

BURMESTER EĞRİLERİNİN ELDE EDİLMESİNDE BASİT BİR YÖNTEM

Gökhan KİPER^{1, a)}

¹İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Makina Mühendisliği Bölümü 35430, İZMİR

^{a)}gokhankiper@iyte.edu.tr

4-çubuk mekanizması ile dört konum sentezi probleminde mekanizmanın mafsalları çember noktaları eğrisi ve merkez noktaları eğrisi olarak adlandırılan Burmester eğrileri üzerinde olmaktadır. Burmester eğrileri ilk olarak grafik yöntemlerle elde edilmiş olsa da pek çok analitik yöntem de sunulmuştur. Özellikle karmaşık sayılar kullanılan literatürdeki bu analitik yöntemler konuyu ilk kez öğrenen öğrenciler için karmaşık yöntemlerdir. Bu çalışmada lise seviyesinde analitik geometri bilgisi ile anlaşılabilir basitlikte bir formülasyon sunulmuştur. Önerilen yöntemin literatürde sıklıkla kullanılan bir yöntemle karşılaştırıldığı sayısal bir örnek sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Mekanizmaların kinematik sentezi, dört konum sentezi, Burmester eğrileri

A SIMPLE METHOD TO FORMULATE THE BURMESTER CURVES

ABSTRACT

The joints of a 4-bar linkage reside on the two Burmester curves: circle-point curve and center-point curve. Although Burmester curves were originally obtained graphically, many analytical methods to generate the curves were presented over the last century. In these analytical methods, especially when complex numbers are used, the formulations are hard to understand for a student who just starts to familiarize with the topic. In this study, in order to obtain the Burmester curves, a simple formulation using high school level analytical geometry is presented. A numerical example is presented for comparison of the proposed method with a frequently used method in the literature.

Keywords: Kinematic synthesis of mechanisms, four position synthesis, Burmester curves

1. GİRİŞ

Mekanizma uygulamadaki en sık görülen problemlerden biri, mekanizma uzuvlarından biri ya da uzva bağlı bir nesnenin istenilen konum ve yönelimi sağlamak üzere hareketini elde edecek şekilde kinematik boyutların belirlenmesi gereksinimidir. Çoğu uygulamada sürekli bir hareket yerine nesnenin belirli konumları sağlaması gerekir. Bir düzlemde hareket eden bir nesnenin 2, 3, 4, vs. konumu için mekanizma tasarımı konusu literatürde yoğun çalışılmış bir konudur [1].

Genelde düzlemsel hareket uygulamalarındaki problemler iki ya da üç konum sentezi problemi olarak formüle edilebilse de özellikle hedef nesnenin daha ön-tanımlı bir hareket yapması ya da bir başka nesne ile çakışmadan hareket ettirilmesi gerektiğinde nesne dört konumu sağlayacak şekilde tasarım gerekebilmektedir. Dört-çubuk mekanizması ile dört konum sentezi problemi ilk kez Burmester (1840-1927) [2] tarafından çalışılmış olup mekanizma mafsallarının üzerinde olduğu eğrilere Burmester eğrileri,

ilgili kurama ise Burmester kuramı denmektedir.

Burmester eğrilerinin elde edilmesi için literatürde farklı yöntemler bulunmaktadır. Grafik yöntemler uğraştırıcı, Kısım 2’de sunulan analitik yöntemler ise temel seviyedeki öğrencilere öğretmek için çok karmaşıktır. Kısım 3’te Burmester eğrileri için konuyu ilk kez öğrenen öğrencilerin rahat anlayabilecekleri bir formülasyon, Kısım 4’te ise bir sayısal örnek sunulmuştur.

