

## GEOMETRİK DEĞİŞKENLİĞİN AKUSTİK KARA DELİKLERİN PERFORMANSI ÜZERİNE ETKİSİ

Yağmur YILMAZ<sup>1</sup>, Sudenur KAHVECİ<sup>1</sup>, Arif ÖZER<sup>1</sup>, Furkan ARSLAN<sup>1</sup>, Serkan GÜLER<sup>2</sup> ve Murat KARA<sup>1, a)</sup>

<sup>1</sup> Bolu Abant İzzet Baysal Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Makine Mühendisliği Bölümü, 14020, BOLU

<sup>2</sup> İskenderun Teknik Üniversitesi, Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi, Makine Mühendisliği Bölümü, 31200, HATAY

<sup>a)</sup>kara.murat@ibu.edu.tr

Fiziksel kara deliklerden esinlenerek geliştirilen akustik kara delikler (AKD), son yıllarda eğilme titreşimlerini sönmülemek amacıyla pasif titreşim yutuculara alternatif olarak öne çıkmaktadır. Bu çalışmada, üretimden kaynaklı geometrik belirsizliklerin AKD performansı üzerindeki etkisi incelenmiştir. Bu kapsamda, uç kalınlığı polinom fonksiyonuna göre azalan ve yapısal parametresi belirsiz olan bir AKD'li giriş modeli ele alınmış, yansıma katsayısı performansı hem analitik olarak hem de sonlu elemanlar yöntemiyle dalga ayrıştırma tekniği kullanılarak hesaplanmıştır. Ardından AKD uzunluğu belirsiz bir parametre olarak tanımlanmış ve Monte Carlo Simülasyonu (MCS) ile 50 örneklem üzerinden istatistiksel analiz yapılmıştır. Elde edilen sonuçlar, düşük frekanslarda belirsizliğin etkisinin ihmal edilebilir düzeyde olduğunu, ancak incelenen yapı için 2200 Hz üzerindeki frekanslarda geometrik varyasyonların yansıma katsayısında ciddi sapmalara yol açtığını ortaya koymuştur. Bu durum, AKD tasarımlarında geometrik belirsizliklerin dikkate alınmasının güvenilir bir titreşim kontrolü için kritik olduğunu göstermektedir.

**Anahtar Kelimeler:** Akustik kara delik, belirsizlik, yansıma katsayısı, titreşim azaltımı

### EFFECT OF GEOMETRIC VARIABILITY ON PERFORMANCE OF ACOUSTIC BLACK HOLES

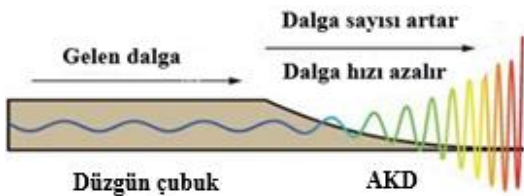
#### ABSTRACT

Inspired by physical black holes, acoustic black holes (ABHs) have recently emerged as promising passive vibration absorbers, particularly for attenuating flexural waves. In this study, the impact of manufacturing-induced geometric uncertainties on ABH performance is investigated. A beam with a thickness profile decreasing by a polynomial towards the tip is modelled, where the ABH length is treated as an uncertain parameter. The reflection coefficient, which indicates ABH performance, is computed both analytically and via a wave decomposition technique implemented in a finite element model. Subsequently, a Monte Carlo Simulation (MCS) with 50 samples is performed to quantify the uncertainty effects. Results show that while uncertainty has negligible impact at low frequencies, it significantly affects the reflection coefficient above 2200 Hz for the considered structure. Especially in these higher frequencies, even millimetric deviations in ABH geometry result in substantial performance variations. These findings highlight the critical importance of accounting for geometric uncertainty in the design process of ABHs to ensure reliable and effective vibration attenuation.

