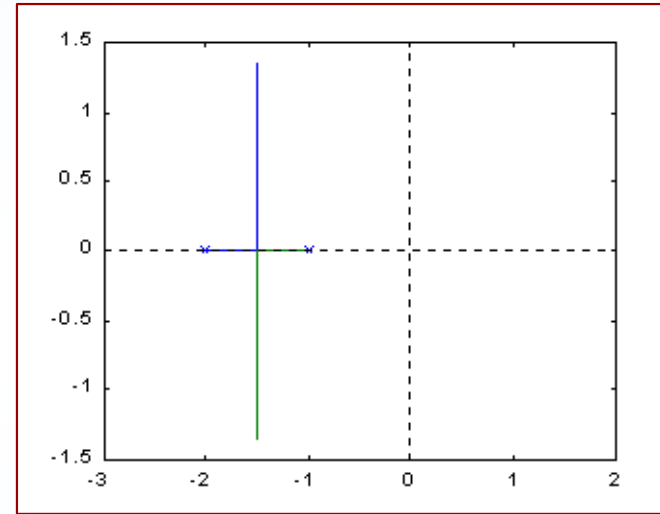
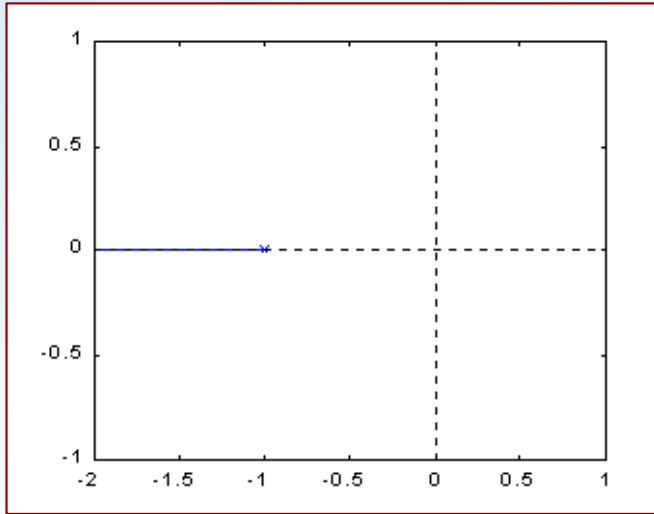
Bu koşullardan bir ya da bir kaç sağlanmıyorsa ne yapılmalıdır?

KÖK YER EĞRİSİNİN BASKIN KOLLARI KUTUP VE SIFIR EKLENEREK DEĞİŞTİRİLMELİDİR

Kök Yer Eğrisi ile Kontrolcü Tasarımı

Kök Yer Eğrilerini Yeniden Şekillendirme

Kutup Eklemenin Etkisi



Kök Yer Eğrisi ile Kontrolcü Tasarımı

Kök Yer Eğrilerini Yeniden Şekillendirme

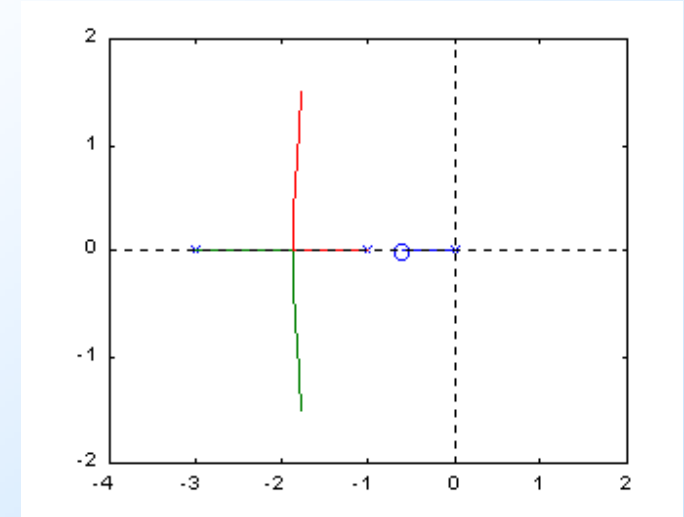
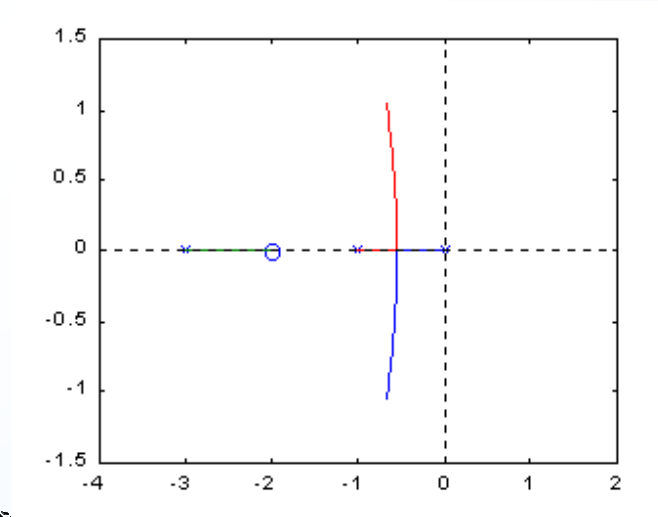
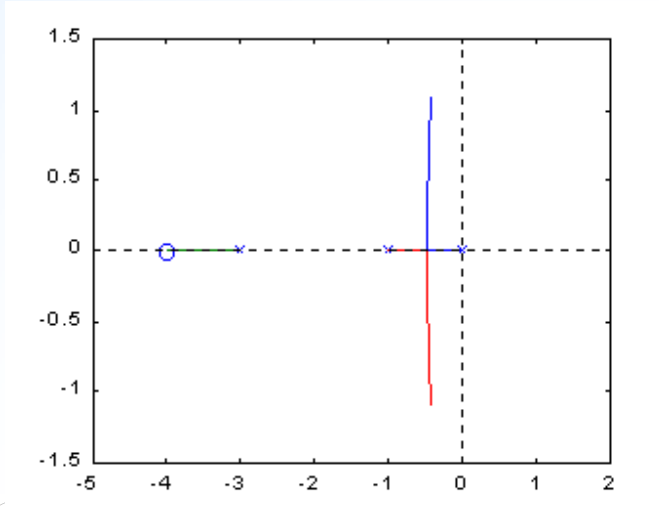
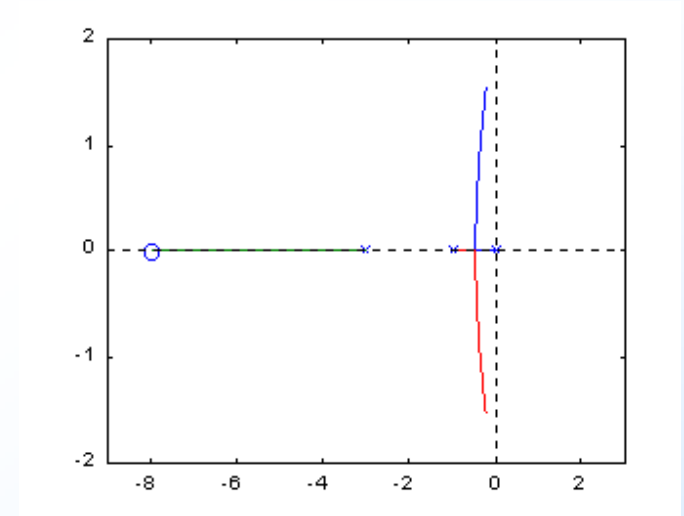
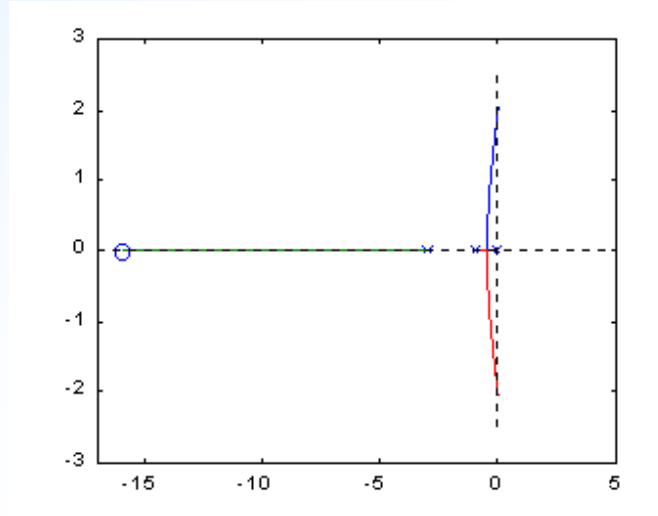
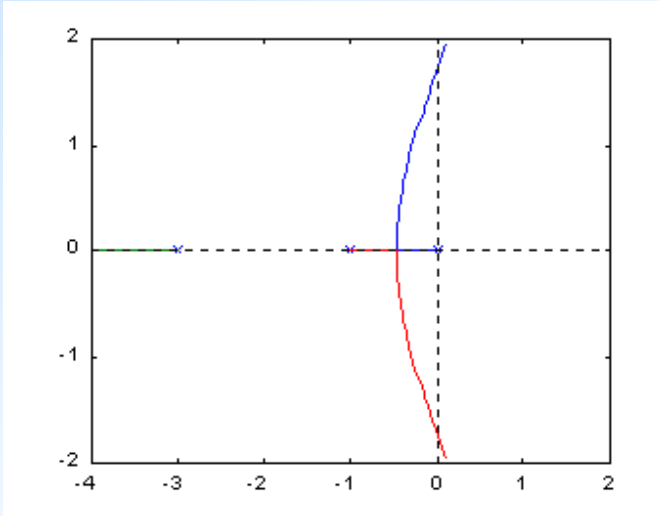
Kutup Eklemenin Etkileri:

- Kol ve asimtot sayısı artar.
- Kutup-sıfır kütle merkezi eklenen kutuba doğru kayar.
- Kollar sağa doğru bükülürler.
- Göreceli kararlılık azalır.
- Hatta sistem kararsız bile olabilir.

Kök Yer Eğrisi ile Kontrolcü Tasarımı

Kök Yer Eğrilerini Yeniden Şekillendirme

Sıfır Eklemenin Etkisi



Kök Yer Eğrisi ile Kontrolcü Tasarımı

Kök Yer Eğrilerini Yeniden Şekillendirme

Sıfır Ekleme Etkileri:

- Asimtot sayısı azalır.
- Kutup-sıfır kütle merkezi eklenen sıfırın aksi yönüne doğru kayar.
- Kollar sola doğru bükülür.
- Göreceli kararlılık iyileşebilir.
- Kararsız bir sistem kararlı hale getirilebilir.

Kök Yer Eğrisi ile Kontrolcü Tasarımı

PD (Oransal + Türevsel) Kontrolcü Tasarımı

PD-Kontrolcü:

$$G_c(s) = K_p + K_d s = K_p (T_d s + 1) = K_d (s - z)$$

Burada

K_p : Oransal kazanç

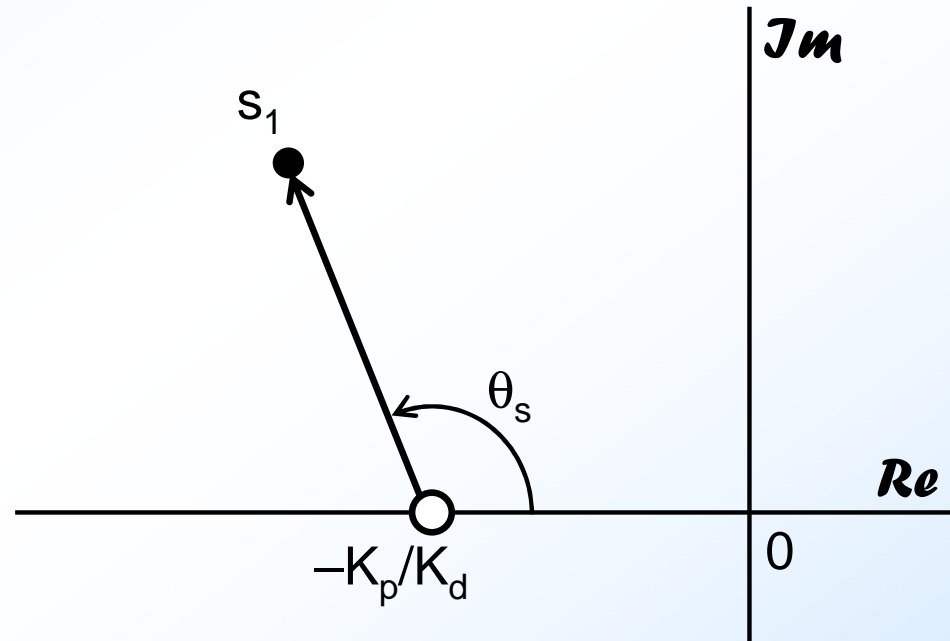
K_d : Türevsel kazanç

T_d : Türev zamanı

z : PD-kontrolcünün sıfırı

$$T_d = K_d / K_p$$

$$z = -1 / T_d = -K_p / K_d$$



PD-kontrolcü ile eklenen sıfırın açısal katkısı (θ_s) pozitiftir.