2. PROBLEM TANIMI ve LİTERATÜR

Hareket sentezinde hareketli düzlem üzerindeki bir noktanın farklı konumlardaki (anlardaki) sabit düzlem üzerindeki izdüşümü noktalarına “homolog noktalar” denmektedir. Hareket bir 4-çubuk mekanizmasının biyel uzvu ile sağlanmak istendiğinde uzvun krank uzuvların bağlantılarını sağlayan mafsal noktalarının sabit düzlemdeki yörüngeleri çember yayları olduğu için bu noktalara “çember noktaları”, sabit mafsalara ise “merkez noktaları” denmektedir. İki ya da üç konum sentezinde çember noktaları keyfi şekilde seçilebilir, çünkü herhangi iki ya da üç noktadan geçen çember çizmek mümkündür. Ancak, dört konum sentezinde rastgele seçilen dört noktadan bir çember geçmeyeceği için homolog noktaların özel seçilmesi gerekir.

Burmester [2], hareketli düzlemin dört konumu için seçilecek homolog noktaların bir çember üzerinde olması için bu noktaların “çember noktaları eğrisi” (Almanca Kreispunktskurve) ya da k -eğrisi üzerinde seçilmesi gerektiğini göstermiştir. k -eğrisi üzerinde seçilen bir noktalara karşılık gelen merkez noktalarının geometrik yeri olan eğriye “merkez noktaları eğrisi” (Almanca (Mittelpunktskurve) ya da m -eğrisi denmektedir. Bu iki eğriye literatürde Burmester eğrileri denmektedir [1]. Burmester [2], hem k -eğrisi, hem de m -eğrisinin üçüncü derece (kübik) cebirsel eğriler olduğunu analitik olarak göstermiş, kutup dörtgenleri kullanarak eğrilerin elde edilmesi için ise grafik yöntemler geliştirmiştir [3]. Burmester, bu eğrilerin dairesel olduğunu da göstermiştir (Üçüncü derece terimlerin $x^2 + y^2$ çarpanı

bulunur) [3]. Burmester eğrilerinin grafik yöntemlerle çizilmesi [4-7]’de sunulmaktadır.

Burmester eğrilerinin parametrik olarak ifade edilmesi üzerine çalışmalar bulunmaktadır. Hackmüller [8] dört homolog noktanın oluşturduğu dörtgenin bir çevrel çemberi olduğunda (yani dört nokta bir çember üzerinde olduğunda) karşılıklı köşe açılarının eşit ya da toplamalarının 180° olması özelliğini kullanarak Burmester eğrilerini karmaşık sayılarla elde etmiştir. Söylemez [1] karşılıklı köşe açılarının eşitliğini kullanarak Burmester eğrilerinin Geogebra’da nasıl çizilebileceğini göstermiştir. Her bir açı değeri için k - ya da m -eğrisi üzerinde iki nokta elde edilmektedir.

Freudenstein ve Sandor [9], Hackmüller’in eğri denklemini kullanarak beş konum sentezi için bir formülasyon sunmuşlar, ayrıca Cherkudinov’un [10] Burmester kuramı için analitik yaklaşımından bahsetmişlerdir. Cherkudinov’un formülasyonunda Burmester eğrileri yedi kutbun koordinatları cinsinden Kartezyen koordinatlarda ifade edilmektedir.

Kaumann [11], 4-çubuk mekanizmasının iki kolunu birer diad olarak modellemiş ve Burmester eğrilerini mekanizmanın ilk konumu ile bir diğer konumu arasındaki krank dönme açısını parametre olarak kullanarak modellemiştir. Chase [12] ile Sandor ve Erdman [13] tarafından da kullanılan bu yaklaşımda yine karmaşık sayılar ile formülasyon yapılmıştır. Krank dönme açısı ile formülasyonda da her açı için Burmester eğrisinde iki nokta elde edilmektedir.

Niyogi [14] dört konum sentezinde iki çift kutup seçerek bu kutuplardan geçen çember ailelerinin denklemlerini çıkarıp iki ailenin ortak çözümü olarak Burmester eğrisi denklemini elde etmiştir. Niyogi ve Kinzel [15] ise Burmester eğrilerinin Kartezyen koordinatlarla ifade edilmesinin dezavantajını vurgulayarak eğrilerin parametrik olarak ifade edilmesini önermiştir. Eğrilerin grafik yöntemle elde edilmesi temel alınarak bir parametrizasyon yapılmıştır. Parametre değerine ek olarak bir artı/eksi seçildiğinde eğri üzerinde bir nokta seçilebilmektedir.

