Kontrol Sistemleri Tasarımı

Frekans Yanıtı

Prof. Dr. Bülent E. Platin

Makina Teorisi Derneği
Kütük No: 06-101-111
2011

Sistem Dinamiği ve Kontrol Çalıştayı
31 Ağustos – 02 Eylül 2016

HİTİT ÜNİVERSİTESİ

Frekans Yanıtı

Tanım

Kararlı bir sistemin sinüs girdisine sürekli rejim yanıtı

Bu tanımda 3 temel boyut bulunmaktadır:

1. Kararlı bir sistem
2. Sinüs girdisi
3. Sürekli rejim

Doğrusal, sabit katsayılı ve kararlı sistemlerin sinüs girdisine yanıtı sürekli rejimde girdi ile aynı frekanslı ancak farklı genlik ve fazlı bir başka sinüs olacaktır.

$$x(t) = X \sin\omega t \quad \rightarrow \quad y(t) = Y \sin(\omega t + \Phi)$$

Burada $Y = Y(\omega)$ ve $\Phi = \Phi(\omega)$ olup, transfer fonksiyonu $G(s)$ olan bir sistem için

çıktı genliği: $Y = |G(j\omega)|X$ $\rightarrow$ genlik oranı: $M(\omega) = Y/X = |G(j\omega)|$

faz açısı: $\Phi(\omega) = \mathrm{Arg}[G(j\omega)]$

girdi frekansı ω'nın birer fonksiyonu olarak bulunur.

Buradaki karmaşık frekans yanıtı $G(j\omega)$ aşağıdaki gibi elde edilir.

$$G(j\omega) = G(s)|_{s=j\omega} = |G(j\omega)|\, e^{j\Phi(\omega)}$$

Frekans Yanıtı

Tanım

Kararlı bir sistemin sinüs girdisine sürekli rejim yanıtı

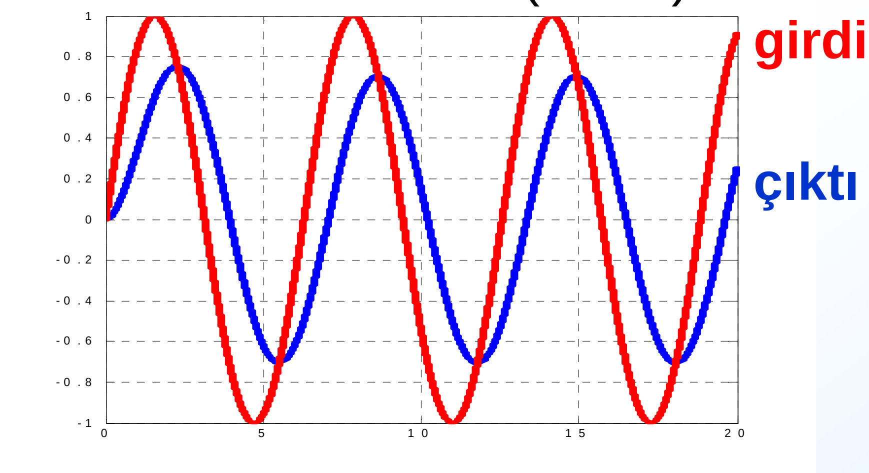
Bu tanımda 3 temel boyut bulunmaktadır:

1. Kararlı bir sistem
2. Sinüs girdisi
3. Sürekli rejim

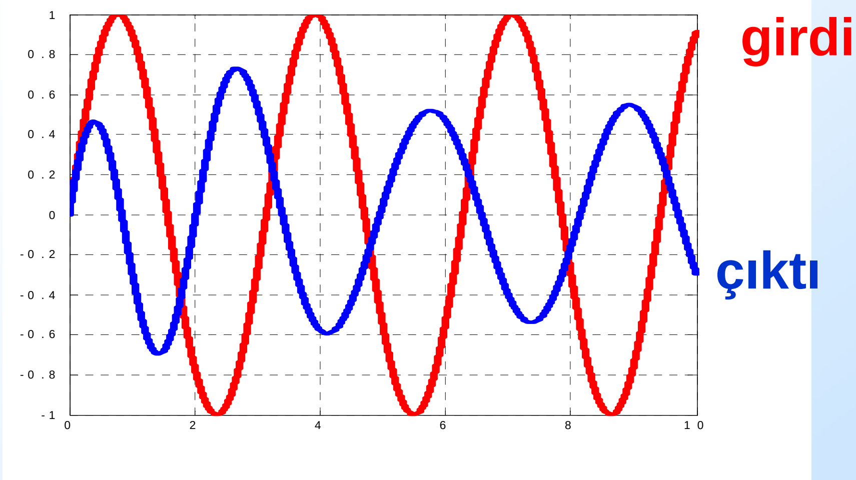
Doğrusal, sabit katsayılı ve kararlı sistemlerin sinüs girdisine yanıtı sürekli rejimde girdi ile aynı frekanslı ancak farklı genlik ve fazlı bir başka sinüs olacaktır.

$x(t) = X \sin\omega t \quad \rightarrow \quad y(t) = Y \sin(\omega t + \Phi)$

Faz Gecikmesi ($\Phi < 0$)



Faz İlerlemesi ($\Phi > 0$)



Frekans Yanıtı

Yeni Tanım

M(ω) ve Φ(ω)'nın çeşitli girdi frekansı ω için bulunması

Transfer Fonksiyonunun Pay ve Payda Çokterimlilerinin Kullanılması:

$$G(s)=\frac{N(s)}{D(s)} \quad \xrightarrow{s=j\omega} \quad G(j\omega)=\frac{N(j\omega)}{D(j\omega)}$$

N(jω) ve D(jω) karmaşık çokterimlileri gerçek ve sanal kısımlarına ayrılmış şekilde yazılırsa

$$N(j\omega) = N_g(j\omega) + jN_s(j\omega) \qquad \text{ve} \qquad D(j\omega) = D_g(j\omega) + jD_s(j\omega)$$