Kök Yer Eğrisi ile Kontrolcü Tasarımı

PD (Oransal + Türevsel) Kontrolcü Tasarımı

KÇ sistemin arzulanan s_1 kutup konumunda, bu pozitif θ_z açısal katkı, kompanse edilmemiş sistemin AÇTF'nin s_1 noktasındaki $G(s_1)H(s_1)$ açısını açılı koşulunu sağlayacak şekilde dengelemelidir.

$$\arg[G_c(s_1)G(s_1)H(s_1)] = \pm(2k+1)180^\circ \quad ; \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Böylece, kompanse edilmiş sistemin AÇTF'i olan $G_c(s)G(s)H(s)$ kullanılarak oluşturulan yeni kök yer eğrisinin baskın kolu sola kayarak s_1 'den geçebilecektir.

PD kontrolcü, kalıcı rejim açısından, tip numarasında herhangi bir değişiklik oluşturmaz.

Ancak, PD-kontrolcü aracılığıyla sola kaydırılan kök yer eğrisinin baskın kolundaki tasarım noktası orijinden daha uzakta olduğu için $n > m$ olan OLTF'ler için daha yüksek kazanç değerleri kullanılmasına izin verecektir. Bu da kalıcı rejimde daha büyük hata katsayıları yaratarak kalıcı hatanın azalmasını sağlamaktır.

Kazançtaki bu iyileşmeyi genlik koşulunu kullanarak görmek mümkündür:

$$K_p = 1 / |T_d s_1 + 1| |G(s_1)H(s_1)|$$

Kök Yer Eğrisi ile Kontrolcü Tasarımı

PD (Oransal + Türevsel) Kontrolcü Tasarımı

Örnek:

b) Arzulanan KÇ kutup yeri: $-2+j2$

Dolayısıyla, kök yer eğrisinin üst kolu arzulanan KÇ kutup noktasından geçecek şekilde sola bükülmelidir.

Kompanse edilmemiş sistemin s_2 'deki toplam açısal katkısı -225° 'dir.

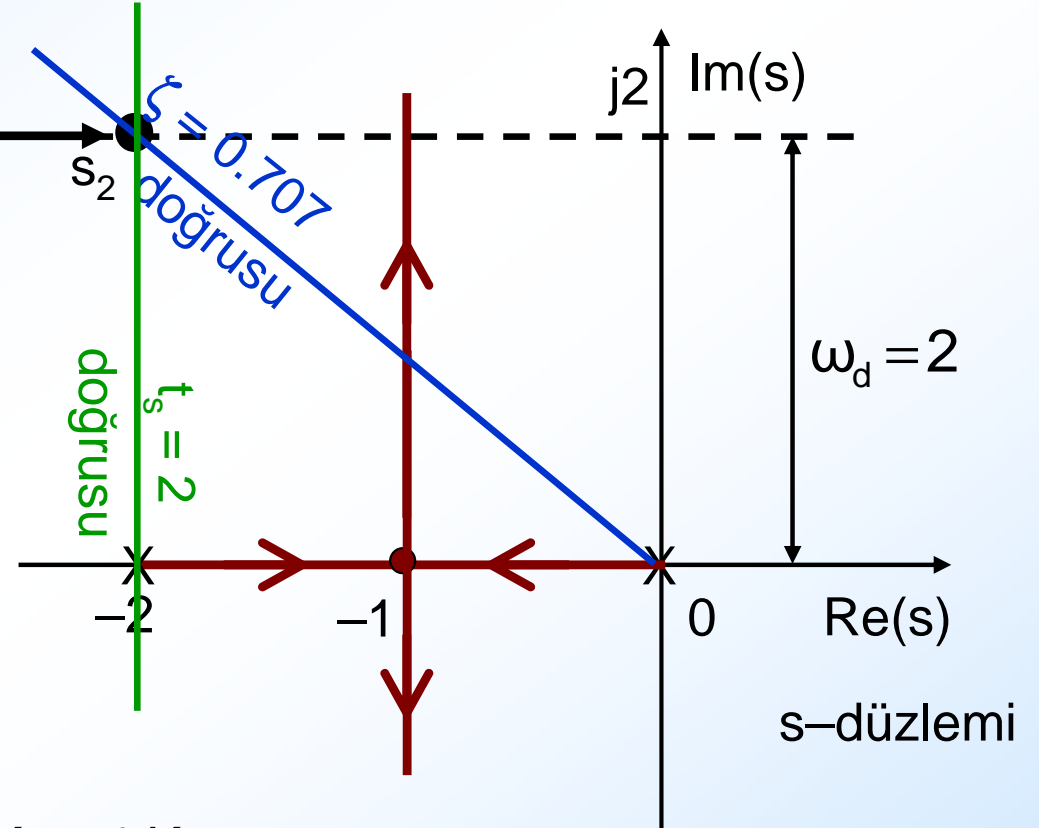
Kompanse edilmiş sistemin yök yer eğrisinin s_2 'den geçebilmesi için $+45^\circ$ 'lik bir katkıya gerek vardır. Bu da sıfırı $z = -4$ olan bit PD-kontrolcü ile sağlanabilir. $\rightarrow K_p / K_d = 4 \rightarrow K_p = 4 K_d$

Ek olarak, genlik koşulu kullanılırsa:

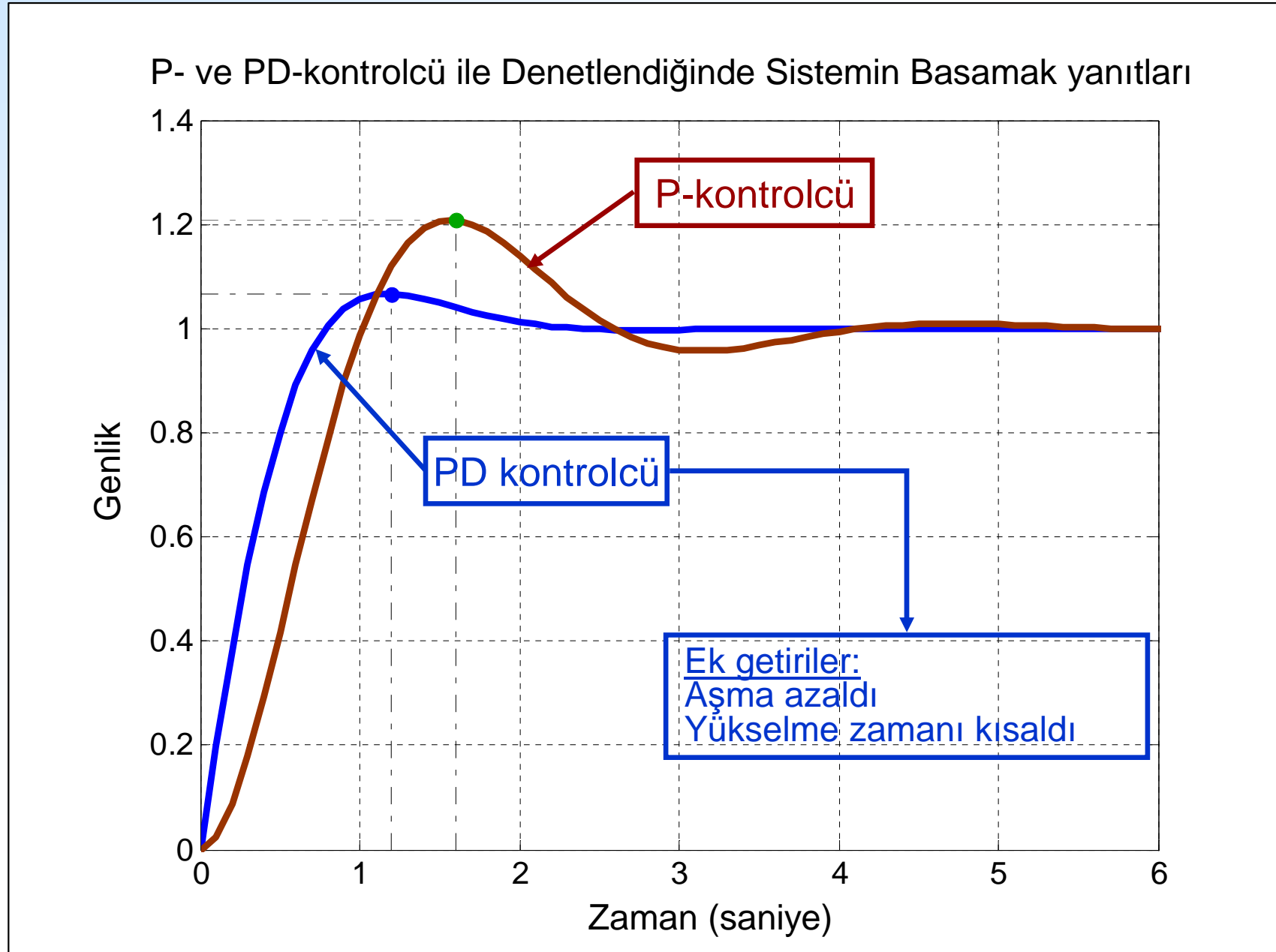
$$K_d |s_2 + 4| = |s_2| |s_2 + 2| \rightarrow K_d (2\sqrt{2}) = (2\sqrt{2})(2) \rightarrow K_d = 2 \rightarrow K_p = 8$$

$$G_c(s) = 8 + 2s$$

← Daha büyük orantısal kazanç kullanımına dikkat!



Kök Yer Eğrisi ile Kontrolcü Tasarımı



Kök Yer Eğrisi ile Kontrolcü Tasarımı

PD (Oransal + Türevsel) Kontrolcü Tasarımı

PD-kontrolcü uygulamasındaki 3 büyük sorun:

1. Türev alma işlemi anlamına gelen s-terimi içermesi nedeniyle PD-kontrolcülerin fiziksel olarak gerçekleştirilmesinde sorun vardır. Bu sorunu çözümlerin 2 yolu bulunmaktadır:
 - a) Türev alma işlemini yaklaşık gerçekleştirmek.
 - b) Çıktının kendisinin yanında türevini de ölçerek geri besleme bilgisine dahil etmek. – Ek algılama elemanlarının kullanımını gerektirir. Örneğin, mekanik sistemlerde konum ve hız geri beslemenin birlikte kullanımı.
2. Referans girdisinde basamak değişimleri olması durumunda PD-kontrolcüler s-terimi nedeniyle darbeleri üretirler. Bu sorunu çözümlerin 3 yolu bulunmaktadır:
 - a) Referans girdideki basamak değişimlerini dar rampalar şeklinde vermek.
 - b) P-kontrolcünün çıkışında genlik limiti kullanmak.
 - c) 1b
3. PD-kontrolcünün s-terimi algılayıcı gürültüsünü daha da abartılı hale getirir. Bu sorunu çözümlerin 2 yolu vardır:
 - a) Algılayıcının ürettiği gürültüyü ölçme sinyalini temizlemek için alçak geçiren süzgeç kullanmak.
 - b) Gürültü düzeyi daha az daha iyi bir algılayıcı kullanmak.