**Keywords:** Acoustic black hole, uncertainty, reflection coefficient, vibration mitigation

## 1. GİRİŞ

Fiziksel kara delikler uzay-zaman geometrisi içerisinde kütle çekimi sebebiyle ışığı dahi kendisine çekerek yansıma olmadan enerjinin tamamını yutar. Bu olay, mühendislikte, titreşim ve akustik performans geliştirme çalışmalarında ilham kaynağı olmuştur. Bu çalışmalarda, kütle çekimi yerine malzemenin geometrisinde yapılan küçük değişimler kullanılır. Bu kapsamda Mironov 1988 yılında yaptığı çalışma ile daha sonra akustik kara delik (AKD) olarak isimlendirilecek olan yansısız yani tamamen yutucu bir sınırın mümkün olduğunu belirtmiştir [1]. Mironov, Şekil 1’de örneği verilen geometride olduğu üzere, ideal olarak kalınlığın gittikçe azalan ve teorik olarak en uçta sıfır olduğu geometrilerde yapının uç kısmına doğru dalga hızı azalır ve fiziksel kara deliklere benzer şekilde tamamen yutucu yani gelen dalgaların geri dönmediği bir yapı (akustik kara delik) elde edildiğini ve titreşim kontrolünün sağlanabileceğini belirtmiştir. Fakat bu durum pratikte sıfır kalınlığın üretilmemesi sebebiyle geri yansımalar sebep olacağı için gelen dalgaların yutumunu sağlamak amacıyla 2007 yılında akustik kara delik üzerine yutucu yüzeylerin yerleştirilmesi önerilmiştir [2]. 2007 yılının ardından endüstriyel uygulanabilirliğinin görülmesi ile bu konudaki bilimsel araştırmalar artmaya başlamıştır. Denis vd. AKD performans ölçümlerinde yansıma katsayısını deneysel ve teorik olarak ölçmüşlerdir [3]. Jeon ve Lee spiral bir ABH yapı tasarlayarak titreşim azaltımı sağlamışlardır [4]. Bir başka çalışmada klasik bir AKD’ye sahip iki-boyutlu bir yapıyı deneysel olarak düşük, orta ve yüksek frekans bölgesinde incelemişlerdir [5]. Bir boyutlu yapılarda AKD parametrelerinin yansıma katsayısı performansı Hook vd. tarafından incelenmiş ve düşük yansıma katsayısının AKD’in modları ile ilgili olduğu göstermiştir [6].



Şekil 1. Akustik kara deliklerde dalga yayılımı [7]

Titreşim çalışmalarında belirsizlik, sistemin davranışını etkileyen parametrelerin tam olarak bilinmemesi veya kontrol edilememesi

nedeniyle ortaya çıkar. Bu durum; malzeme özelliklerindeki varyasyonlar, üretim hataları, sınır koşullarındaki değişkenlikler ve çevresel etkiler gibi birçok faktörden kaynaklanabilir. Belirsizlikler hem deneysel hem de sayısal analizlerde model doğruluğunu ve öngörülebilirliği önemli ölçüde sınırlayabilir. Bu nedenle belirsizlik analizi vibro-akustikte oldukça önemli yer tutmaktadır. Bu kapsamda literatürde belirsizlik analizinde Monte Carlo Simülasyonu (MCS) [8], polinomal kaos açılımı [9], aralık analizi [10] gibi birçok yöntem kullanılmaktadır. Bu yöntemlerin içerisinde MCS basit şekilde sayısal yöntemler ile uygulanabilirliği sayesinde en sık kullanılan yöntemdir. Bu yöntemde, belirsiz girdiler dağılım tipine ve istatistiksel büyüklüklerine göre uygun sayıda örneklem ile modellenir ve her bir örnekleme karşılık gelen cevap parametresi elde edilerek cevabın istatistiksel özellikleri hesaplanır.