Genlik oranı:

$$M(\omega)=\left|G(j\omega)\right|=\left|\frac{N(j\omega)}{D(j\omega)}\right|=\frac{\left|N(j\omega)\right|}{\left|D(j\omega)\right|}=\frac{\sqrt{N_g^2(j\omega)+N_s^2(j\omega)}}{\sqrt{D_g^2(j\omega)+D_s^2(j\omega)}}=\sqrt{\frac{N_g^2(j\omega)+N_s^2(j\omega)}{D_g^2(j\omega)+D_s^2(j\omega)}}$$

Faz açısı:

$$\Phi(j\omega) = \text{Arg}[G(j\omega)] = \text{Arg}[N(j\omega)/D(j\omega)] = \text{Arg}[N(j\omega)] - \text{Arg}[D(j\omega)]$$

$$\Phi(j\omega) = \text{Arg}[N_g(j\omega)+jN_s(j\omega)] - \text{Arg}[D_g(j\omega)+jD_s(j\omega)]$$

Kutup-Sıfır Yapısı ve Frekans Yanıtı

Transfer fonksiyonu

$$G(s) = \frac{K\prod_{k=1}^{m}(s - z_k)}{\prod_{i=1}^{n}(s - p_i)}$$

$\rightarrow$

Karmaşık frekans fonksiyonu

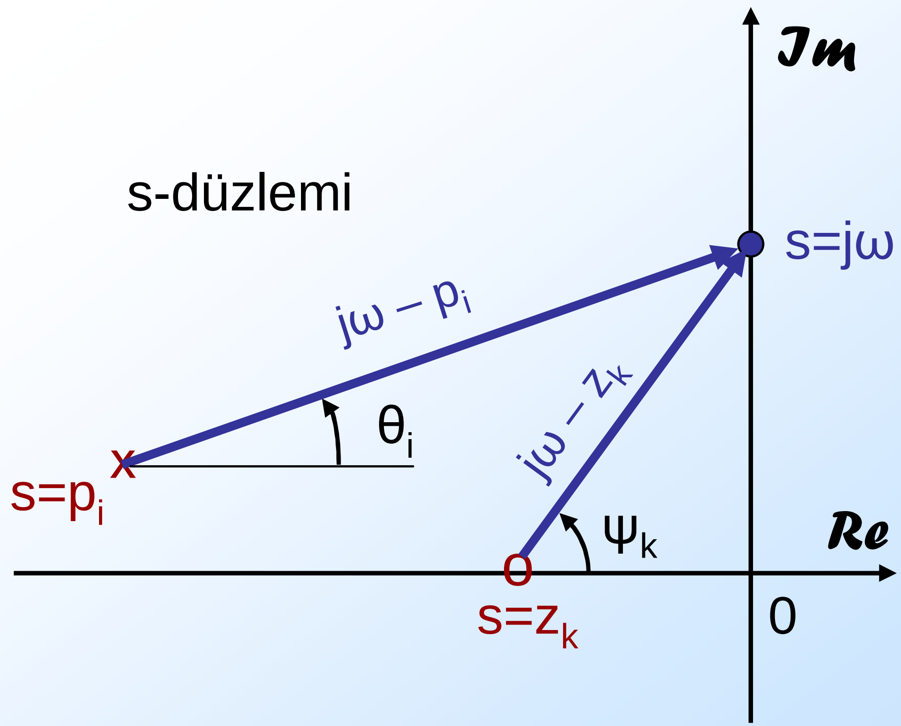
$$G(j\omega) = \left(\frac{K\prod_{k=1}^{m} Z_k}{\prod_{i=1}^{n} P_i}\right)\angle\left(\sum_{k=1}^{m}\psi_k - \sum_{i=1}^{n}\theta_i\right)$$

Burada

$Z_k\angle\psi_k$ ve $P_i\angle\theta_i$

z_k sıfırından ve p_i kutubundan $s = j\omega$ noktasına çizilen $j\omega - z_k$ ve $j\omega - p_i$ karmaşık vektörlerinin genlik ve açılarını göstermektedir.

Dolayısıyla, herhangi bir ω değeri için $G(j\omega)$'nın genliği K kazancı ve bu vektörlerin Z_k ve P_i genlikleri tarafından, açısı da bu vektörlerin ψ_k ve θ_i açıları tarafından belirlenmektedir.

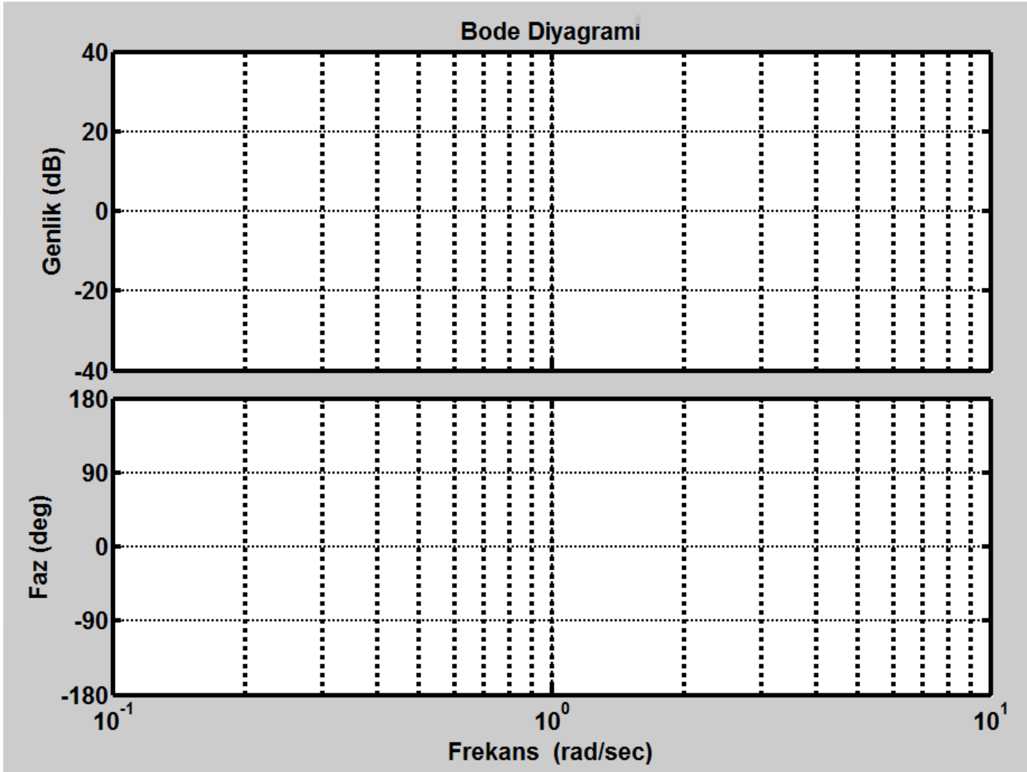


Frekans Yanıtı

Bode Diyagramı

İki grafikten oluşmaktadır:

1. $20\log|G(j\omega)|$ vs $\log\omega$
2. $\text{Arg}[G(j\omega)]$ vs $\log\omega$



$20\log|G(j\omega)|$'nın birimi desibel [dB]'dir.

$\log\omega$ için 10'un ve 1/10'un tamsayı katları (onluk, İng. decade) kullanılır.

Her iki grafik için ortak frekans ekseni kullanılır.

Eksenlerde log kullanımının 2 nedeni vardır:

1. Birbirine göre farklı mertebedeki değerler aynı grafikte görülebilir.
2. Faktörlerin genliklerini grafiksel olarak toplamak mümkündür.

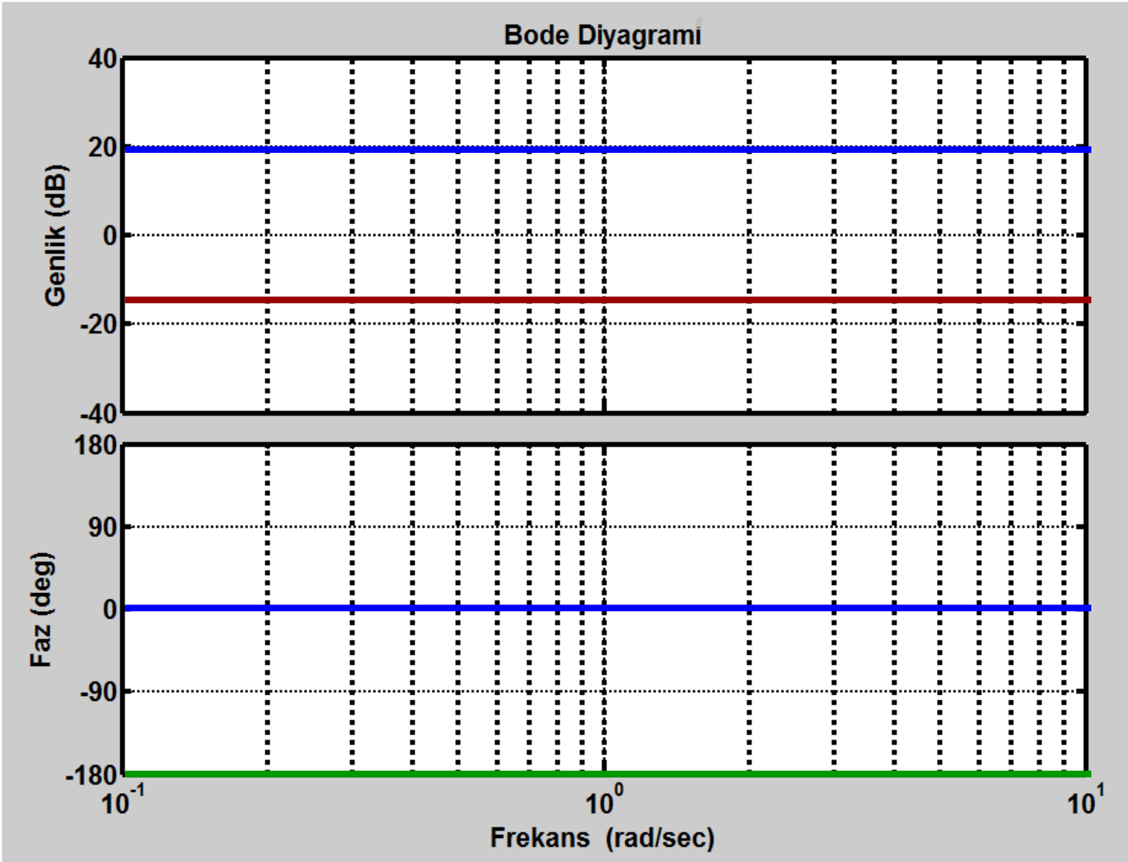
Her transfer fonksiyonu 4 ana faktör türünden yazılabilir:

- Kazanç, 1 adet - payda
- Serbest s, 1 adet - payda/paydada
- 1. mertebe (çoklu - payda ve/veya paydada)
- 2. mertebe (çoklu - payda ve/veya paydada)

Sabit Kazanç K

$$G(s) = K$$

$G(j\omega) = K \quad \rightarrow \quad 20\log|G(j\omega)| = 20\log|K| \quad \& \quad Arg[G(j\omega)] = 0^o$ ya da $\pm 180^o$