Hayes ve Zsombor-Murray [16] Burmester eğrilerinin düzlemse kuaternionlar ile ifade edilmesini çalışmışlardır. McCarthy ve Soh'un [17] kitabında ise öncelikle Burmester eğrilerinin klasik grafik yöntemle elde edilmesine yer verilmiştir. Analitik yöntem için ise hem merkez noktası hem çember noktalarını içeren bir denklem çıkarılmış, çember noktaları denklemlerden yok edilerek merkez noktaları eğrisi, merkez noktaları denklemlerden yok edilerek ise çember noktaları eğrisi elde edilmiştir. Çember noktaları eğrisinin parametrik ifadesini elde etmek için ayrıca Burmester'in bir merkez noktasının karşıt-kutup dörtgeninin karşı kenarlarını aynı açı ile (ya da 180° açı farkı ile) gördüğü yönündeki teoremi kullanılmıştır.

Literatürdeki tüm bu yöntemler kinematik sentez konusunu ilk kez gören öğrenciler için karmaşık yöntemler olmaktadır.

3. BURMESTER EĞRİLERİNİN ELDE EDİLMESİ İÇİN YENİ YÖNTEM

Hareketli düzlemin ilk konumunda bir Kartezyen xy -düzlemi olsun. İlk konumdan $j = 2, 3, 4$ konumuna bağlı hareket (u_j, v_j) vektör deplasmanı ve α_j dönme açısı ile ifade edilsin. Bu durumda ilk konumdaki bir (x, y) noktasından j konumundaki (x_j, y_j) homolog noktaya dönüşüm, 2×2 dönme matrisi kullanılarak şu şekilde ifade edilir:

$$\begin{bmatrix} x_j \\ y_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_j & -s_j \\ s_j & c_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_j \\ v_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_j x - s_j y + u_j \\ s_j x + c_j y + v_j \end{bmatrix} \quad (1)$$

Burada $c_j = \cos(\alpha_j)$ ve $s_j = \sin(\alpha_j)$ 'dir. Böylelikle u_j, v_j ve α_j ($j = 2, 3, 4$) verildiğinde (x_j, y_j) koordinatları (x, y) koordinatları cinsinden bulunabilmektedir. $(x, y), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)$ noktalarının dördünün de bir çember üzerinde olmasını istiyoruz. Çember

merkezini (m, n) koordinatları, yarıçapını ise R ile gösterir isek

$$\begin{aligned} (x - m)^2 + (y - n)^2 &= R^2 \\ (x_2 - m)^2 + (y_2 - n)^2 &= R^2 \\ (x_3 - m)^2 + (y_3 - n)^2 &= R^2 \\ (x_4 - m)^2 + (y_4 - n)^2 &= R^2 \end{aligned} \quad (2)$$

olmalıdır. $(x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)$ koordinatlarının (1) denklemi ile bağıntılı olduğu göz önünde bulundurulursa (2) denklemlerinden m, n, R parametreleri yok edildiğinde (x, y) cinsinden bir denklem elde edilir, ki bu çember noktaları eğrisi denklemi olacaktır. (2) denkleminde sağ taraflar hep R^2 olduğu için sol taraflar birbirine eşitlendiğinde R parametresi yok edilmiş olur. (2) denkleminde sol tarafları açarak ve birbirlerine eşitleyerek şu denklemler elde edilir:

$$\begin{aligned} 2m(x_2 - x) + 2n(y_2 - y) &= x_2^2 + y_2^2 - x^2 - y^2 \\ 2m(x_3 - x) + 2n(y_3 - y) &= x_3^2 + y_3^2 - x^2 - y^2 \\ 2m(x_4 - x) + 2n(y_4 - y) &= x_4^2 + y_4^2 - x^2 - y^2 \end{aligned} \quad (3)$$