Akustik kara delikli yapılarda ise belirsizlik, hem dalga boyunun yapının kalınlık profiline oranla büyümesiyle (yani özellikle uç noktaya yakın bölgelerde) ortaya çıkan geometrik yayılım sorunlarından, hem de malzeme özelliklerinin üretimden kaynaklı mikroyapısal farklılıklarından kaynaklanabilir. Dalga yayılım hızının sıfıra yaklaşmasıyla birlikte teorik olarak dalganın uç noktaya asimptotik olarak ulaşması beklenirken, gerçek sistemlerde bu durum ölçülemeyen küçük yansımalar, mikroskobik kusurlar ve sönümleme mekanizmalarındaki belirsizlikler nedeniyle sapmalara yol açabilir. Dolayısıyla, akustik kara delik tasarımlarında hem geometrik hem de malzeme temelli varyasyonların öngörülemez etkileri dikkate alınmalı ve bu yapıların davranışı her zaman ideal teorik modele tam olarak uymayabileceği göz önünde bulundurulmalıdır. Bu kapsamda bu çalışmada geometrik belirsizliğe sahip akustik kara deliğin analizi Sonlu Elemanlar (SE) yönteminin Monte Carlo Simülasyonu (MCS) ile birlikte kullanılması ile analiz edilmiş ve yansıma katsayısındaki değişimler frekansa bağlı olarak sunulmuştur.

## 2. YANSIMA KATSAYISININ HESAPLANMASI

Bu bölümde Şekil 2’de şematik olarak gösterilen ince bir kirişin ucunda yer alan ve kalınlığı,

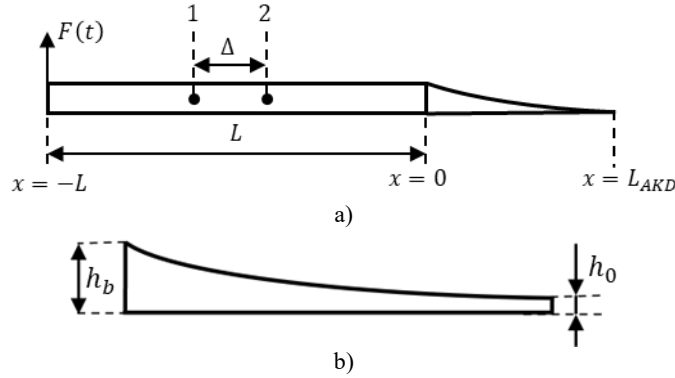
$$h(x) = \frac{h_b - h_0}{L_{AKD}^\mu} (L_{AKD} - x)^\mu + h_0. \quad (1)$$

formunda azalan AKD’nin performansının belirlenmesi için uygulanan yöntemler kısaca anlatılmıştır. Burada,  $h_b$  kirişin kalınlığı,  $h_0$  AKD’nin uç kalınlığı,  $L_{AKD}$  AKD’nin uzunluğu,  $\mu$  AKD’nin kalınlığının azaldığı polinomun derecesidir. Bu noktada eğilme titreşimlerine maruz ince bir kiriş için dalga hızının verilmesi faydalı olacaktır [6]:

$$c_B(x) = \left( \frac{\pi^2 E(1+j\eta)h^2(x)f^2}{3\rho} \right)^{0,25}. \quad (2)$$

Burada,  $E$  çubuğun elastisite modülünü,  $\rho$  yoğunluğunu,  $\eta$  kayıp faktörünü,  $f$  titreşim frekansını,  $h$  çubuğun kalınlığını,  $x$  uzamı gösterir ve  $j = \sqrt{-1}$ . Görüldüğü üzere, kalınlığın uzam boyunca azalması ile dalga hızı da azalır. Çubuk üzerindeki dalga sayısı ise şu şekilde hesaplanır [6]:

$$k(x) = \left( \frac{48\pi^2 \rho}{E(1+j\eta)h^2(x)} f^2 \right)^{0,25}. \quad (3)$$



Şekil 2. Akustik kara delikli bir kirişin şematigi a) AKD analizinde zorlama ve cevap noktaları, b) yapının AKD kısmı

Bir önceki bölümde belirtildiği gibi AKD’e sahip yapılarda titreşim kontrolü geri yansısız sınırın elde edilmesi ile sağlanmaktadır. Buna göre yayınan dalganın uç kısmından yansımaya miktarının belirlenmesi AKD yapının performansını gösterir. Yansıyan dalganın genliğinin ( $\varphi^-$ ) gelen dalganın genliğine ( $\varphi^+$ ) oranı yansımaya katsayısı ( $R$ ) olarak bilinir ve şekilde ifade edilir [6]:

$$R = \left| \frac{\varphi^-}{\varphi^+} \right|. \quad (4)$$

Yansımaya katsayısı, Şekil 2’de şematik olarak çizilen AKD’e sahip kiriş için Wentzel–Kramers–Brillouin yöntemi kullanılarak analitik olarak AKD bölgesindeki dalga sayısının integrasyonu ile hesaplanabilir [11]:

$$R = \exp \left( 2 \int_0^{L_{AKD}} \text{Im} \{k(x)\} dx \right). \quad (5)$$

Burada,  $k$  uzama bağlı olarak AKD bölgesindeki dalga sayısını ifade eder. Denklem (3), Denklem (5)’te yerine yazılarak AKD’nin yansımaya katsayısı hesaplanabilir. Denklem (3)’e göre AKD bölgesindeki kayıp faktörü arttıkça yansımaya katsayısının sıfıra yakınsayacağı yani performansının artacağı görülmektedir. Fakat bu yaklaşım yalnızca yüksek frekanslarda geçerli olup AKD yapısının modal davranışını modellememesi nedeniyle dezavantajlıdır. Ayrıca akustik kara deliğin kalınlık profilinin bilinmemesi durumunda performansının belirlenmesi mümkün değildir. Bu dezavantajları ortadan kaldırmak için deneysel ve sayısal hesaplamalarda dalga ayrıştırma yöntemi kullanılır.

Dalga ayrıştırma yönteminde Şekil 2.a’da görüldüğü üzere yapı bir ucundan dinamik olarak zorlanır. Ardından Şekil 2.a’da gösterilen 1 ve 2 nolu konumlardan eğilme

yönündeki kompleks titreşim hızı (sırasıyla  $\dot{w}_1$  ve  $\dot{w}_2$ ) elde edilir. Bu konumlardan elde edilen titreşim hızları şu denklemlerde yerine yazılarak sağa giden dalganın ( $\varphi^+$ ) ve sola giden dalganın ( $\varphi^-$ ) genlikleri hesaplanır [6]:

$$\varphi^+ = \frac{-1}{4\pi f \sin(k_b \Delta)} \left( \dot{w}_1 e^{jk_b \Delta/2} - \dot{w}_2 e^{-jk_b \Delta/2} \right), \quad (6)$$

$$\varphi^- = \frac{-1}{4\pi f \sin(k_b \Delta)} \left( \dot{w}_2 e^{jk_b \Delta/2} - \dot{w}_1 e^{-jk_b \Delta/2} \right). \quad (7)$$

Burada,  $\Delta$  sensörler arası uzaklık ve  $k_b$  ise girişin dalga sayısıdır. Burada dikkat edilmesi gereken husus, dalga ayrıştırma yönteminde Denklem (6)-(7)'de girişin dalga sayısı, Denklem (5)'te verilen analitik formülasyonda ise AKD bölgesindeki uzama bağlı dalga sayısının kullanılmasıdır.

Seçilen cevap noktası konumlarının arasındaki uzaklık ( $\Delta$ ) ve bu konumlarının giriş üzerindeki herhangi bir süreksizlik noktası ile olan uzaklıkları dalga ayrıştırma yönteminin uygulanabileceği frekans aralığını etkiler. Bu konudaki daha detaylı bilgiler için Hook ve arkadaşlarının makalesi incelenebilir [6].

### 3. NORMALLEŞTİRİLMİŞ DALGA SAYISI DEĞİŞİMİ (NDD)

Literatürdeki akustik kara delik üzerine yapılan parametrik çalışmalar incelendiğinde Denklem (1)'de yer alan polinom derecesi ( $\mu$ ) arttıkça daha küçük yansımaya katsayısının elde edildiği yani AKD performansının arttığı tespit edilmiştir [6]. Fakat bu polinom derecesinin çok büyük olması, girişten gelen dalganın ani bir kesit değişimi ile karşılaşması sebebiyle hesaplamalarda elde edilemeyen yansımalara sebep olacaktır. Bu durumu incelemek için Feurtado vd. [12] Normalleştirilmiş Dalga sayısı Değişimi (NDD) parametresini önerdiler:

$$NDD = \frac{1}{k^2(x)} \frac{dk(x)}{dx}. \quad (8)$$

NDD'nin 1'den çok küçük olduğu değerlerde geri yansımaların olmadığını dolayısıyla AKD için elde edilen yansımaya katsayısının geçerli olacağını belirttiler. NDD uzama ve frekansa bağlı olarak değişir. Fakat, klasik AKD için NDD'nin uzama göre maksimum değeri,  $x =$

0'da elde edilir. Bu sebeple frekans domaininde grafikler verilirken bu noktadaki NDD sunulur.