|K | > 1

|K | < 1

K > 0

K < 0

Frekans Yanıtı

İntegral Faktör

$$G(s) = \frac{1}{s}$$

$G(j\omega) = 1/j\omega = -j(1/\omega)$

$20\log M(\omega) = -20\log\omega$

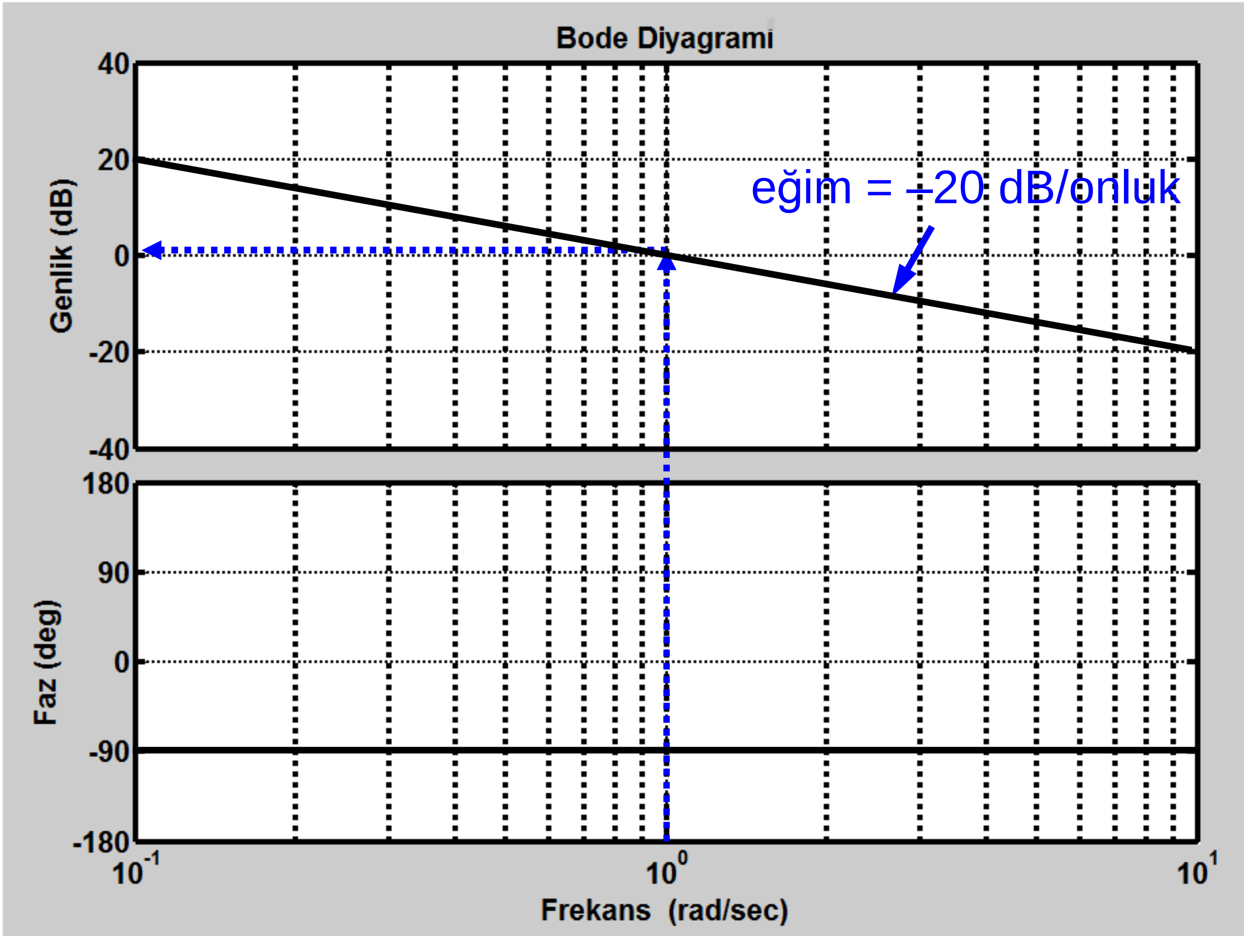
$\Phi(\omega) = -90°$

Eğer

$$G(s) = \frac{1}{s^n}$$

$20\log M(\omega) = -20n\log\omega$

$\Phi(\omega) = -90n°$



Türevsel Faktör

$$G(s) = s$$

$G(j\omega) = j\omega$

$20\log M(\omega) = +20\log\omega$

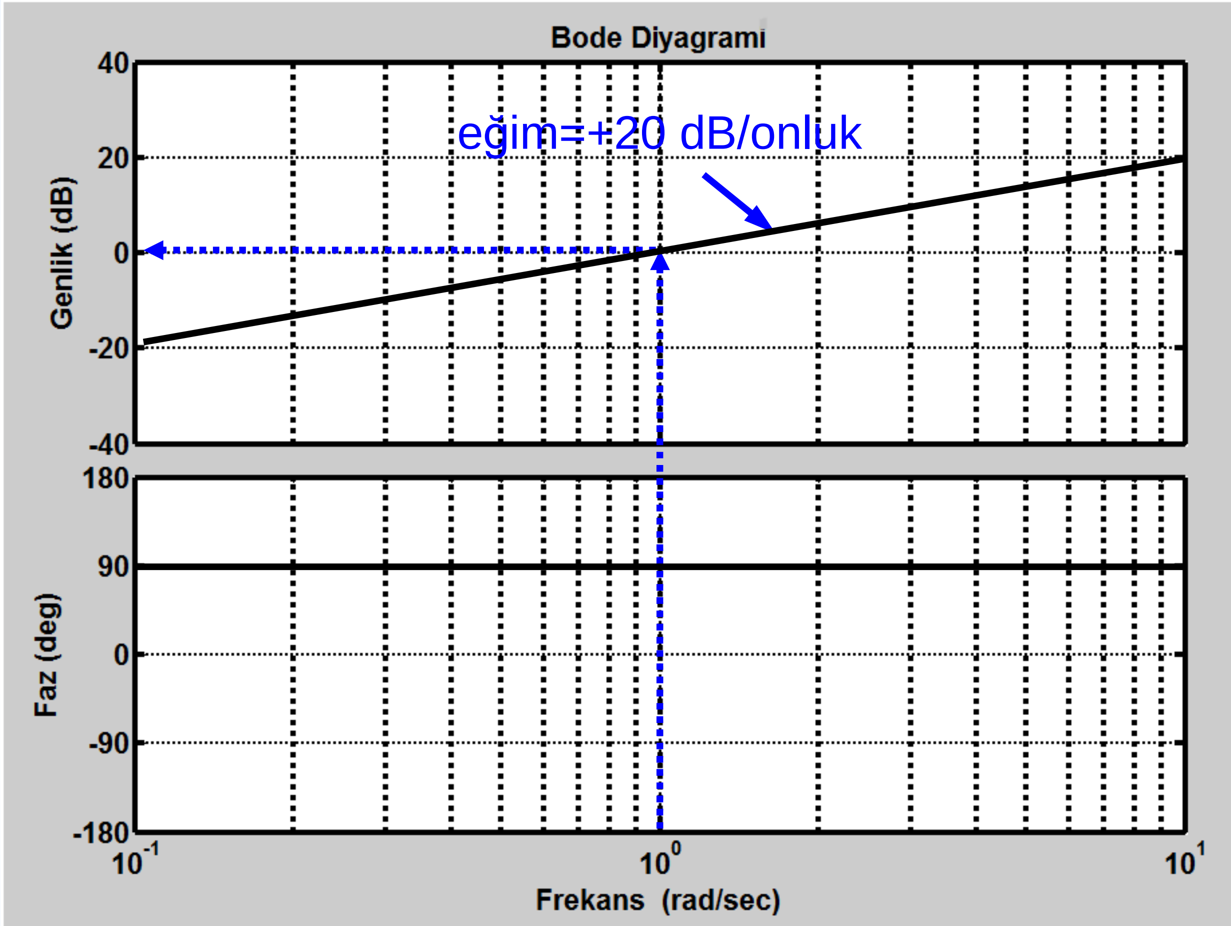
$\Phi(\omega) = +90°$

Eğer

$G(s) = s^n$

$20\log M(\omega) = +20n\log\omega$

$\Phi(\omega) = +90n°$



Grafikler, integral faktör grafiklerinin 0 dB ve 0º ye göre simetriğidir.