(3) denklemleri m ve n parametreleri cinsinden lineerdir ve aslında bu denklemler (x, y) noktası ile (x_j, y_j) ($j = 2, 3, 4$) homolog noktaları arasındaki orta dikme doğrularının denklemleridir. (3) denklemlerinden herhangi ikisinden m ve n 'yi çözdüğümüzde iki orta dikme doğrusunun kesişim noktasını buluruz. Örneğin $(x, y), (x_2, y_2)$ ve (x_3, y_3) noktalarının koordinatlarını içeren iki denklemi kullanarak m ve n 'yi çözdüğümüzde (x, y) ve (x_2, y_2) noktalarının orta dikmesi ile (x, y) ve (x_3, y_3) noktalarının orta dikmesinin kesişim noktasını, yani bu üç noktadan geçen çemberin merkezinin koordinatlarını buluruz:

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{2} \frac{(x_2^2 + y_2^2 - x^2 - y^2)(y_3 - y) - (x_3^2 + y_3^2 - x^2 - y^2)(y_2 - y)}{(x_2 - x)(y_3 - y) - (x_3 - x)(y_2 - y)} \\ n &= \frac{1}{2} \frac{(x_2 - x)(x_3^2 + y_3^2 - x^2 - y^2) - (x_3 - x)(x_2^2 + y_2^2 - x^2 - y^2)}{(x_2 - x)(y_3 - y) - (x_3 - x)(y_2 - y)} \end{aligned} \quad (4)$$

(4) denklemlerindeki m ve n ifadelerini (3) denklemlerinin sonucunda yerine koyarsak çember noktaları eğrisi denklemi şu şekilde elde edilir:

$$\left\{ \begin{aligned} & \left[x_4 y_3 - x_3 y_4 + (y_4 - y_3)x - (x_4 - x_3)y \right] (x_2^2 + y_2^2 - x^2 - y^2) \\ & + \left[x_2 y_4 - x_4 y_2 + (y_2 - y_4)x - (x_2 - x_4)y \right] (x_3^2 + y_3^2 - x^2 - y^2) \\ & + \left[x_3 y_2 - x_2 y_3 + (y_3 - y_2)x - (x_3 - x_2)y \right] (x_4^2 + y_4^2 - x^2 - y^2) \end{aligned} \right\} = 0 \quad (5)$$

(3) denklemlerini m ve n cinsinden matris denklemleri olarak yazıp ilaveli (İngilizce augmented) matrisin determinantını sıfıra eşitleyerek doğrudan (5) denklemini elde etmek de mümkündür. (1) denklemlerini (5) denklemlerinde yerine koyarak ve sonuç ifadeyi düzenleyerek şu denklem elde edilir:

$$\left\{ \begin{aligned} & \left[A_2(x^2 + y^2) + B_2x + C_2y + D_2 \right] (E_2x - F_2y + w_2) \\ & + \left[A_3(x^2 + y^2) + B_3x + C_3y + D_3 \right] (E_3x - F_3y + w_3) \\ & + \left[A_4(x^2 + y^2) + B_4x + C_4y + D_4 \right] (E_4x - F_4y + w_4) \end{aligned} \right\} = 0 \quad (6)$$