## 4. SAYISAL HESAPLAMALAR

Bu bölümde Tablo 1'de mekanik özellikleri ve fiziksel boyutları verilen belirsiz AKD'li bir girişin analiz sonuçları sunulmuştur. Bu kapsamda ilk olarak deterministik durum için NDD katsayısı hesaplanarak incelenen sonuçlara hangi frekans sonrası güvenileceği ortaya konulmuştur. Daha sonra yansımaya katsayısı için doğrulama çalışması yapılmış ve bölüm belirsizlik analizi sonuçlarının sunulması ile sonlandırılmıştır. Tüm analizler 0-4000 Hz aralığında yapılmıştır.

### 4.1. NDD'e göre Frekans Bölgesi Tayini

Tablo 1'de mekanik özellikleri ve fiziksel boyutları verilen AKD'li giriş için NDD'nin her bir frekanstaki maksimum değeri hesaplanmış ve Şekil 3'te sunulmuştur.

Tablo 1. İncelenen yapının mekanik özellikleri ve fiziksel boyutları

Özellik / Büyüklük	Çubuk	AKD
Elastisite Modülü (GPa)	1,9	1,9
Poisson Oranı	0,35	0,35
Yoğunluk (kg/m <sup>3</sup> )	1040	1040
Kayıp Faktörü	0,0002	0,4
Uzunluk (mm)	300	70
Kalınlık (mm)	10	10
Genişlik (mm)	40	40
Uç Kalınlığı (mm)	-	0,5
Polinom Derecesi	-	4

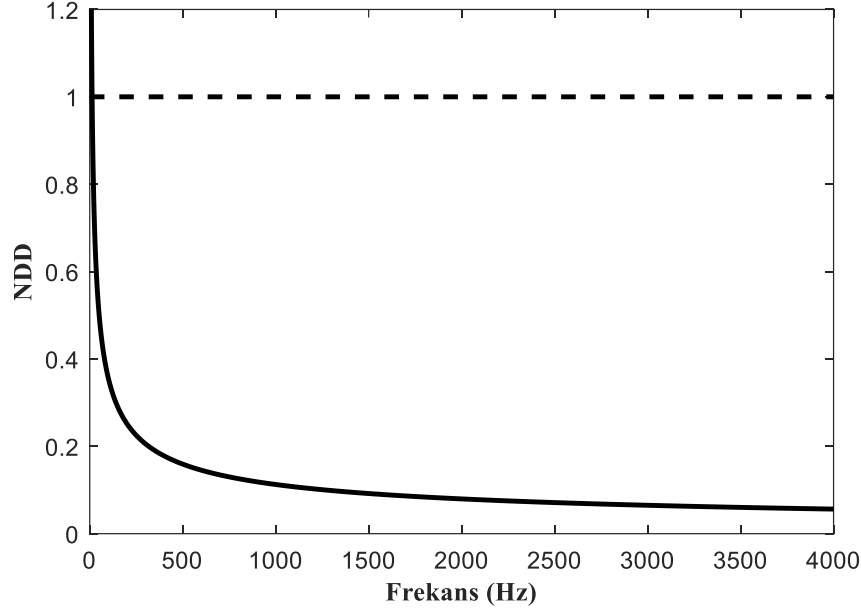
Şekil 3'te görüldüğü üzere incelenen AKD için verilen NDD eğrisi yalnızca oldukça düşük frekanslarda 1'den büyük değerlere sahip olmaktadır. Bunun yanında dalga ayrıştırma yönteminde için seçilen sensörlerin konumları için minimum frekans 160 Hz olarak elde edilmiştir. Buna göre yalnızca 160-4000 Hz aralığında elde edilecek yansımaya katsayıları için yapılacak yorumlar doğru olacaktır.