Frekans Yanıtı

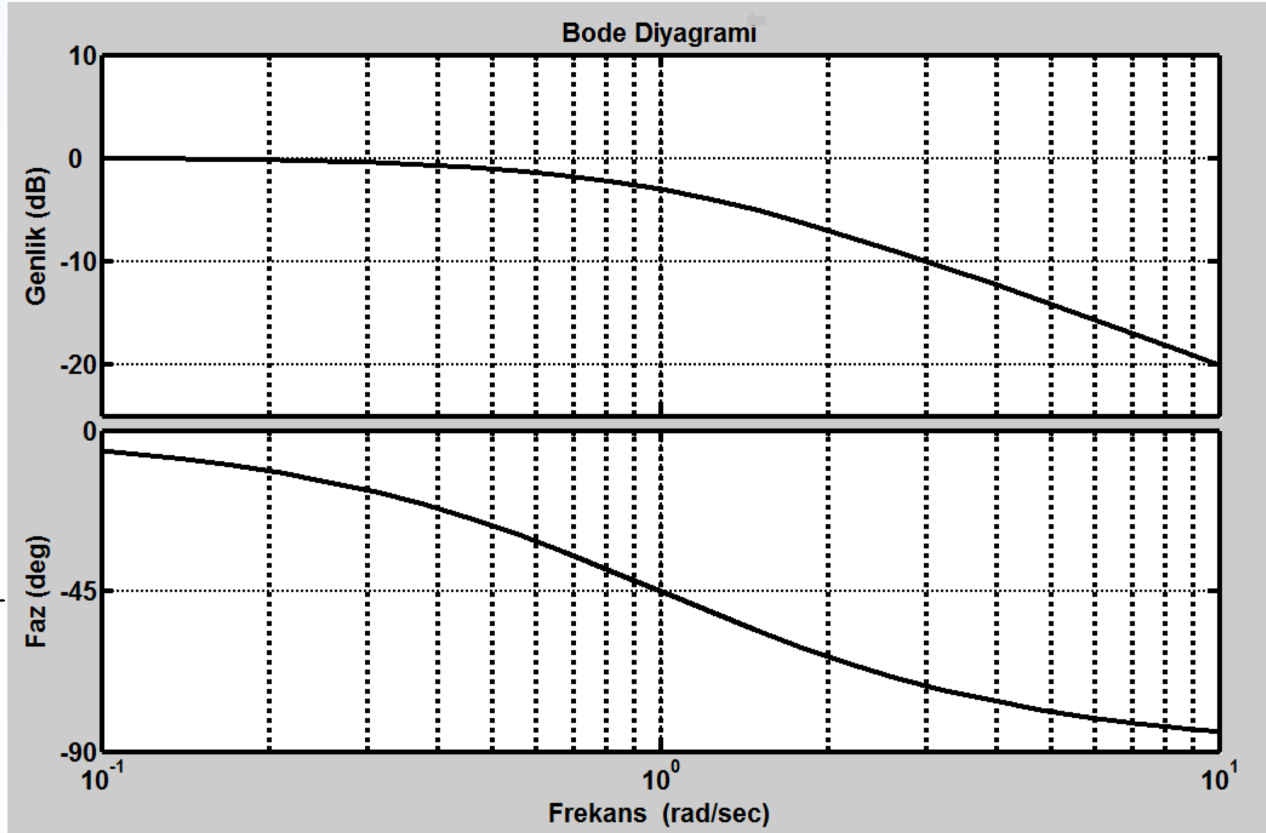
1. Mertebe Payda Faktörü

$$G(s)=\frac{1}{Ts+1}$$

$$G(j\omega)=\frac{1}{1+j\omega T}$$

$$20\log M(\omega)=-20\log\sqrt{1+\omega^2T^2}$$

$$\Phi(\omega)=-\tan^{-1}(\omega T)$$



Eğer

$$G(s)=\frac{1}{(Ts+1)^n}$$

$$20\log M(\omega)=-20n\log\sqrt{1+\omega^2T^2}$$

$$\Phi(\omega)=-n\tan^{-1}(\omega T)$$

Frekans Yanıtı

1. Mertebe Payda Faktörü

$$G(s) = \frac{1}{Ts+1}$$

Kırık çizgi yaklaşımı:

Alçak frekanslarda ($\omega << 1/T$)

$20\log M(\omega) \approx 0$ dB

$\Phi(\omega) \approx 0^o$

Yüksek frekanslarda ($\omega >> 1/T$)