(6) denkleminde

$$\begin{aligned} w_2 &= (u_2^2 + v_2^2) / 2, A_2 = (1 - c_4)s_3 - (1 - c_3)s_4, B_2 = s_4u_3 + c_3v_4 - s_3u_4 - c_4v_3 + v_3 - v_4, \\ C_2 &= c_4u_3 - s_3v_4 - c_3u_4 + s_4v_3 - u_3 + u_4, D_2 = u_3v_4 - u_4v_3, E_2 = c_2u_2 + s_2v_2, F_2 = s_2u_2 - c_2v_2, \\ w_3 &= (u_3^2 + v_3^2) / 2, A_3 = (1 - c_2)s_4 - (1 - c_4)s_2, B_3 = s_2u_4 + c_4v_2 - s_4u_2 - c_2v_4 + v_4 - v_2, \\ C_3 &= c_2u_4 - s_4v_2 - c_4u_2 + s_2v_4 - u_4 + u_2, D_3 = u_4v_2 - u_2v_4, E_3 = c_3u_3 + s_3v_3, F_3 = s_3u_3 - c_3v_3, \\ w_4 &= (u_4^2 + v_4^2) / 2, A_4 = (1 - c_3)s_2 - (1 - c_2)s_3, B_4 = s_3u_2 + c_2v_3 - s_2u_3 - c_3v_2 + v_2 - v_3, \\ C_4 &= c_3u_2 - s_2v_3 - c_2u_3 + s_3v_2 - u_2 + u_3, D_4 = u_2v_3 - u_3v_2, E_4 = c_4u_4 + s_4v_4, F_4 = s_4u_4 - c_4v_4 \end{aligned} \quad (7)$$

tür ve bu ifadelerdeki tüm terimler bilinen u_j, v_j, α_j ($j = 2, 3, 4$) cinsindedir. (6) denkleminde tüm terimleri çarparak düzenlediğimizde şu denklem elde edilir:

$$\left\{ \begin{aligned} & \left[(A_2E_2 + A_3E_3 + A_4E_4)x - (A_2F_2 + A_3F_3 + A_4F_4)y \right] (x^2 + y^2) \\ & + \left(\begin{aligned} & A_2w_2 + A_3w_3 + A_4w_4 \\ & + B_2E_2 + B_3E_3 + B_4E_4 \end{aligned} \right) x^2 + \left(\begin{aligned} & A_2w_2 + A_3w_3 + A_4w_4 \\ & - C_2F_2 - C_3F_3 - C_4F_4 \end{aligned} \right) y^2 + \left(\begin{aligned} & C_2E_2 + C_3E_3 + C_4E_4 \\ & - B_2F_2 - B_3F_3 - B_4F_4 \end{aligned} \right) xy \\ & + \left(\begin{aligned} & D_2E_2 + D_3E_3 + D_4E_4 \\ & + B_2w_2 + B_3w_3 + B_4w_4 \end{aligned} \right) x + \left(\begin{aligned} & C_2w_2 + C_3w_3 + C_4w_4 \\ & - D_2F_2 - D_3F_3 - D_4F_4 \end{aligned} \right) y + D_2w_2 + D_3w_3 + D_4w_4 \end{aligned} \right\} = 0 \quad (8)$$

(8) denklemini parametrize etmek için (x, y) gibi 3. derece (kübik) dairesel (3. derece terimlerin $x^2 + y^2$ çarpanı var) bir denklemdir. (8) denklemini parametrize etmek için (x, y)

Kartezyen koordinatlarından (r, θ) kutupsal koordinatlarına geçiş yapalım ($x = r \cos(\theta)$ ve $y = r \sin(\theta)$ olur). (8) denklemini şuna dönüştür:

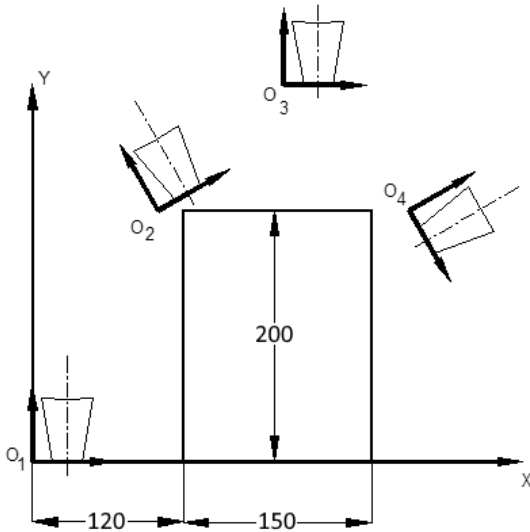
$$\left\{ \begin{aligned} & \left[(A_2E_2 + A_3E_3 + A_4E_4)c\theta - (A_2F_2 + A_3F_3 + A_4F_4)s\theta \right] r^3 \\ & + \left[(B_2E_2 + B_3E_3 + B_4E_4)c^2\theta - (C_2F_2 + C_3F_3 + C_4F_4)s^2\theta \right. \\ & \left. + (C_2E_2 + C_3E_3 + C_4E_4 - B_2F_2 - B_3F_3 - B_4F_4)c\theta s\theta + A_2w_2 + A_3w_3 + A_4w_4 \right] r^2 \\ & + \left[(D_2E_2 + D_3E_3 + D_4E_4)c\theta + (C_2w_2 + C_3w_3 + C_4w_4)s\theta \right] r + D_2w_2 + D_3w_3 + D_4w_4 \end{aligned} \right\} = 0 \quad (9)$$