### 4.2. Doğrulama Çalışması

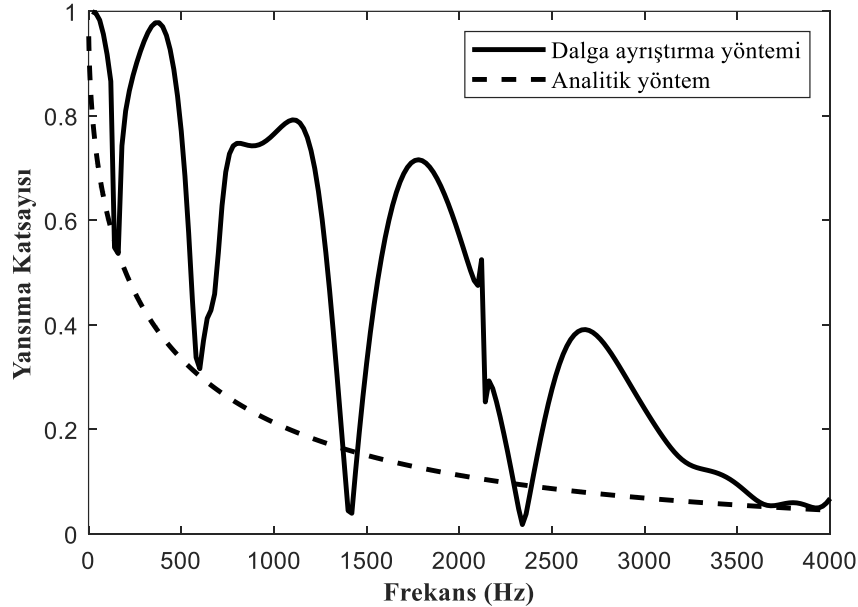
Bu bölümde deterministik AKD için yansımaya katsayısı dalga ayrıştırma yöntemi ile hesaplanmıştır. Dalga ayrıştırma yöntemi için AKD'li girişin sonlu elemanlar modeli kurulmuştur. Sonlu elemanlar modelinde AKD bölgesi en küçük dalga boyunun (en yüksek frekans) en az 10 eleman ile, giriş bölgesi ise

en az 6 eleman ile modellenmiştir. Buna göre AKD için 312 eleman, toplamda 552 adet üç boyutlu eleman kullanılmıştır. Sonlu elemanlar modelinde giriş uç noktasından eğilme titreşimi oluşturacak şekilde zorlanmış ve harmonik analiz ile yapıınız hız değerleri frekansa bağlı olarak kompleks olarak hesaplanmıştır. Elde edilen hız değerleri

Denklem (6)-(7)'de yerine yazılmış ve son olarak Denklem (4) kullanılarak yansıma katsayısı elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlar Şekil 4'te analitik formülasyon ile karşılaştırılarak yöntemin doğrulaması yapılmıştır.



Şekil 3. İncelenen AKD için normalleştirilmiş dalga sayısı değişimi



Şekil 4. Deterministik yapı için yansıma katsayısı

Şekil 4 incelendiğinde elde edilen sonuçların birbirleri ile oldukça yüksek frekanslarda (3500 Hz ve üzeri) uyumlu olduğu görülmektedir. Kurulan sayısal analizin yüksek frekanslarda analitik sonuçlara yakınsaması sebebi ile sonlu elemanlar modelinin geçerliliği kanıtlanmış; böylece, ilerideki

çalışmalarda sağlam ve güvenilir bir temel olarak kullanılabilineceği sonucuna varılmıştır. Bunun yanında genel olarak analitik formülasyon ile daha düşük yansıma katsayıları elde edilmiştir. Bunun sebebi olarak Bunun sebebi olarak dalga ayrıştırma