$20\log M(\omega) \approx -20\log(\omega T)$

$\approx -20(\log\omega + \log T)$

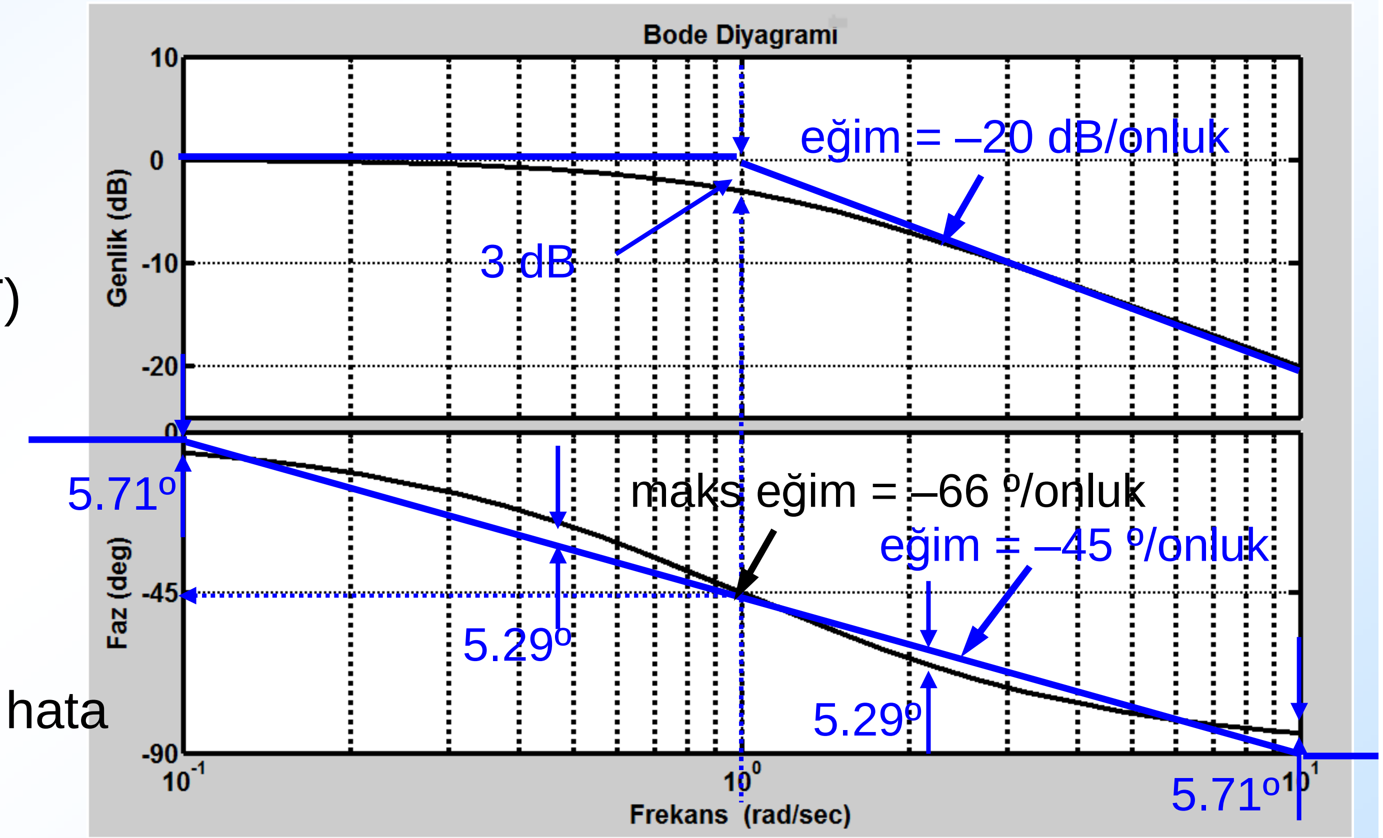
$\Phi(\omega) \approx -90^o$

Köşe frekansında ($\omega_c = 1/T$)

$20\log M(\omega) = -3.02$ dB maks hata

$\Phi(\omega) = -45^o$

Maks açı hatası 5.71^o ($\omega = 1/10T$ ve $10/T$'de)