Bir θ açısı seçildiğinde (9) denklemi r cinsinden kübik bir denklem olur ve ya bir, ya üç gerçel çözümü vardır. Dikkat edilirse $[0, \pi)$ aralığında bir θ açısı için r değeri bir çözüm ise $[\pi, 2\pi)$ aralığında $\theta + \pi$ için $-r$ çözüm olacaktır. Bu nedenle θ için yalnızca $[0, \pi)$ aralığını taramak ve negatif r kökü bulunursa θ yerine $\theta + \pi$ açısını kullanmak, ya da $-r$ pozitif değerini kullanmak yeterli olacaktır. Kübik denklemin analitik çözümü bulunmaktadır [18].

θ açısı $[0, \pi)$ aralığında istenen hassasiyette değiştirilerek ve (7) ve (9) denklemleri kullanılarak çember noktaları eğrisi, (1) ve (4) denklemleri kullanılarak ise merkez noktaları eğrisi elde edilebilir ve çizdirilebilir.

4. SAYISAL ÖRNEK

Bu bildiriye önerilen yöntemin sayısal bir örnek ile doğrulamasını yapmak ve önerilen yöntemin literatürdeki [13] bir yöntem ile karşılaştırmasını yapmak için [1]'de bulunan bir problem üzerine çalışılmıştır. Bir engelin üzerinden hareket ettirilmesi istenen bir nesnenin dört konumu Şekil 1'de gösterilmiştir.



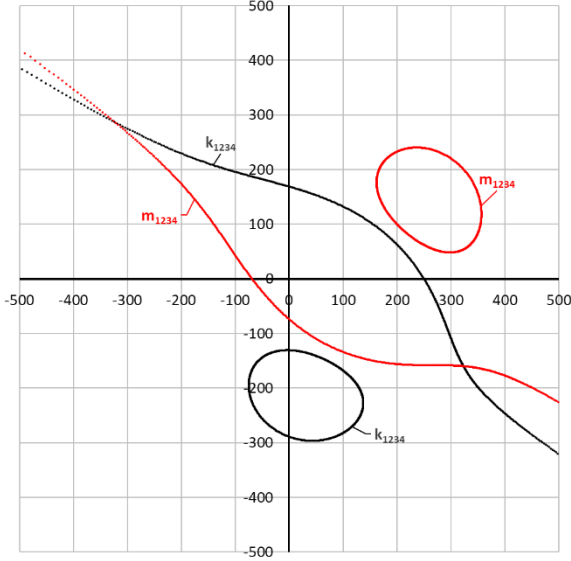
Şekil 1. Bir nesnenin 4 konumu [1]

2, 3 ve 4. konumların ilk konuma göre koordinat ve açı bilgileri şu şekilde verilmiştir:

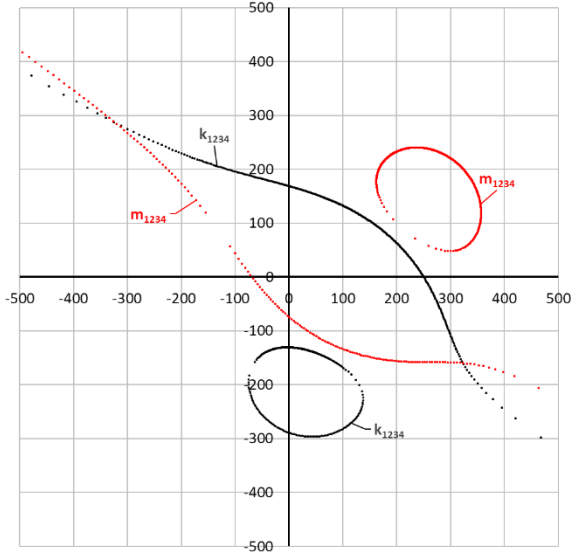
$$\begin{aligned} u_2 &= 100, v_2 = 200, \alpha_2 = 30^\circ \\ u_3 &= 200, v_3 = 300, \alpha_3 = 0^\circ \\ u_4 &= 300, v_4 = 200, \alpha_4 = -60^\circ \end{aligned} \quad (10)$$

Sandor ve Erdman'ın [13] karmaşık sayılarla formülasyonunda Burmester eğrileri oluşturulurken eğri parametresi olarak krankın ilk ve ikinci konumu arasındaki dönüş açısı olan β_2 açısı kullanılmaktadır. β_2 açısı $0^\circ-360^\circ$ aralığında 0.5° aralıklarla listelenerek çizilen Burmester eğrileri Şekil 2'de görülmektedir. Bu grafiğin oluşturulduğu Excel dosyası [1] kitabının çevrimiçi ek materyallerinin bulunduğu internet sayfasında sunulmuştur [19].

Bu bildiriye sunulan formülasyonda ise çember noktaları eğrilerinin parametresi olarak kutupsal koordinat açısı θ kullanılmıştır. θ açısı $0^\circ-360^\circ$ aralığında 0.5° aralıklarla listelenerek çizilen Burmester eğrileri Şekil 3'te görülmektedir. Hem Şekil 2, hem Şekil 3'teki grafiklerde eğriler her bir veri noktası bir parametre değerine karşılık gelecek şekilde çizilmiştir.



Şekil 2. Sandor ve Erdman'ın yöntemi ile elde edilen çember (k_{1234}) ve merkez noktaları (m_{1234}) eğrileri



Şekil 3. Bu bildiriye göre yöntem ile elde edilen çember (k_{1234}) ve merkez noktaları (m_{1234}) eğrileri

Her iki yöntem ile de aynı eğriler elde edilebilmiş olsa da eğri parametresi olarak kutupsal koordinat açısı θ kullanıldığında çember noktaları eğrileri üzerindeki noktaların konum vektörlerinin eğrilere teğet olduğu yerlerde eğrilerin üzerindeki noktaların seyrek olduğu görülmektedir (Şekil 3'te (125, -190) ve (-65, -160) koordinatları civarı). Bu problem daha sık θ değerleri kullanılarak (örneğin 0.1° ya da daha küçük aralıklarla) bir miktar çözülebilir. β_2 eğri parametresi kullanıldığında

ise bu problemin olmadığı görülmektedir (Şekil 2).

5. SONUÇLAR

Bu bildiriye öncelikle 4-çubuk mekanizması ile dört konum sentezinde mafsal noktalarının üzerinde seçilebildiği Burmester eğrilerinin analitik olarak elde edilmesinde literatürdeki farklı yöntemlerden bahsedilmiştir. Özellikle karmaşık sayılar kullanılan bu yöntemlerin konuyu ilk kez öğrenen öğrenciler için anlaşılması zor olabilmektedir. Bu bildiriye başlangıç seviyesindeki öğrencilerin çok temel, lise seviyesinde analitik geometri bilgisi ile anlayabilecekleri bir analitik formülasyon sunulmuştur. Yöntemin temelini oluşturan 4 noktanın bir çember üzerinde olması koşulu, çember noktaları eğrilerinin doğrudan tanımı olduğu için yöntemin öğrenciye problemin geometrisini iyi bir şekilde öğreteceği düşünülmektedir.