Kök Yer Eğrisi ile Kontrolcü Tasarımı

PI (Oransal + İntegral) Kontrolcü Tasarımı

PI-Kontrolcü:

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_i}{s} = \frac{K_i(T_i s + 1)}{s} = \frac{K_p(s - z)}{s}$$

Burada

K_p : Orantısal kazanç

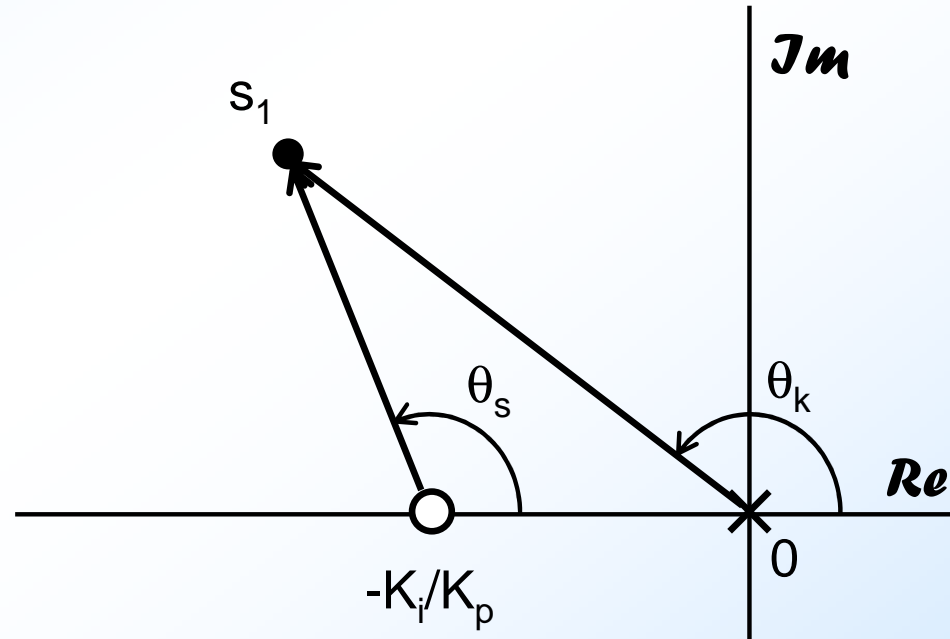
K_i : İntegral kazanç

T_i : İntegral zamanı

z : PI-kontrolcünün sıfırı

$$T_d = K_p / K_i$$

$$z = -1 / T_i = -K_i / K_p$$



PI-kontrolcü ile eklenen sıfırın ve kutubun net açısal katkısı $(\theta_s - \theta_k)$ negatiftir.

Kök Yer Eğrisi ile Kontrolcü Tasarımı

PI (Oransal + İntegral) Kontrolcü Tasarımı

KÇ sistemin arzulanan s_1 kutup konumunda, bu negatif $\theta_s - \theta_k$ açısız katkı, kompanse edilmemiş sistemin AÇTF'nin s_1 noktasındaki $G(s_1)H(s_1)$ açısını açılı koşulunu sağlayacak şekilde dengelemelidir.

$$\arg[G_c(s_1)G(s_1)H(s_1)] = \pm(2k+1)180^\circ \quad ; \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Böylece, kompanse edilmiş sistemin AÇTF'i olan $G_c(s)G(s)H(s)$ kullanılarak oluşturulan yeni kök yer eğrisinin baskın kolu sağa kayarak s_1 'den geçecektir.

Baskın koldaki bu sağa yönelim istenen bir gelişme değildir.

Ama, PI-kontrolcünün orijindeki kutubu aracılığıyla sistemin tip numarası artacak ve kapalı çevrim sistemin kalıcı rejim başarımı düzelecektir.

Dolayısıyla, PI-kontrolcüler, kapalı çevrim sistem yanıtının geçici rejimindeki olumsuz değişikliklerin kabul edilebilir düzeyde küçük tutulması kaydıyla kalıcı rejim başarımının geliştirilmesi amacıyla kullanılabilir.

Geçici rejimdeki bu olumsuz etkileri en az düzeyde tutabilmek için PI-kontrolcünün açısız katkısının küçük olması gerekmektedir. Bu da eklenen sıfırın orijine eklenen kutuba yakın konumlandırılmasıyla elde edilebilir.

Kök Yer Eğrisi ile Kontrolcü Tasarımı

PI (Oransal + İntegral) Kontrolcü Tasarımı

Örnek:

Transfer fonksiyonu yanda verilen birim geri beslemeli $H(s) \equiv 1$ bir sistemi düşünelim.

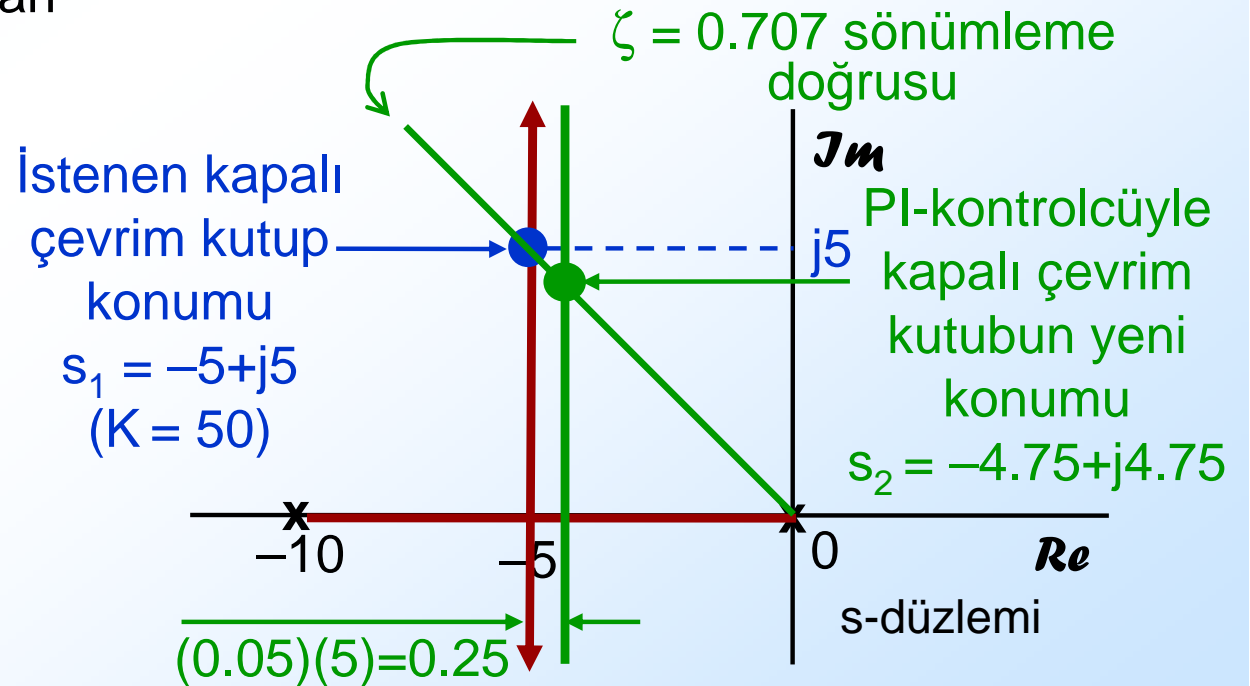
$$G(s) = \frac{1}{s(s+10)}$$

Kapalı çevrim sistemin rampa girdileri sıfır kalıcı rejim hatası ile izlemesi istenmektedir. → **Tip 2 AÇTF gerekmektedir** → **PI-kontrolcü kullanılmalı!**

İkincil ister, **arzulan kapalı çevrim kutupların $-5 \pm j5$ olarak konumlandırılmasıdır.**

Eğer bu mümkün değilse, o zaman

- yerleşme zamanının % 5 uzamasına izin verilebilir (kapalı çevrim kutuplar sanal eksene yaklaşabilir) ama
- sönümlenme oranı ($\zeta = 0.707$) olarak sabit kalmalıdır (kapalı çevrim kutuplar $\zeta = 0.707$ sönümlenme doğrusu üzerinde orijine doğru kaydırılmalıdır).



Kök Yer Eğrisi ile Kontrolcü Tasarımı

PI (Oransal + İntegral) Kontrolcü Tasarımı

Örnek:

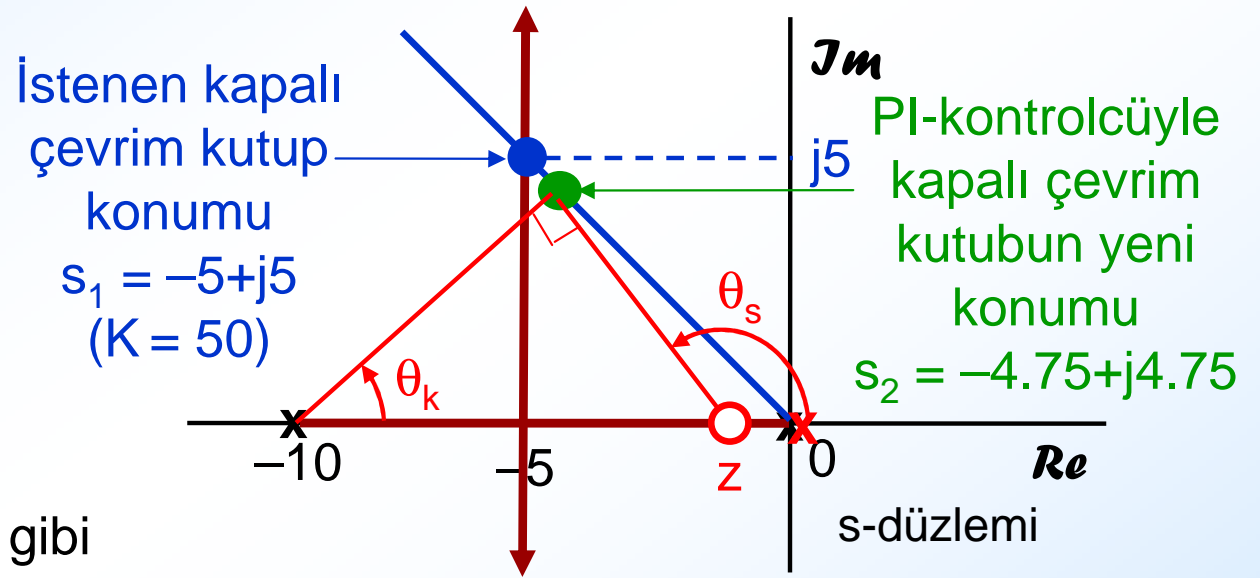
θ_k açısının bulunuşu:

$$\theta_k = \tan^{-1}\left(\frac{4.75}{10 - 4.75}\right)$$

$$\theta_k = \tan^{-1}\left(\frac{4.75}{5.25}\right)$$

$$\theta_k = \tan^{-1}(0.90476)$$

$$\theta_k = 42.14^\circ < 45^\circ \text{ beklendiği gibi}$$



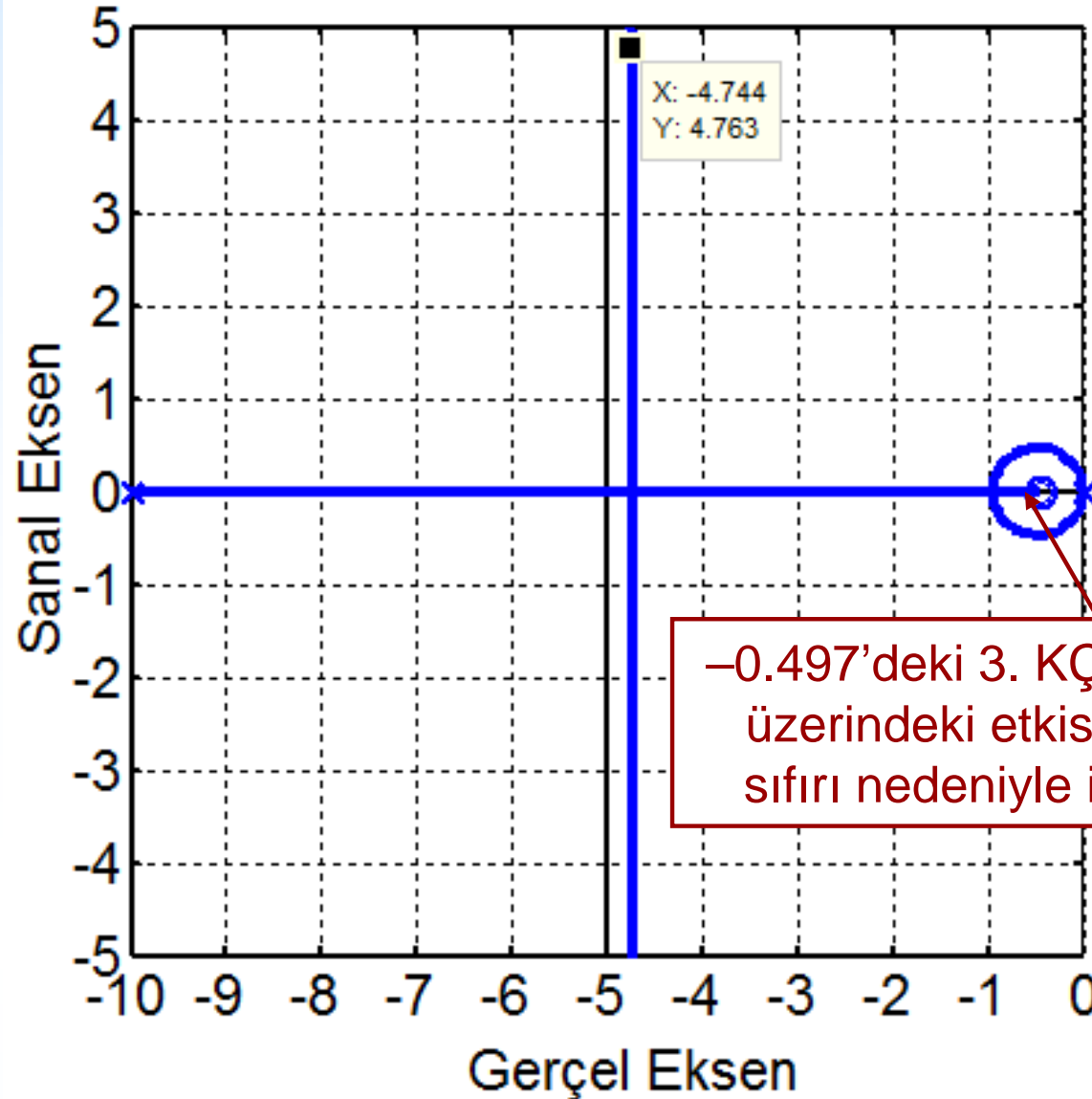
Dolayısıyla, θ_s açısı $\theta_s - \theta_k = 90^\circ$ den 132.14° olarak bulunur.

z'nin değeri, z'den s_2 'ye çizilen vektörün açısı kullanılarak bulunur:

$$\tan\theta_s = \frac{4.75}{-4.75 - z} \rightarrow z = -\frac{K_i}{K_p} = -4.75 - \frac{4.75}{\underbrace{\tan(132.14^\circ)}_{=-1.105}} = -4.75 + \frac{4.75}{1.105} = -0.45$$

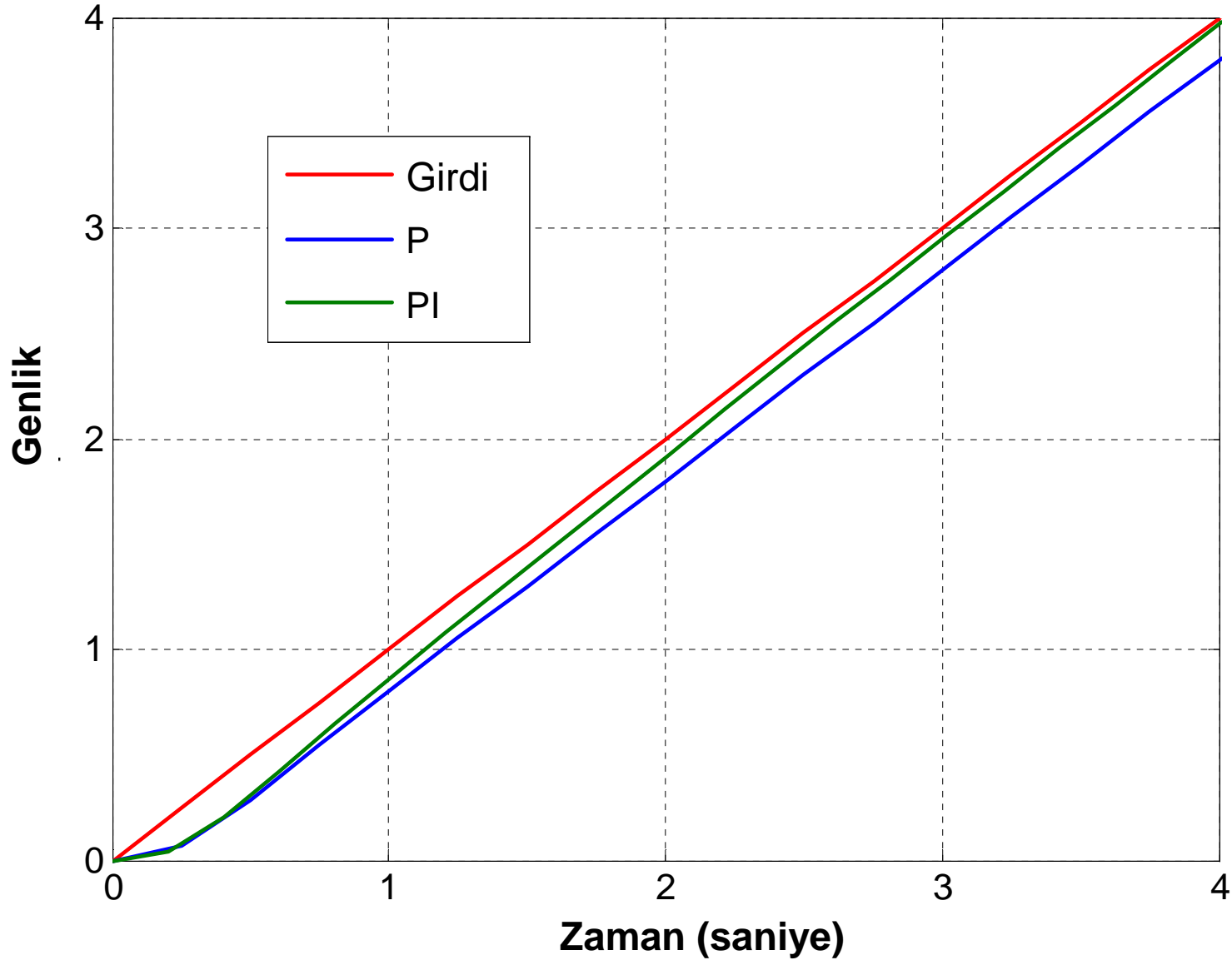
Kök Yer Eğrisi ile Kontrolcü Tasarımı

PI-Kontrolcü Tasarımı



Kök Yer Eğrisi ile Kontrolcü Tasarımı

P- ve PI-kontrolcü ile Denetlendiğinde Sistemin Rampa yanıtları



Kök Yer Eğrisi ile Kontrolcü Tasarımı

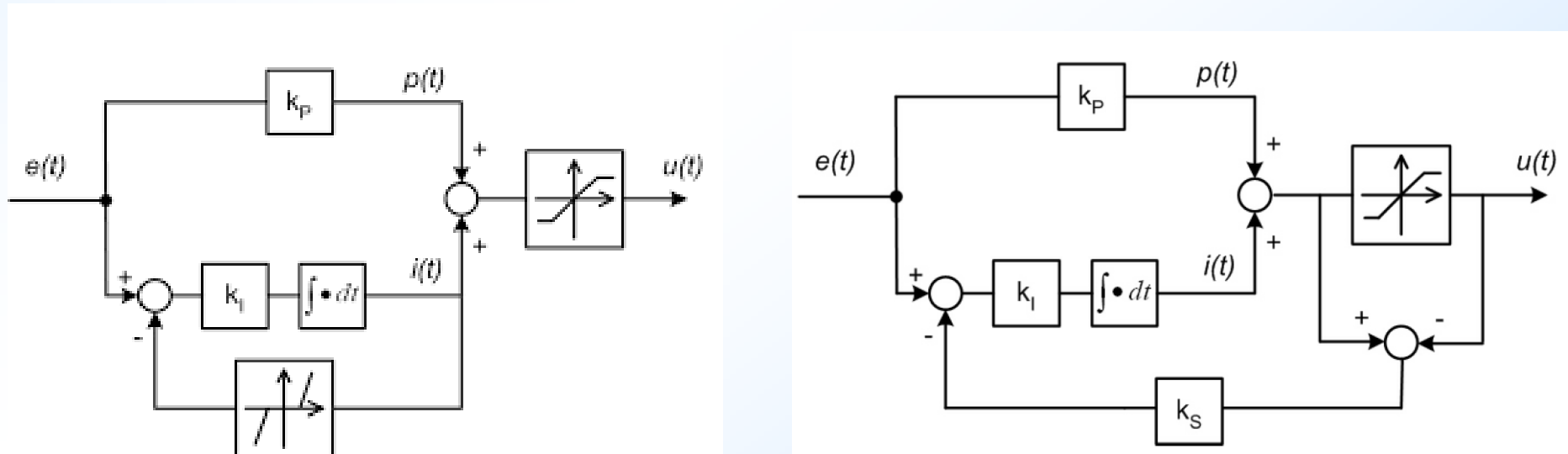
PI (Oransal + İntegral) Kontrolcü Tasarımı

İntegral Birikim/Kurma (Windup):

PI-Kontrolcü uygulamasındaki başlıca sorundur.

Özellikle referans değerlerindeki ani değişimler sonucu kontrolcü girişindeki hata bilgisindeki artış, bu hatanın integralinin alınması ile kontrolcü çıktısının çok büyük değerlere erişmesine ve bu çıktının kumanda bilgisi olarak kullanıldığı eyleyicileri ve bunların sürücülerinin doyma değerlerine erişmesine ve sistemin doğrusal olmayan davranışlar (genellikle aşırı aşmalar) sergilemesine neden olur.

İki integral birikim önleyici (anti-windup) düzenleme örneği:



Kök Yer Eğrisi ile Kontrolcü Tasarımı

PID (Oransal + İntegral + Türevsel) Kontrolcü Tasarımı

PID-Kontrolcü:

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s = \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s} = \frac{K_d (s - z_1)(s - z_2)}{s}$$

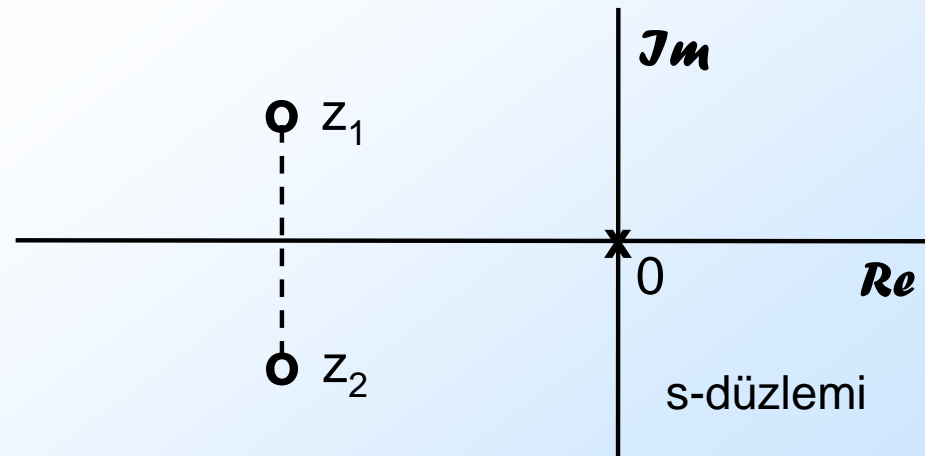
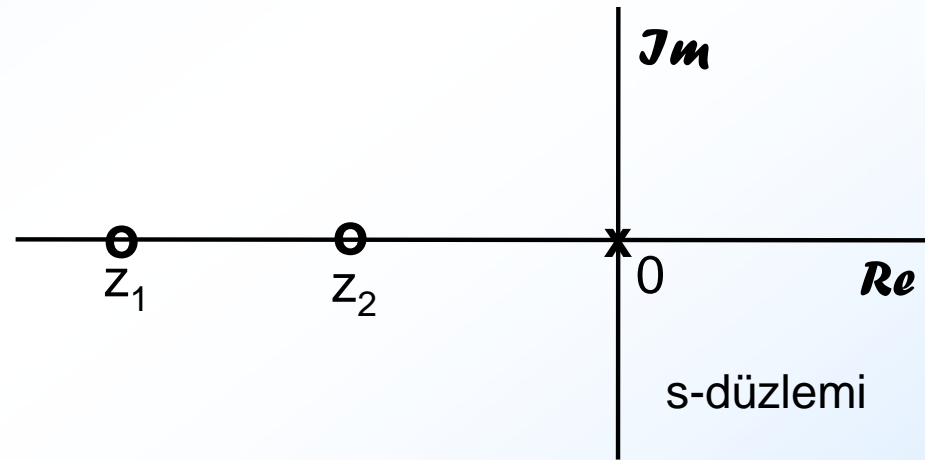
Burada,

K_p : Oransal kazanç

K_d : Türevsel Kazanç

K_i : İntegral Kazanç

z_1, z_2 : PID-kontrolcünün sıfırları



Kök Yer Eğrisi ile Kontrolcü Tasarımı

PID (Oransal + İntegral + Türevsel) Kontrolcü Tasarımı

PID-Kontrolcü:

Bu kontrolcü, sistemin hem sürekli rejim hem de geçici rejim davranışını iyileştirmek için kullanılır.