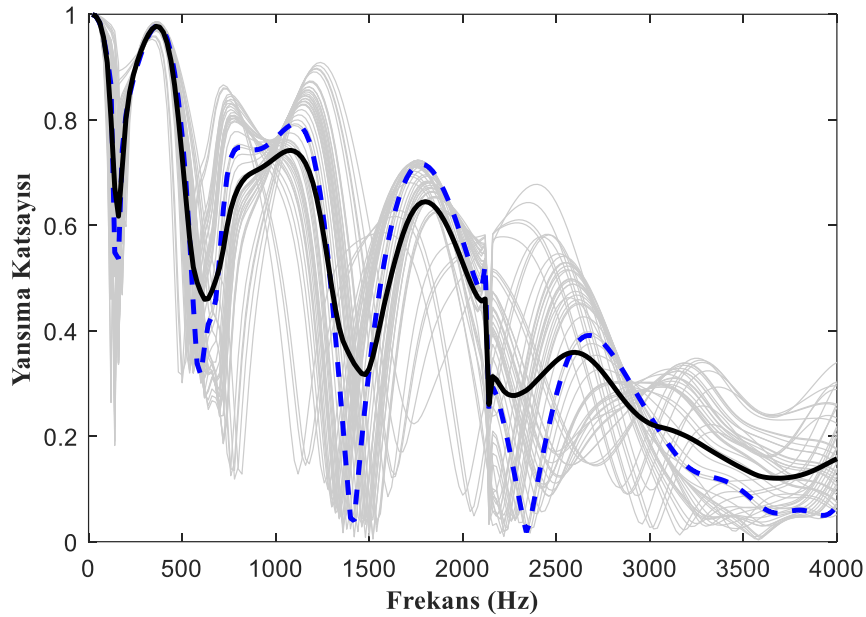
yönteminde AKD'nin modlarının etkisinin de incelenmesidir [6].

#### 4.3. Belirsizlik Analizi

Bu bölümde Şekil 2'de şematik olarak gösterilen AKD'li kirişte AKD'nin uzunluğu ( $L_{AKD}$ ), ortalaması 70 mm ve standart sapması 3,5 mm olan normal dağılıma sahip belirsiz parametre olarak kabul edilmiştir. Bu kapsamda Monte Carlo Simülasyonu için 50 adet örneklem üretilmiştir. Örneklem üretildikten sonra, oluşturulan örneklem istenilen ortalama, standart sapma, çarpıklık ve basıklık değerlerine yakınlığı kontrol edilmiştir. Ardından üretilen her bir örneklem için sonlu elemanlar modeli ve dalga ayrıştırma yöntemi kullanılarak belirsiz yansıma katsayısı hesaplanmıştır. Sonuçlar, deterministik AKD

için elde edilen sonuçlar ile birlikte Şekil 5'te sunulmuştur.

Şekil 5'teki, deterministik sonuç ile belirsizlik sonuçları karşılaştırıldığında düşük frekanslarda (500 Hz'e kadar) belirsizliğin etkisinin olmadığı görülmektedir. Fakat 500 Hz sonrasında frekans arttıkça (yaklaşık 2200 Hz sonrası) belirsizliklerin yansıma katsayısı üzerinde oldukça büyük etkisi vardır. Özellikle AKD uzunluğundaki milimetrik sapmalar, sistemin dalga yayılım karakteristiğini ve sönümleme performansını anlamlı biçimde etkileyebildiği gösterilmiştir. Bu durum, bu tür yapıların tasarımında geometrik belirsizliklerin sistem performansı üzerindeki potansiyel etkileri de dikkate alınarak değerlendirilmesinin, güvenilir ve etkin bir titreşim kontrolü açısından kritik öneme sahip olduğunu göstermektedir.



Şekil 5. Belirsizlik analizi sonuçları (gri: Monte Carlo Simülasyonu örneklemelerinin yansıma katsayısı, siyah: ortalama yansıma katsayısı, mavi: deterministik yansıma katsayısı)