Sunulan sayısal örnekte de görüldüğü üzere önerilen yöntem ile eğri üzerinde bazı bölgelerde noktalar seyrek olarak elde edilmesi yöntemin önemli bir dezavantajı olarak değerlendirilmiştir.

TEŞEKKÜR

Sunulan yöntemi inceleyen ve yorumlayan Prof. Dr. Eres Söylemez'e teşekkür ederim.

KAYNAKLAR

- [1] Söylemez, E. (2023). *Kinematic of Mechanisms: Using Excel and Geogebra*, Springer, Cham.
- [2] Burmester, L. E. H. (1988). *Lehrbuch der Kinematik: Für Studierende der Maschinentechnik, Mathematik und Physik*, Arthur Felix Verlag, Leipzig.
- [3] Koetsier, T. (2009). Ludwig Burmester (1840–1927). *Distinguished Figures in Mechanism and Machine Science*, Springer, Dordrecht.
- [4] Beyer, R. (1953). *Kinematische Getriebesynthese*, Springer-Verlag, Berlin. (İngilizce çevirisi: Kuenzel, H. (1963). *The*

Kinematic Synthesis of Mechanisms, Chapman and Hall, Londra.

[5] Lichtenheldt, W. (1961). *Konstruktionslehre der Getriebe*, Akademia Verlag, Berlin.

[6] Hall, A. S. (1961). *Kinematics and Linkage Design*, Prentice-Hall, New Jersey.

[7] Keller, R. E. (1965). Sketching rules for the curves of Burmester mechanism synthesis. *Journal of Engineering for Industry*, 87(2), 155-160. DOI 10.1115/1.3670786

[8] Hackmüller, E. (1938). Eine analytisch durchgeführte Ableitung der Kreispunkt- und Mittelpunktkurve. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, 18, 252-254.

[9] Freudenstein, F., Sandor, G. N. (1961). On the Burmester points of a plane. *Journal of Applied Mechanics*, 28(1), 41-49. DOI 10.1115/1.3640465

[10] Cherkudinov, S. A. (1959). Синтез плоских шарнирно-рычажных механизмов (Düzlemsel Mesnetli Mekanizmaların Sentezi), SSCB Bilimler Akademisi, Moskova.

[11] Kaufman, R. E. (1973). Singular solutions in Burmester theory. *Journal of Engineering for Industry*, 95(2), 572-576. DOI 10.1115/1.3438192

[12] Chase, T. R. (1984). *Burmester Theory for Four Precision Positions: An Extended Discourse With Application to the Dimensional Synthesis of Arbitrary Planar Linkages*, Doktora Tezi, Minnesota Üniversitesi.

[13] Sandor, G. N., Erdman, A. G. (1984). *Advanced Mechanism Design: Analysis and Synthesis*, Cilt 2, Prentice-Hall, New Jersey.

[14] Niyogi, S. (1997). *Rigid Body Guidance of 4 Bar Linkages With Position Tolerances*, Yüksek Lisans Tezi, Ohio Eyalet Üniversitesi.

[15] Niyogi, S., Kinzel, G. L. A parametrization scheme for the Burmester curves. *Proceedings of the ASME 1998 Design Engineering Technical Conferences. Volume 1B: 25th Biennial Mechanisms Conference*, Atlanta, Georgia, ABD.

[16] Hayes, M. J. D., Zsombor-Murray, P. J. (2002). Solving the Burmester problem using kinematic mapping. *ASME 2002 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference. Volume 5: 27th Biennial Mechanisms and Robotics Conference*. Montreal.

[17] McCarthy, J. M., Soh, G. S. (2011). *Geometric Design of Linkages*, 2. baskı, Springer, New York. McCarthy, J. M., Soh, G. S. (2011). *Geometric Design of Linkages*, 2. baskı, Springer, New York.

[18]<https://mathworld.wolfram.com/CubicFormula.html>, Erişim: 19 Temmuz 2025.

[19]http://www.makted.org.tr/Kinematic_Synthesis_of_Mechanisms/Chapter4/FourPos_Example%203.xlsm, Erişim: 19 Temmuz 2025.