K_p , K_i , ve K_d , parametreleri bu kontrolcünün tasarımında 3 farklı başarımların sağlanması için gerekli serbestlik derecesini sağlar.

Orijindeki kutup ve sıfırlardan biri kontrolcünün PI kısmını, diğer sıfır ise PD kısmını oluşturur.

Kontrolcünün PI etkisiyle ilgili sıfır, kök yer eğrilerinin baskın kolunu sağa çok fazla kaydırmamak için orijine yakın seçilir.

Kontrolcünün ikinci sıfırı ise, kök yer eğrisinin baskın kolunu PD etkisiyle yeterince sola bükmek amacıyla o kolun solunda bir konuma yerleştirilir.

PID kontrolcünün bir başka amaçlı kullanımı, sanal eksene istenmedik şekilde yakın karmaşık kutupları olan sistemlerde, bu kutupların sistem üzerindeki etkilerini bastırmak içindir. Bu amaçla, PID-kontrolcünün sıfırları bu kutuplara olabildiğince yakın yerleştirilir. Böylece, aralarında kısa ama baskın olmayan bir kök yer eğrisi kolu oluşturulur.

Kök Yer Eğrisi ile Kontrolcü Tasarımı

PID Kontrolcülerin Analitik Tasarımı

Buradaki amaç, PID-kontrolcünün K_p , K_i ve K_d parametrelerini ayarlayarak AÇTF'si $G(s)H(s)$ olan kompanse edilmemiş bir sistemin kapalı çevrim baskın kutuplarının istenen bir konuma s_1 yerleştirilmesidir.

Aşağıdaki tanımları kullanarak,

$$s_1 = |s_1|e^{j\beta} \quad \text{ve} \quad G_p(s_1)H(s_1) = |G_p(s_1)H(s_1)|e^{j\psi}$$

tasarım denklemleri aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$K_p = \frac{-\sin(\beta + \psi)}{|G_p(s_1)H(s_1)|\sin\beta} - \frac{2K_i\cos\beta}{|s_1|}$$

$$K_d = \frac{\sin\psi}{|s_1||G_p(s_1)H(s_1)|\sin\beta} + \frac{K_i}{|s_1|^2}$$

Bu denklemler, uygun kazançları sıfırlayarak PI ve PD-kontrolcülerin tasarımında da kullanılabilir:

PD-kontrolcü için $K_d = 0$

PI-kontrolcü için $K_i = 0$

Bu denklemler, PID ile kontrol edilmiş bir sistemin dominant KÇ kutubunun arzulanan s_1 noktasından geçmesi için gerekli koşullar kullanılarak türetilmiştir.

Bu iki denklem içinde 3 adet bilinmeyen (K_p, K_i, K_d kazançları) olduğu için bu kazançlardan birisi ek bir tasarım koşulunu (kalıcı rejim başarımı gibi) sağlamak üzere seçilebilir.

Kök Yer Eğrisi ile Kontrolcü Tasarımı

PID Kontrolcülerin Analitik Tasarımı

Eğer s_1 noktası negatif gerçektek eksen üzerinde seçilmişse, tasarım denklemleri aşağıdaki genlik koşulunu ifade eden tek denkleme indirgenir:

$$\left| K_d s_1^2 + K_p s_1 + K_i \right| = \frac{|s_1|}{\left| G_p(s_1)H(s_1) \right|}$$

Örnek:

AÇTF aşağıdaki gibi olan bir sistem için

$$G(s)H(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

hedeflenen kapalı çevrim kutup konumu

$$s_{1,2} = -4 \pm j 4$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Bu istere ek olarak, basamak girişi için sıfır kalıcı hata ve rampa girişi için %10 dinamik hata oluşması istenmektedir.

Sıfır kalıcı hata için kompanse edilmiş sistemin tip numarası “1” olmalıdır.

Tüm bu koşulları sağlamak üzere uygun bir PID-kontrolcü kullanılmalıdır.

Kök Yer Eğrisi ile Kontrolcü Tasarımı

PID Kontrolcülerin Analitik Tasarımı

Örnek:

$$s_1 = |s_1|e^{j\beta} = -4 + j4 = 4\sqrt{2}e^{j135^\circ} \rightarrow |s_1| = 4\sqrt{2} \text{ and } \beta = 135^\circ$$

$$G_p(s_1)H(s_1) = |G_p(s_1)H(s_1)|e^{j\psi} = \frac{1}{(-3+j4)(-2+j4)} = \frac{1}{10\sqrt{5}}e^{-j243.4^\circ}$$

$$\rightarrow |G_p(s_1)H(s_1)| = \frac{1}{10\sqrt{5}} = 0.0447 \text{ and } \psi = -243.4^\circ$$

Dolayısıyla, tasarım denklemleri aşağıdaki gibi yazılır.

$$K_p = \frac{-\sin(135^\circ - 243.4^\circ)}{(1/10\sqrt{5})\sin 135^\circ} - \frac{2K_i \cos 135^\circ}{4\sqrt{2}} = 30.01 + 0.25K_i$$

$$K_d = \frac{\sin(-243.4^\circ)}{4\sqrt{2}(1/10\sqrt{5})\sin 135^\circ} + \frac{K_i}{(4\sqrt{2})^2} = 4.999 + 0.0313K_i$$

% 10 dinamik hata koşulu kullanılırsa,

$$\frac{1}{K_i/2} = \frac{1}{10} \rightarrow K_i = 20 \rightarrow K_p = 35 \text{ and } K_d = 5.63$$

$$G_c(s) = 35 + 5.63s + \frac{20}{s} = \frac{5.63s^2 + 35s + 20}{s} = \frac{5.63(s + 0.637)(s + 5.58)}{s}$$

Kök Yer Eğrisi ile Kontrolcü Tasarımı

PID Kontrolcülerin Analitik Tasarımı

Örnek:

$$G_c(s) = 35 + 5.63s + \frac{20}{s} = \frac{5.63s^2 + 35s + 20}{s} = \frac{5.63(s + 0.637)(s + 5.58)}{s}$$

Bu PID kontrolcü sisteme aşağıdaki AÇ (ve KÇ) sıfırları ekler.

$$z_1 = -0.637 \quad \text{PI etkisiyle ilgili sıfır}$$

$$z_2 = -5.58 \quad \text{PD etkisiyle ilgili sıfır}$$

Bu sıfırlar kapalı çevrim transfer fonksiyonunun da sıfırları olur.

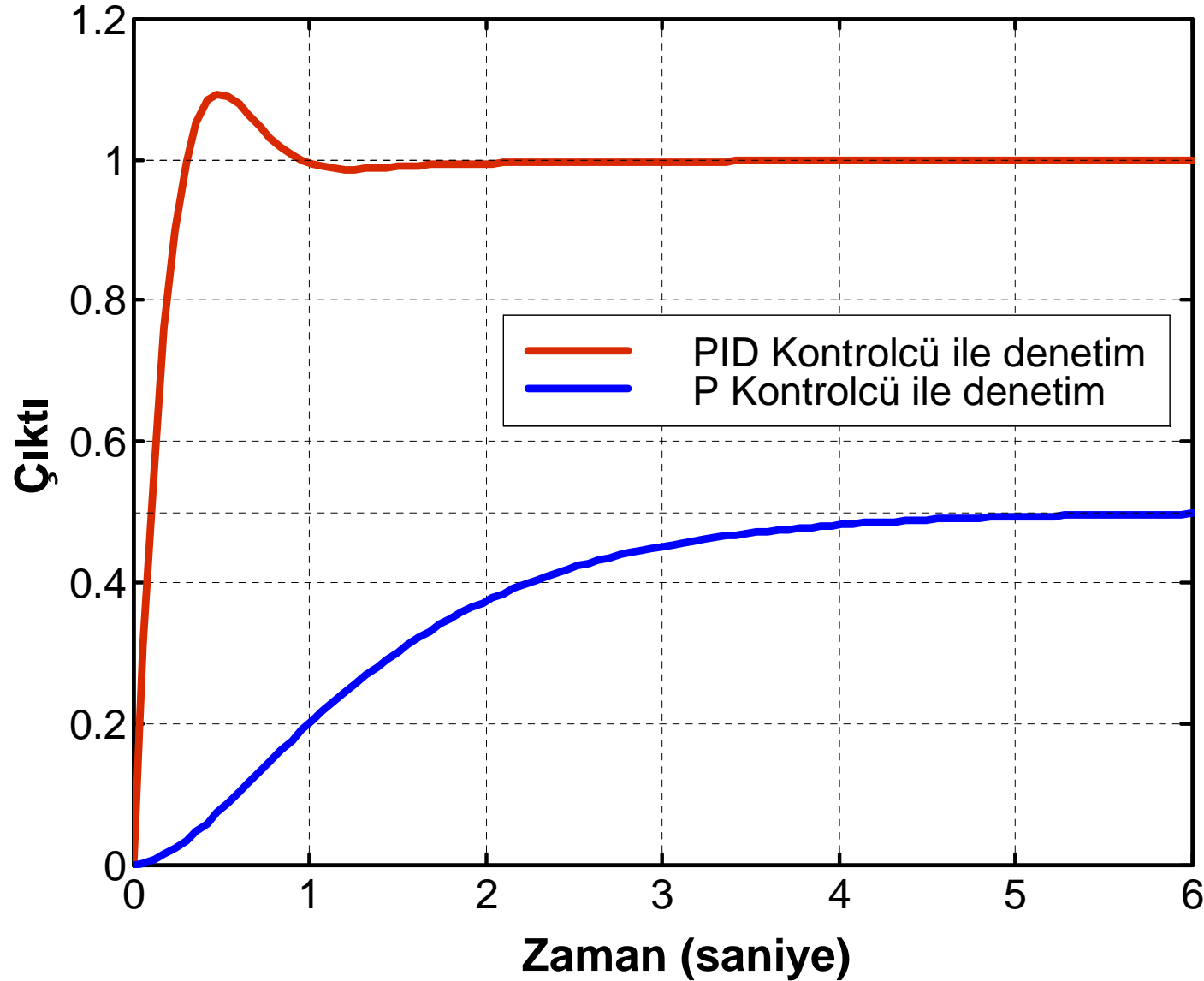
Kapalı çevrim kutupları $p_{1,2} = -4 \pm j4$ ve $p_3 = -0.625$ olarak elde edilir.

$p_3 = -0.625$ kutubu ilk görünüşte rahatsızlık verici olabilir. Ama, bu kutubun sistem yanıtındaki etkisi -0.637 'deki sıfır nedeniyle çok önemli değildir.

Sistemin P-kontrolcüyle ve PID kontrolcüyle kontrol edilmiş durumlarına karşılık gelen basamak yanıtları bir sonraki yansıda verilmiştir.