Frekans Yanıtı

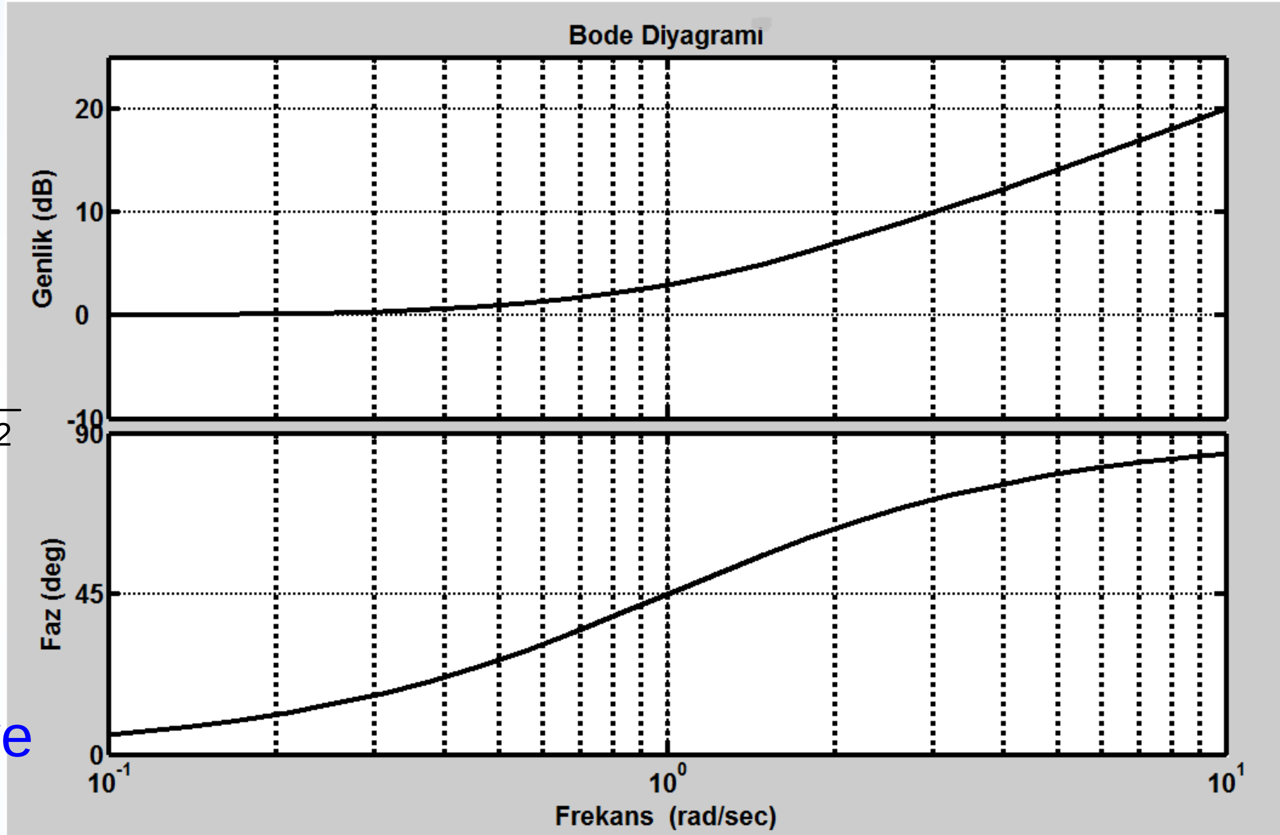
1. Mertebe Pay Faktörü

$$G(s) = Ts + 1$$

$$G(j\omega) = 1 + j\omega T$$

$$20\log M(\omega) = +20\log\sqrt{1+\omega^2T^2}$$

$$\Phi(\omega) = +\tan^{-1}(\omega T)$$



Eğer

$$G(s) = (Ts+1)^n$$

$$20\log M(\omega) = +20n\log\sqrt{1+\omega^2T^2}$$

$$\Phi(\omega) = +n\tan^{-1}(\omega T)$$

Grafikler, integral faktör grafiklerinin 0 dB ve göre 0º ye göre simetriğidir.

Payda faktörüne benzer kırık çizgi yaklaşımı kullanılır.

Frekans Yanıtı

2. Mertebe Payda Faktörü

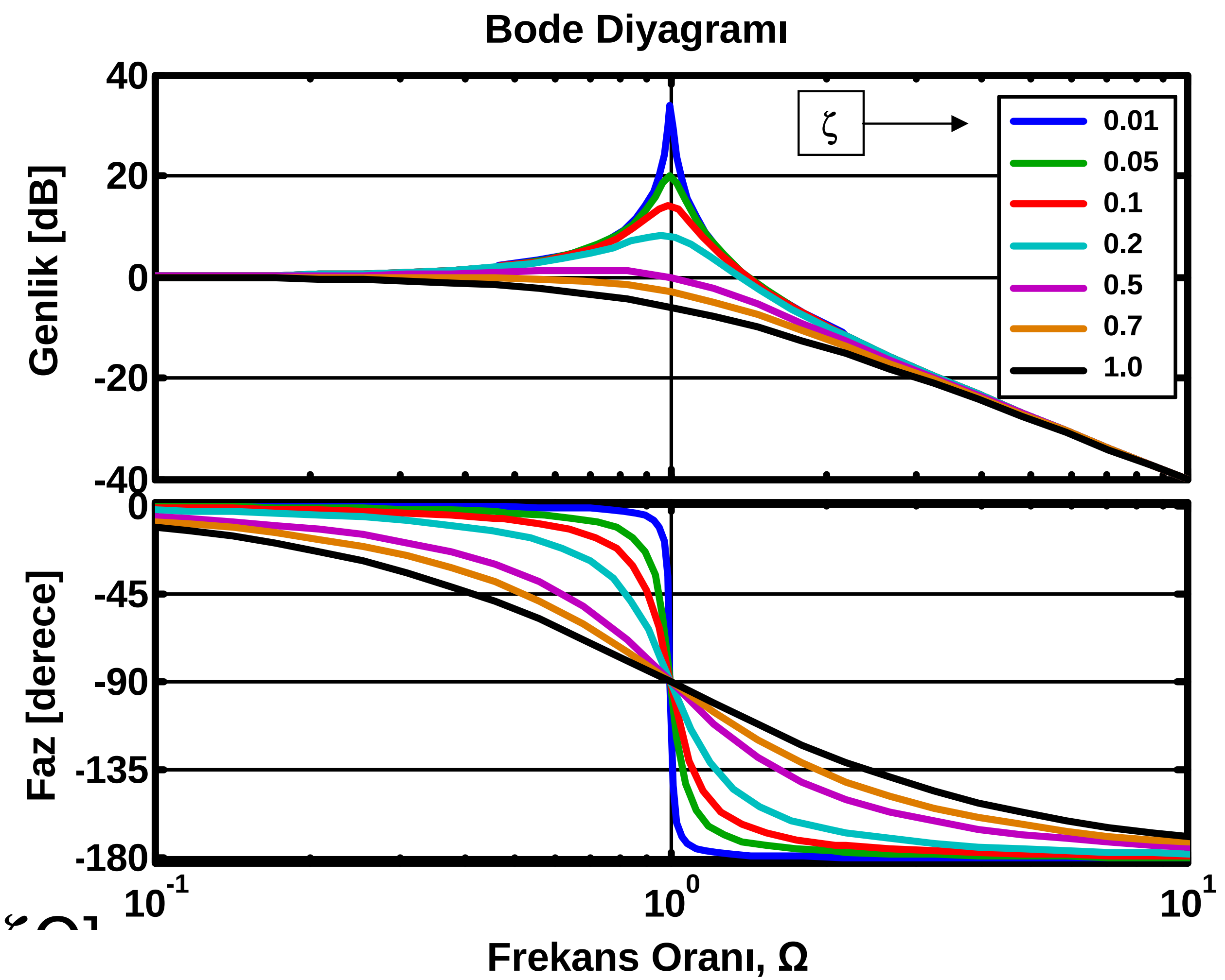
$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}=\frac{1}{T^2s^2+2\zeta Ts+1}$$

$$G(j\omega)=\frac{1}{\left(1-\Omega^2\right)+j\left(2\zeta\Omega\right)}$$

Burada $\Omega=\omega/\omega_n=\omega T$

frekans oranı'dır.