## 5. SONUÇLAR

Bu çalışmada, eğilme titreşimlerini sönümlemede kullanılan akustik kara delik yapıların performansına, üretim kaynaklı geometrik belirsizliklerin etkisi incelenmiştir. Analitik yöntemle elde edilen yansıma katsayısı sonuçları, kurulan sonlu elemanlar modeli ile karşılaştırılmış ve uyumlu sonuçlar elde edilerek model doğrulanmıştır. Özellikle analitik yaklaşımın AKD modlarını göz ardı etmesi nedeniyle düşük yansıma katsayısı vermesi, sayısal yöntemin önemini ortaya koymuştur. Geometrik belirsizliklerin etkisini

değerlendirmek amacıyla AKD uzunluğu değişken kabul edilerek Monte Carlo Simülasyonu uygulanmış ve her bir örneklem için yansıma katsayısı hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçlar incelenen yapı için göstermiştir ki, düşük frekanslarda (500 Hz'e kadar) belirsizliklerin etkisi göz ardı edilebilir düzeydeyken, özellikle 2200 Hz üzerindeki frekanslarda yansıma katsayısında ciddi sapmalar meydana gelmektedir. Bu durum, titreşim kontrolü uygulamalarında AKD tasarımlarının yalnızca teorik modellere değil, aynı zamanda üretimden kaynaklı

belirsizliklere göre de değerlendirilmesi gerektiğini göstermektedir. Sonuç olarak, yapısal performansın güvenilirliği için AKD tasarımlarında geometrik varyasyonların mutlaka göz önünde bulundurulması gerektiği vurgulanmıştır.

## 6. TEŞEKKÜR

Bu çalışma 224M048 No'lu TÜBİTAK 1002 Hızlı Destek Projesi ve 2024-BDP-6.12.54-0011 No'lu Bolu Abant İzzet Baysal Üniversitesi BAP-03 kapsamında desteklenmiştir.

## 7. KAYNAKLAR

- [1] M.A. Mironov, Propagation of a flexural wave in a plate whose thickness decreases smoothly to zero in a finite interval, *Soviet Physics Acoustics-Ussr* 34 (1988).
- [2] V. V. Krylov, R.E.T.B. Winward, Experimental investigation of the acoustic black hole effect for flexural waves in tapered plates, *J Sound Vib* 300 (2007).  
<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2006.07.035>.
- [3] V. Denis, F. Gautier, A. Pelat, J. Poittevin, Measurement and modelling of the reflection coefficient of an Acoustic Black Hole termination, *J Sound Vib* 349 (2015) 67–79.  
<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2015.03.043>.
- [4] W. Jeon, J.Y. Lee, Vibration damping using a spiral acoustic black hole, *J Acoust Soc Am* 141 (2017) 3644–3644.  
<https://doi.org/10.1121/1.4987872>.
- [5] P.A. Feurtado, S.C. Conlon, An Experimental Investigation of Acoustic Black Hole Dynamics at Low, Mid, and High Frequencies, *J Vib Acoust* 138 (2016).  
<https://doi.org/10.1115/1.4033894>.
- [6] K. Hook, J. Cheer, S. Daley, A parametric study of an acoustic black hole on a beam, *J Acoust Soc Am* 145 (2019) 3488–3498.  
<https://doi.org/10.1121/1.5111750>.
- [7] J. Deng, N. Gao, Periodic Acoustic Black Holes to Mitigate Sound Radiation from Cylindrical Structures, in: *Acoustic Emission - New Perspectives and Applications*, 2022: pp. 1–108.  
<https://doi.org/10.5772/intechopen.101959>.
- [8] R.Y. Rubinstein, D.P. Kroese, *Simulation and the Monte Carlo Method*, 3th ed., John Wiley & Sons, New Jersey, 2016.
- [9] R.G. Ghanem, P.D. Spanos, *Stochastic finite elements: A spectral approach*, Dover Publications, New York, 2003.
- [10] T. Kernicky, M. Whelan, E. Al-Shaer, Dynamic identification of axial force and boundary restraints in tie rods and cables with uncertainty quantification using Set Inversion Via Interval Analysis, *J Sound Vib* 423 (2018) 401–420.  
<https://doi.org/10.1016/J.JSV.2018.02.062>.
- [11] A. Pelat, F. Gautier, S.C. Conlon, F. Semperlotti, The acoustic black hole: A review of theory and applications, *J Sound Vib* 476 (2020) 115316.  
<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2020.115316>.
- [12] P.A. Feurtado, S.C. Conlon, F. Semperlotti, A normalized wave number variation parameter for acoustic black hole design, *J Acoust Soc Am* 136 (2014).  
<https://doi.org/10.1121/1.4890205>.