Kök Yer Eğrisi ile Kontrolcü Tasarımı

Basamak Yanıtı



Kök Yer Eğrisi ile Kontrolcü Tasarımı

İlerlemeli Kontrolcü Tasarımı

İlerlemeli Kontrolcü:

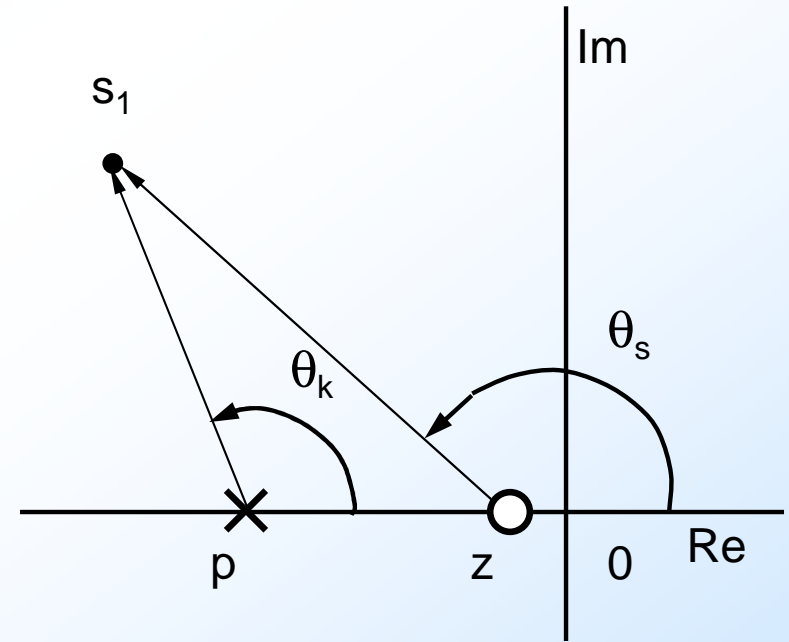
$$G_c(s) = K_c \frac{1+Ts}{1+\alpha Ts} = \frac{K_c}{\alpha} \cdot \frac{s-z}{s-p} ; 0 < \alpha = \frac{z}{p} = \frac{-1/T}{-1/\alpha T} < 1$$

Bu kontrolcünün sıfırı orijine kutubundan daha yakındır.

Dolayısıyla, ilerlemeli kontrolcünün açısal net katkısı $(\theta_s - \theta_k)$ pozitiftir.

Bu nedenle, bu kontrolcünün etkisi PD-kontrolcüye benzerdir. Sistemin geçici rejim davranışını düzeltmek üzere baskın kapalı çevrim kutuplarını sola doğru kaydırır.

PD-kontrolcüde belirlenecek 2 katsayı varken, bu kontrolcüde belirlenecek 3 katsayı (K_c , T , α) vardır. Bu da daha fazla serbestlik derecenin olduğu anlamına gelir.



Kök Yer Eğrisi ile Kontrolcü Tasarımı

İlerlemeli Kontrolcü Tasarımı

İlerlemeli Kontrolcü Tasarım Adımları:

1. P-kontrolcü kullanılmış sistem için kök yer eğrisi çizilir.
2. Geçici rejim isterleri kullanılarak kapalı çevrim sistemin baskın kutubunun s-düzlemindeki istenen s_1 konumu P-kontrolcü kullanılmış sistemin baskın kolunun solunda olacak şekilde seçilir.
3. P-kontrolcü kullanılmış sistemin $s = s_1$ 'deki 180° 'den olan açı farklılığı $\Phi = 180^\circ - \arg[G(s_1)H(s_1)] > 0$ olarak hesaplanır. Bu fark ilerlemeli kontrolcü tarafından sağlanacaktır.
4. İlerlemeli kontrolcünün kutup ve sıfırının konumları (ya da T ve α), s_1 'de bu açı farkını kapatacak şekilde seçilir.

Eğer bu Φ açısı çok büyükse, birden fazla ilerlemeli kontrolcü kullanılabilir.

Verilen bir Φ açısını kapatmak üzere ilerlemeli kontrolcünün kutup ve sıfırının konumları için bir çok seçenek vardır.

Kök Yer Eğrisi ile Kontrolcü Tasarımı

İlerlemeli Kontrolcü Tasarımı

İlerlemeli Kontrolcü Tasarım Adımları:

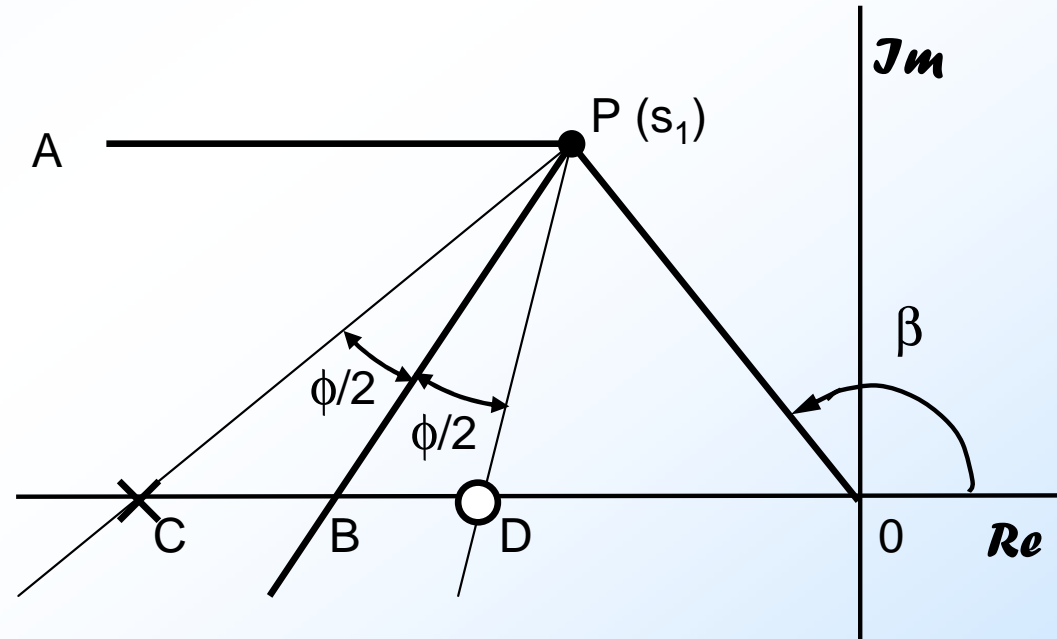
Bu kontrolcünün kurup ve sıfırlarının konumları için bir çok seçenek arasında α (dolayısıyla K_c) için en büyük (1'e en yakın) değer verenini bulmak üzere aşağıdaki geometrik yapı kullanılır.

Şekilde, PA gerçekte eksene paralel ve PB de PA ve PO arasındaki β açısının açı ortayıdır.

Bu şekilde sinüs teoremi kullanılarak aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$\frac{1}{T} = \overline{OD} = |s_1| \frac{\sin[(\beta - \phi)/2]}{\sin[(\beta + \phi)/2]}$$

$$\frac{1}{\alpha T} = \overline{OC} = |s_1| \frac{\sin[(\beta + \phi)/2]}{\sin[(\beta - \phi)/2]}$$



Kök Yer Eğrisi ile Kontrolcü Tasarımı

İlerlemeli Kontrolcü Tasarımı

Örnek:

İleri besleme yolundaki transfer fonksiyonu aşağıda verilen birim geri beslemeli, $H(s) \equiv 1$, bir kontrol sistemini düşünelim.

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+5)}$$

Kapalı çevrim sistemin basamak yanıtında % 20 aşma (M_p) ve 4 saniye %2'lik yerleşme zamanı (t_s) hedeflenmektedir. Bu isterler kullanılarak,

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{1 + (\pi/M_p)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\pi/0.2)^2}} = 0.456 \rightarrow \beta = 180^\circ - \cos^{-1}(0.456) = 117.1^\circ$$

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = 4 \rightarrow \zeta\omega_n = \frac{4}{4} = 1 \rightarrow \omega_n = \frac{1}{0.456} = 2.193 = |s_1|$$

Dolayısıyla, baskın kapalı çevrim kutup konumları aşağıdaki gibi bulunur.

$$s_1 = 2.193 e^{j117.1^\circ} = -1 + j1.952$$

180°'den olan açı farkı:

$$\Phi = 180^\circ - \arg[G_p(s_1)H(s_1)] = 180^\circ - 126.9^\circ = 53.1^\circ$$

Kök Yer Eğrisi ile Kontrolcü Tasarımı

İlerlemeli Kontrolcü Tasarımı

Örnek:

Tasarım denklemleri aracılığıyla T ve α bulunur.

$$\frac{1}{T} = 2.193 \frac{\sin[(117.1^\circ - 53.1^\circ)/2]}{\sin[(117.1^\circ + 53.1^\circ)/2]} = 1.166 \quad \rightarrow \quad T = 0.858$$

$$\frac{1}{\alpha T} = 2.193 \frac{\sin[(117.1^\circ + 53.1^\circ)/2]}{\sin[(117.1^\circ - 53.1^\circ)/2]} = 4.123 \quad \rightarrow \quad \alpha T = 0.243 \quad \rightarrow \quad \alpha = 0.283$$

Genlik koşulu yardımıyla K_c bulunur.

$$K_c = 0.283 \cdot \frac{|s_1||s_1 + 1||s_1 + 5||s_1 + 4.123|}{|s_1 + 1.166|} = 10.14$$

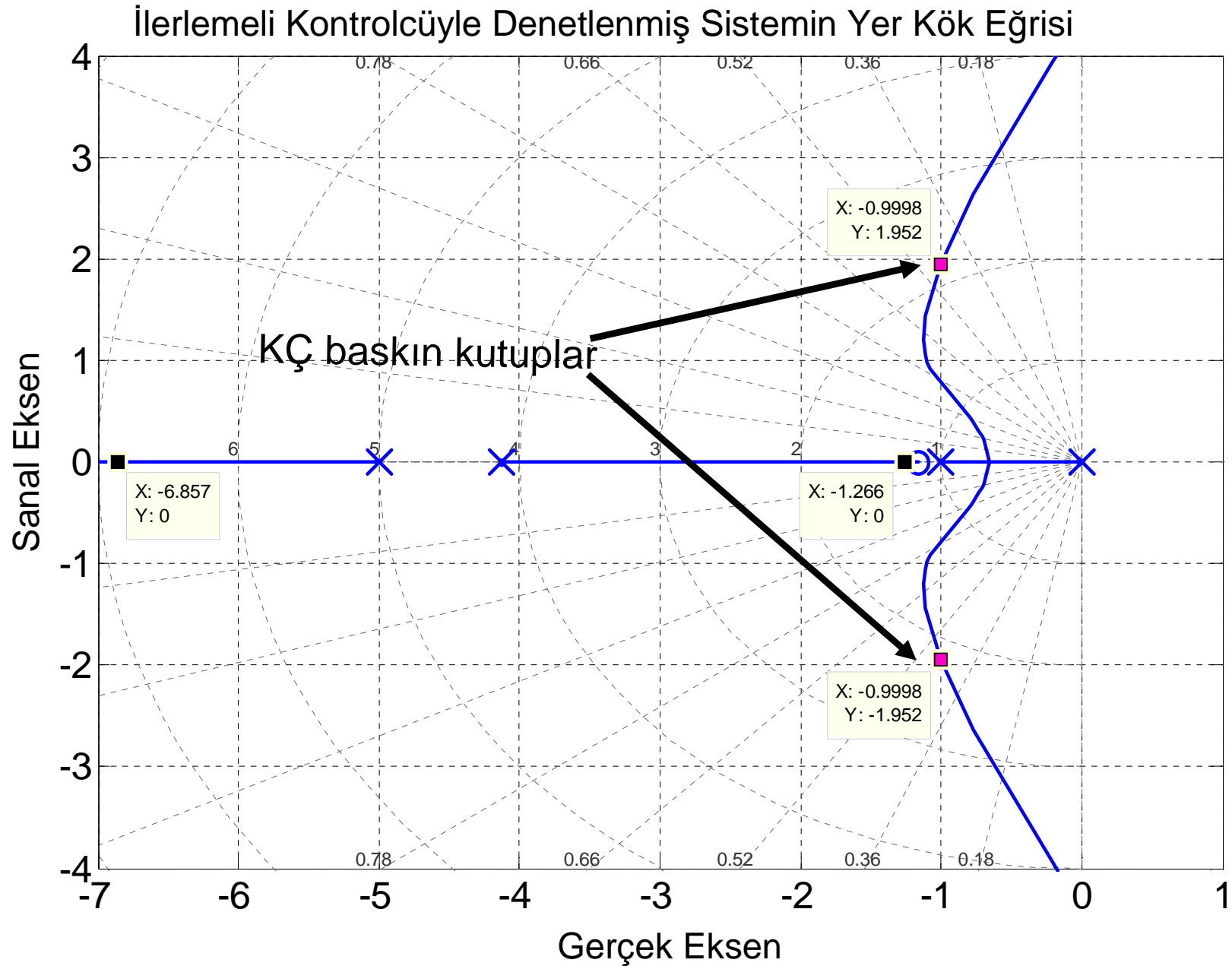
Böylece ilerlemeli kontrolcünün transfer fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılır.

$$G_c(s) = 10.14 \frac{1 + 0.858s}{1 + 0.243s} = 35.83 \frac{s + 1.166}{s + 4.123}$$

Bu kontrolcüyle, kapalı çevrim kutuplar: $p_{1,2} = -1 \pm j1.952$, $p_3 = -1.27$, $p_4 = -6.86$

Bu kontrolcüyle elde edilen kök yer eğrileri bir sonraki yansıda verilmiştir.

Kök Yer Eğrisi ile Kontrolcü Tasarımı



Kök Yer Eğrisi ile Kontrolcü Tasarımı

Gecikmeli Kontrolcü Tasarımı

Gecikmeli Kontrolcü:

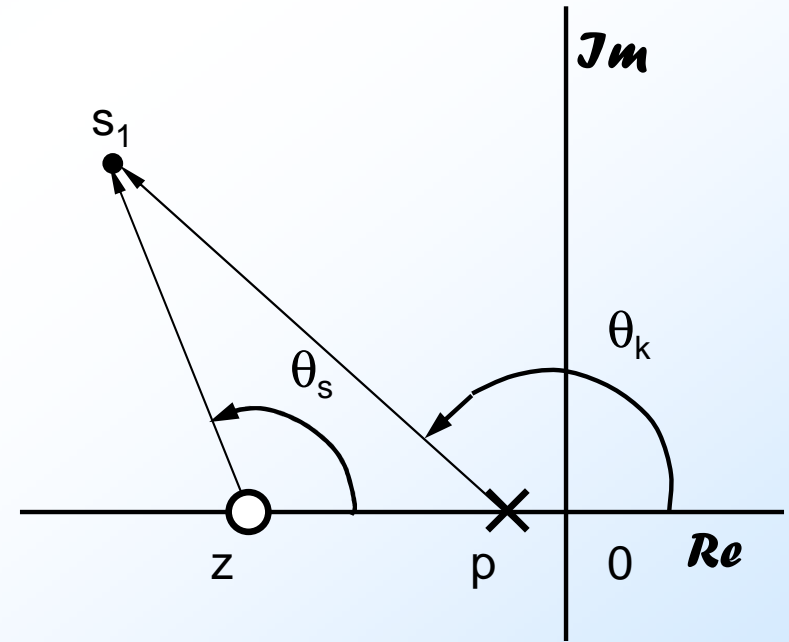
$$G_c(s) = K_c \frac{1+Ts}{1+\alpha Ts} = \frac{K_c}{\alpha} \cdot \frac{s-z}{s-p} \quad ; \quad \alpha = \frac{z}{p} = \frac{-1/T}{-1/\alpha T} > 1$$

Bu kontrolcünün kutubu orijine sıfırından daha yakındır.

Dolayısıyla, gecikmeli kontrolcünün açısal net katkısı ($\theta_s - \theta_k$) negatiftir.

Bu kontrolcü PI-kontrolcünün daha esnek bir sürümü olarak düşünülebilir; çünkü, kontrolcü kutubu orijin gibi sabit bir nokta yerine istenen bir yere yerleştirilebilmektedir.

Gecikmeli kontrolcü, kapalı çevrim bir sistemin sürekli rejim performansını tip numarasını yükseltmeden iyileştirmek istenen durumlarda kullanılmaktadır.



Kök Yer Eğrisi ile Kontrolcü Tasarımı

Gecikmeli Kontrolcü Tasarımı

Gecikmeli Kontrolcü:

Gecikmeli kontrolcünün kök yer eğrisi üzerinde önemli değişiklikler yapmasını önlemek için bu kontrolcünün açılal katkısının kısıtlı (en fazla 5°-6°) olması istenir.

Bunu sağlamak için bu kontrolcünün kutup ve sıfırı orijin civarında birbirine yakın olarak yerleştirilir. Bu sayede, kapalı çevrim kutupları kendi özgün konumlarından çok az yer değiştirirler. Böylece, kapalı çevrim sistemin geçici davranışı temel olarak aynı kalır.

Bu şekilde yerleştirilmiş kutup ve sıfır olması durumunda, gecikmeli kontrolcünün baskın kapalı çevrim kutup noktasındaki (s_1) genliği aşağıdaki gibi yazılır.

$$|G_c(s_1)| = \frac{K_c}{\alpha} \cdot \left| \frac{s_1 - z}{s_1 - p} \right| \cong \frac{K_c}{\alpha}$$

Bu ifade, K_c kazancının sistemin geçici rejim karakteristiğini değiştirmeden α (>1) kat arttırılabileceği anlamına gelir.

Dolayısıyla, K_c kazancındaki her artış ilgili hata katsayısında benzer bir artış ve sonunda kalıcı rejim hatasında benzer oranda bir azalış sağlayacaktır; yani, kalıcı rejim davranışında bir iyileşme olacaktır.

Kök Yer Eğrisi ile Kontrolcü Tasarımı

Gecikmeli Kontrolcü Tasarımı

Gecikmeli Kontrolcü Tasarım Adımları:

1. P-kontrolcü kullanılmış sistem için kök yer eğrisi çizilir.
2. Geçici rejim isterleri kullanılarak kapalı çevrim sistemin baskın kutubunun s-düzlemindeki s_1 konumu kök yer eğrisinin baskın kolunun üstünde seçilir.
3. $s = s_1$ 'deki genlik koşulunu kullanarak açık çevrim kazancı bulunur ve ilgili hata katsayısı hesaplanır.
4. Kalıcı hata isteri kullanılarak bu hata katsayısında yapılması gerekli olan arttırma saptanır ve α bu değer olarak alınır.
5. Gecikmeli kontrolcü sıfırının konumu sanal eksene s_1 'den en az 5 kat daha yakın olacak şekilde seçilir.
6. Gecikmeli kontrolcü kutubunun konumu sanal eksene sıfırından α kat daha yakın olacak şekilde seçilir.
7. Gecikmeli kontrolcü kullanılan sistemin kök yer eğrisi çizilir.
8. Hedeflenen baskın kapalı çevrim kutup bu yeni KYE eğrisi üzerinde bulunur.
9. K_c değeri bu yeni baskın kapalı çevrim kutupta genlik koşulu kullanılarak bulunur.
10. Eğer bulunan K_c değeri yeterince büyük bir hata katsayısı vermiyorsa, 6 numaralı adıma daha büyük bir α değeriyle gidilir.

→ Birden çok iterasyon gerekebilir.

Kök Yer Eğrisi ile Kontrolcü Tasarımı

Gecikmeli Kontrolcü Tasarımı

Örnek:

İleri besleme yolundaki transfer fonksiyonu aşağıda verilen birim geri beslemeli, $H(s) \equiv 1$, bir kontrol sistemini düşünelim:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+5)}$$

Geçici rejim isteri $\zeta = 0.45$ şeklinde verilmiş olsun.

Buna karşı gelen baskın kapalı çevrim kutubu aşağıdaki gibi bulunur.

$$s_1 = -0.4039 + j0.8016 = 0.8976 e^{j116,74^\circ} \quad \text{Bulunuşu basit bir işlem değil!}$$

P-kontrolcü kullanıldığında, bu noktaya karşın gelen kazanç genlik koşulu kullanılarak aşağıdaki gibi bulunur.

$$K = |s_1| |s_1 + 1| |s_1 + 5|$$

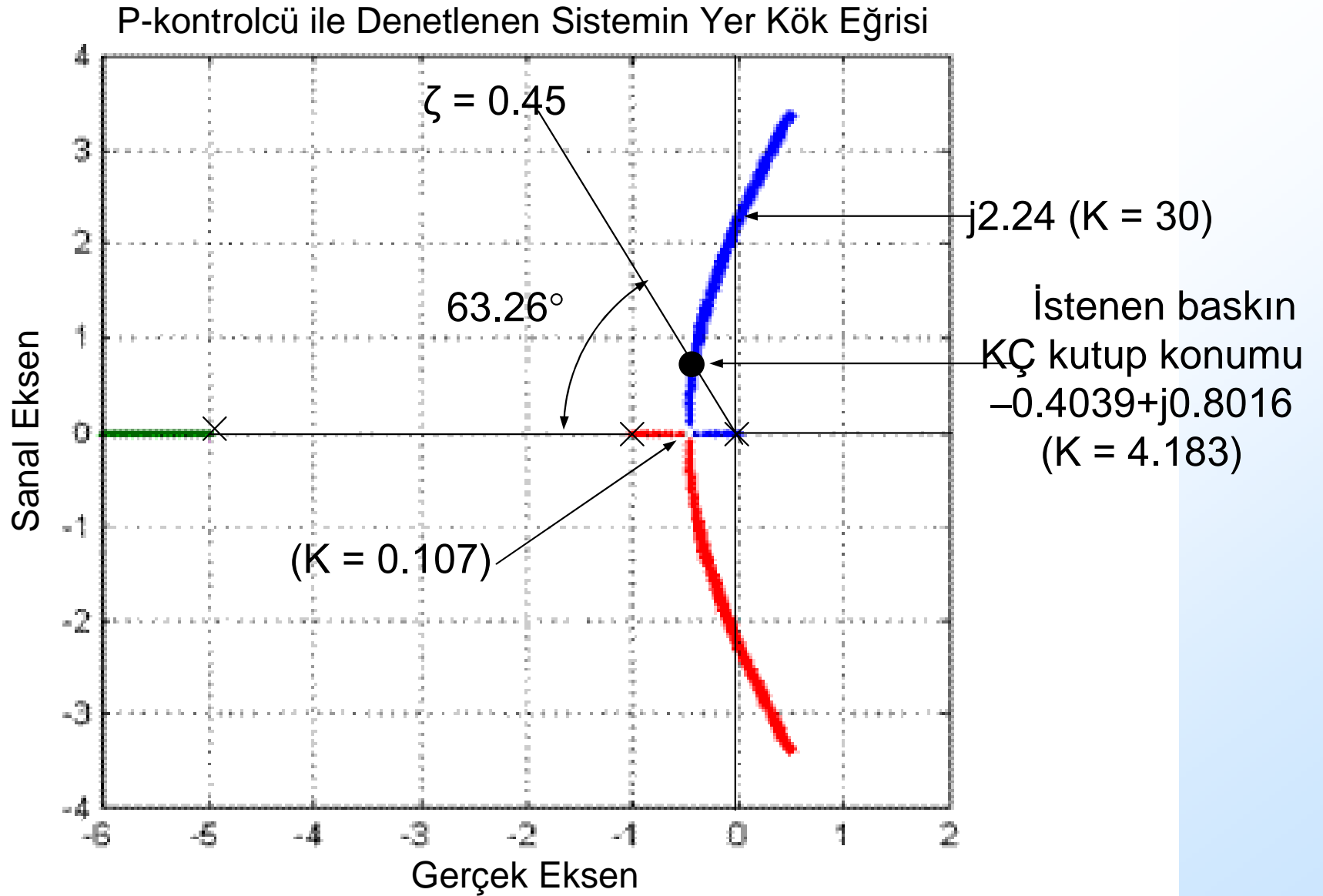
$$K = |-0.4039 + j0.8016| |-0.4039 + j0.8016 + 1| |-0.4039 + j0.8016 + 5|$$

$$K = 4.183$$

Kalıcı rejim isteri ilgili (hız) hata katsayısının 10 kat artırılmasını gerektiriyor olsun.

Bu ister, $\alpha = 10$ olmasını gerektirmektedir.

Kök Yer Eğrisi ile Kontrolcü Tasarımı



Kök Yer Eğrisi ile Kontrolcü Tasarımı

Gecikmeli Kontrolcü Tasarımı

Örnek:

Kontrolcü sıfırının konumunu seçelim:

$$z \approx \text{Re}(s_1)/5 = -0.4039/5 \cong -0.08 \quad \rightarrow \quad T = 12.5$$

Buradan kontrolcünün kutup konumunu bulalım:

$$p = z/\alpha = -0.08/10 = -0.008 \quad \rightarrow \quad \alpha T = 125$$

Dolayısıyla, gecikmeli kontrolcünün transfer fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılır:

$$G_c(s) = K_c \frac{1+12.5s}{1+125s} = \frac{K_c}{10} \cdot \frac{s+0.08}{s+0.008}$$

Geçici rejim isteri olan $\zeta = 0.45$ 'i sağlamak için baskın kapalı çevrim kutup konumu $\zeta = 0.45$ sönümlenme doğrusu üzerinde ve yeni açık çevrim transfer fonksiyonu $G_c(s)G(s)$ için açılı koşulunu sağlayan $s_2 = -0.371+j0.737$ ($\omega_n = 0.825 < 0.8976$) olarak, diğer iki kapalı çevrim kutupları ise -5.18 ve -0.0881 olarak bulunur.

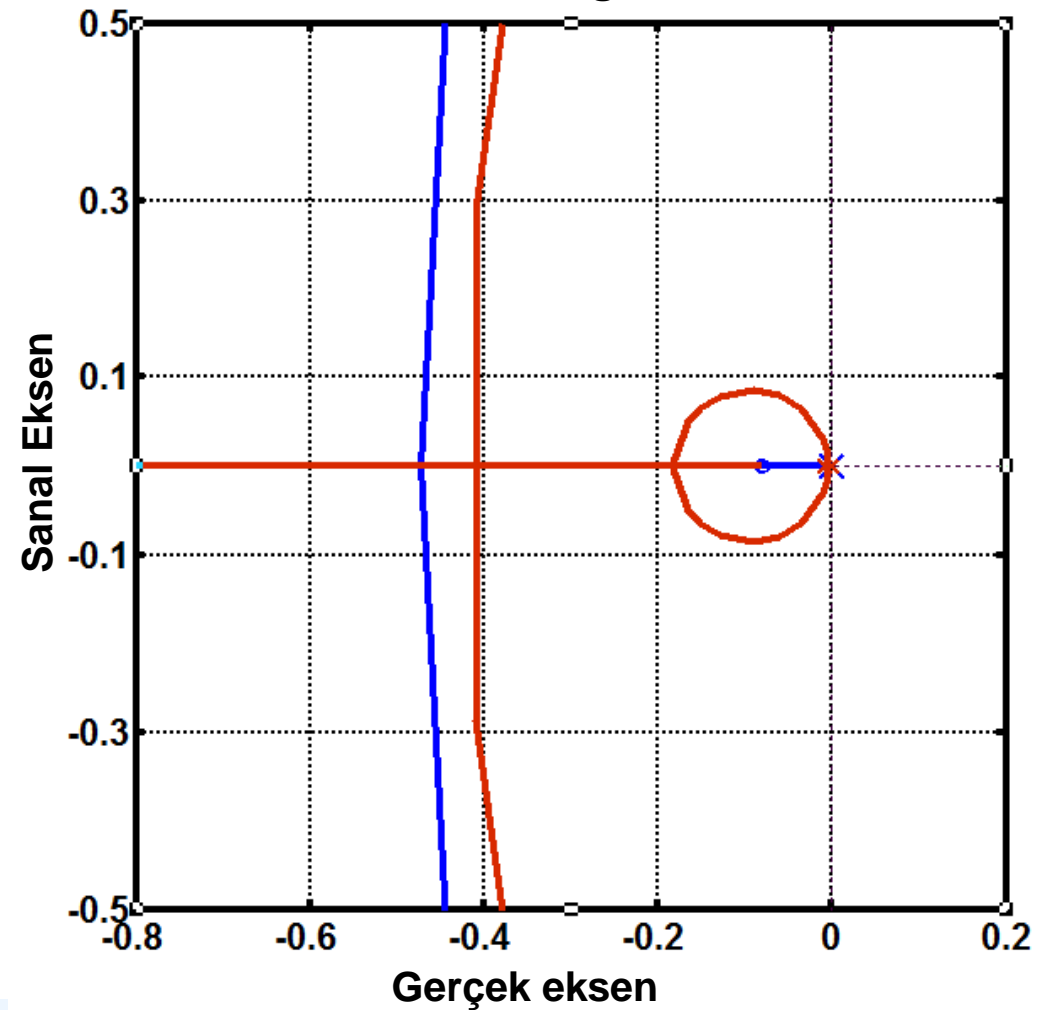
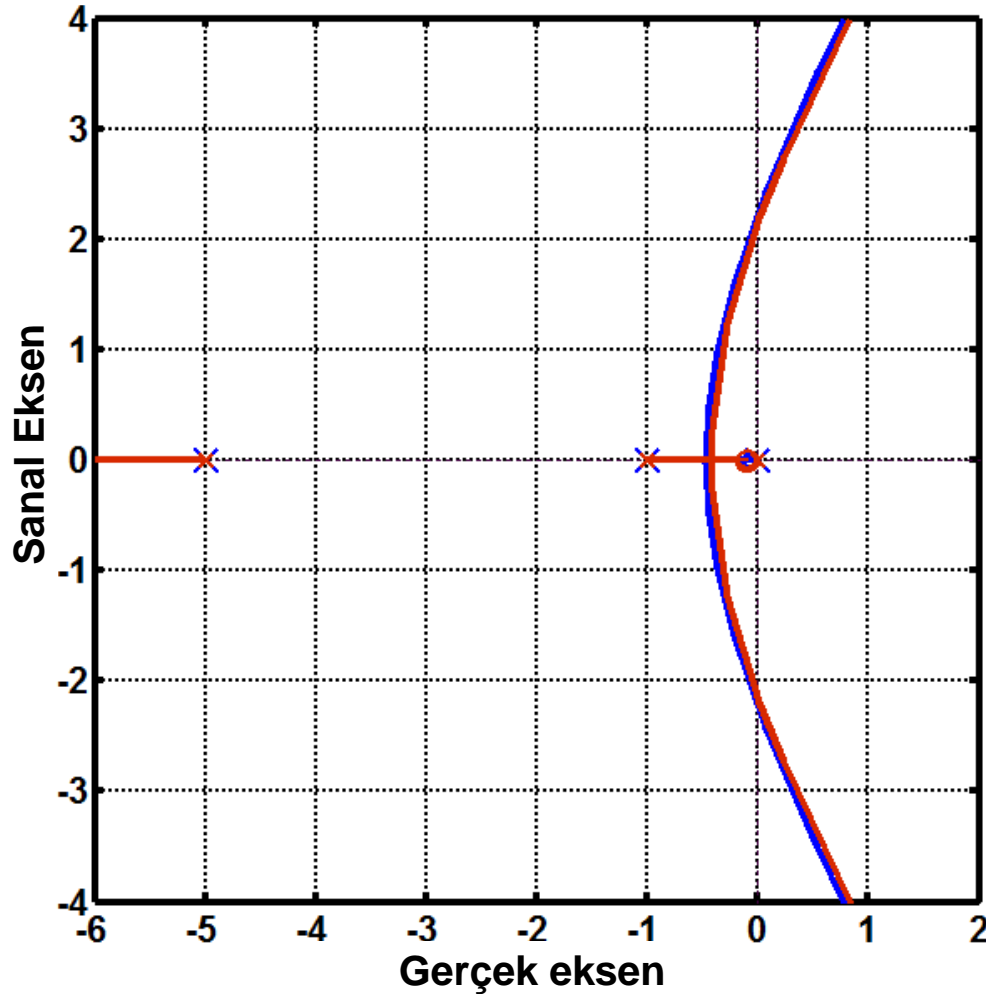
Orijine çok yakın olan -0.0881 'deki kapalı çevrim kutubunun sistem davranışı üzerindeki etkisi, gecikmeli kontrolcü tarafından -0.08 konumuna eklenen sıfır nedeniyle, ihmal edilebilir düzeydedir.

Kök Yer Eğrisi ile Kontrolcü Tasarımı

Gecikmeli Kontrolcü Tasarımı

Örnek:

Gecikmeli Kontrolcü ile Denetlenmiş Sistemin Kök Yer Eğrisi



Kök Yer Eğrisi ile Kontrolcü Tasarımı

Gecikmeli Kontrolcü Tasarımı

Örnek:

Gecikmeli kontrolcünün kazanç K_c değeri genlik koşulu kullanılarak aşağıdaki şekilde bulunur.

$$K_c = 10 |s_2| |s_2 + 1| |s_2 + 5| |s_2 + 0.008| / |s_2 + 0.08| = 38.85$$

Dolayısıyla, kazançtaki gerçek artma

$$K_c/K = 38.85/4.183 = 9.29$$

dır. Bu da istenen 10 kat'dan % 7.1 daha azdır.

Problemin α için 10'dan daha büyük (10.7 ?) bir değer seçerek yeniden çözümü için itetratif bir sürecin ilk adımınıdır. Çünkü böyle bir seçim, kazancın 10 kat yükselmesini garanti etmeyecektir ve çözümün tekrarlanması gerekecektir.

Bu problemi, aşağıdaki tasarım istekleri için **analitik tasarım denklemlerini** kullanarak çözelim.

- Hız hata katsayısındaki artma tamı-tamına 10 olsun. $\rightarrow K_c = 41.83$
- Baskın kapalı çevrim kutup konumu $s_3 = -0.390 + j0.774$ olsun.

Bu konumda $\zeta = 0.45$ sağlanmaktadır. Ayrıca, $|s_3| = \omega_n = 0.867$ konumu s_1 ($\omega_n = 0.898$) noktasına s_2 ($\omega_n = 0.825$) noktasından daha yakın olduğundan sağlanması daha zor bir istektir.

Kök Yer Eğrisi ile Kontrolcü Tasarımı

Gecikmeli Kontrolcü Tasarımı

Örnek:

Çözüm:

$$s_3 = -0.390 + j0.774 = 0.867e^{j116.75^\circ} \Rightarrow |s_3| = 0.867 \quad \& \quad \beta = 116.75^\circ$$

$$K_c G_p(s_3)H(s_3) = 41.83/s_3(s_3 + 1)(s_3 + 5) = 10.48e^{-j178.03^\circ}$$

$$\rightarrow |K_c G_p(s_3)H(s_3)| = 10.48 \quad \& \quad \psi = -178.03^\circ$$

Bu değerler analitik tasarım denklemlerinde kullanılırsa:

$$T = \frac{\sin\beta + |K_c G_p(s_3)H(s_3)|\sin(\beta - \psi)}{|s_3||K_c G_p(s_3)H(s_3)|\sin\psi} = \frac{\sin(116.75^\circ) + 10.48\sin(116.75^\circ + 178.03^\circ)}{(0.867)(10.48)\sin(-178.03^\circ)} = 27.6$$

$$\alpha T = \frac{\sin(\beta + \psi) + |K_c G_p(s_3)H(s_3)|\sin\beta}{-|s_3|\sin\psi} = \frac{\sin(116.75^\circ - 178.03^\circ) + 10.48\sin(116.75^\circ)}{-0.867\sin(-178.03^\circ)} = 284.6$$

$$\alpha = 10.31$$

ve

$$G_c(s) = 41.83 \frac{1 + 27.6s}{1 + 284.6s} = 4.06 \frac{s + 0.0362}{s + 0.00351}$$

Kök Yer Eğrisi ile Kontrolcü Tasarımı

İlerlemeli-Gecikmeli Kontrolcü Tasarımı

Eğer kapalı çevrim sistemin hem geçici rejim hem de kalıcı rejim yanıtında bazı iyileştirmeler isteniyorsa, hem ilerlemeli hem de gecikmeli kontrolcü beraber kullanılmalıdır.

Bu tür bir kontrolcünün transfer fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$G_c(s) = K_c \frac{1 + T_1 s}{1 + \alpha T_1 s} \cdot \frac{1 + T_2 s}{1 + \beta T_2 s}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad \beta > 1$$

- α ve T_1 parametreleri kontrolcünün ilerlemeli kısmıyla ilgilidir ve sistemin istenen bir dominant kapalı çevrim kutup noktasında geçici rejim yanıtıyla ilgili isterleri karşılamak üzere seçilir.
- β ve T_2 parametreleri ise, kontrolcünün gecikmeli kısmıyla ilgilidir ve K_c ile birlikte sistemin kalıcı rejim yanıtıyla ilgili isteri sağlamak üzere seçilir.

Sorularınız