$$20\log M(\Omega)=-20\log\sqrt{(1-\Omega^2)^2+(2\zeta\Omega)^2}$$



$\Phi(\Omega) = -\mathrm{Arg}[(1-\Omega^2)+j2\zeta\Omega]$

Frekans Yanıtı

2. Mertebe Payda Faktörü

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{1}{T^2 s^2 + 2\zeta T s + 1}$$

Kırık çizgi yaklaşımı:

Alçak frekanslarda (Ω << 1)

$20\log M(\Omega) \approx 0$ dB

$\Phi(\Omega) \approx 0^o$

Yüksek frekanslarda (Ω >> 1)

$20\log M(\Omega) \approx -20\log(\Omega^2)$

$\approx -40\log\Omega$

$\Phi(\Omega) \approx -180^o$

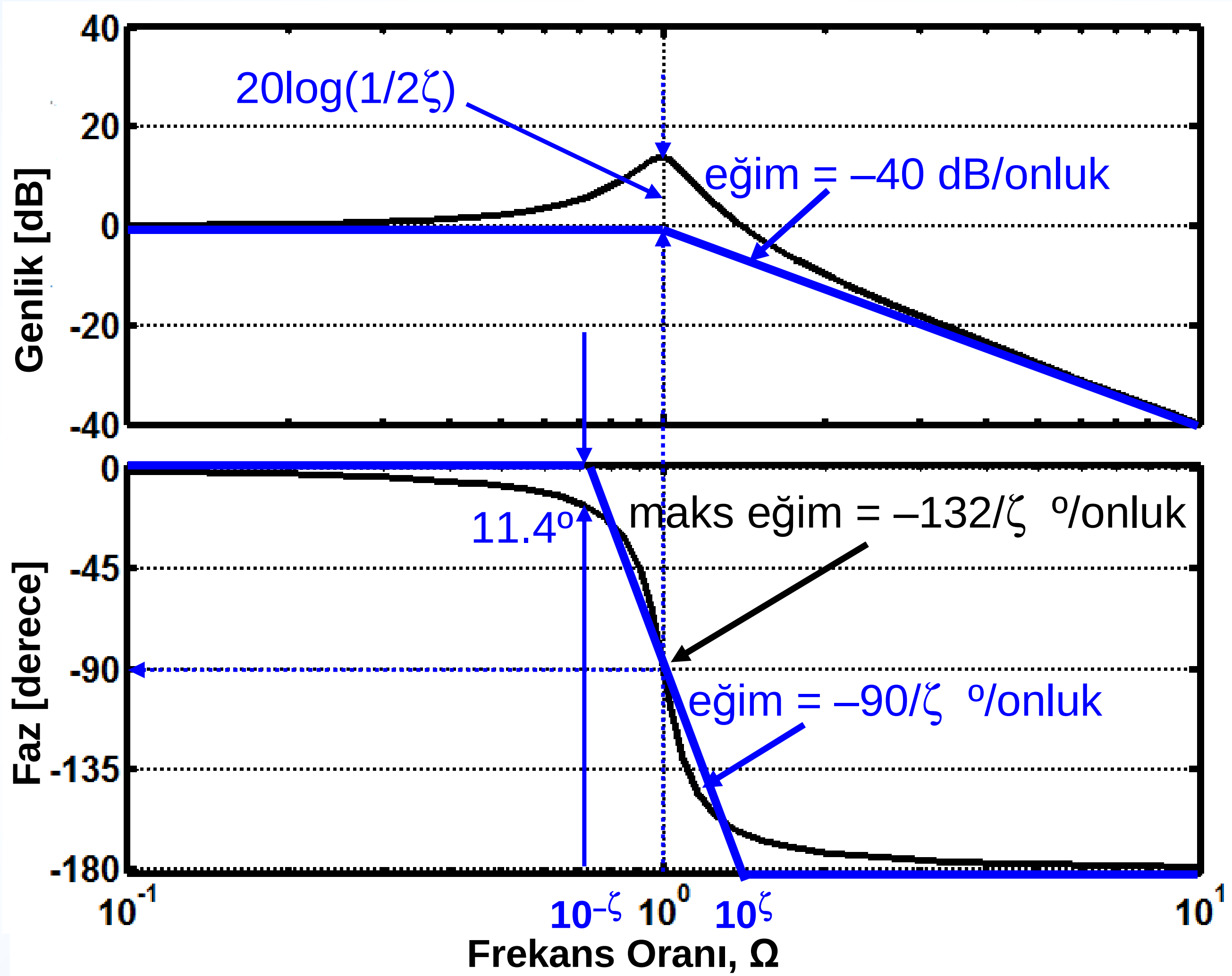
Köşe frekansında (Ω = 1)

$M(\Omega) = 1/2\zeta$ maks hata

$\Phi(\Omega) = -90^o$

Maks açı hatası 11.4^o

($\Omega = 10^{-\zeta}$ ve $10^{+\zeta}$ 'da)



2. Mertebe Payda Faktörü

$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}=\frac{1}{T^2s^2+2\zeta Ts+1}$$

Rezonans:

Genliğin tepe değerine ulaştığı yer olarak tanımlanır.

Bu konuma karşın gelen rezonans frekansı Ω_r, $dM/d\Omega = 0$ koşulu kullanılarak

$$\Omega_r=\sqrt{1-2\zeta^2} \quad \rightarrow \quad \text{rezonans için } \zeta < 0.707$$

bu frekanstaki genliğin tepe değeri de

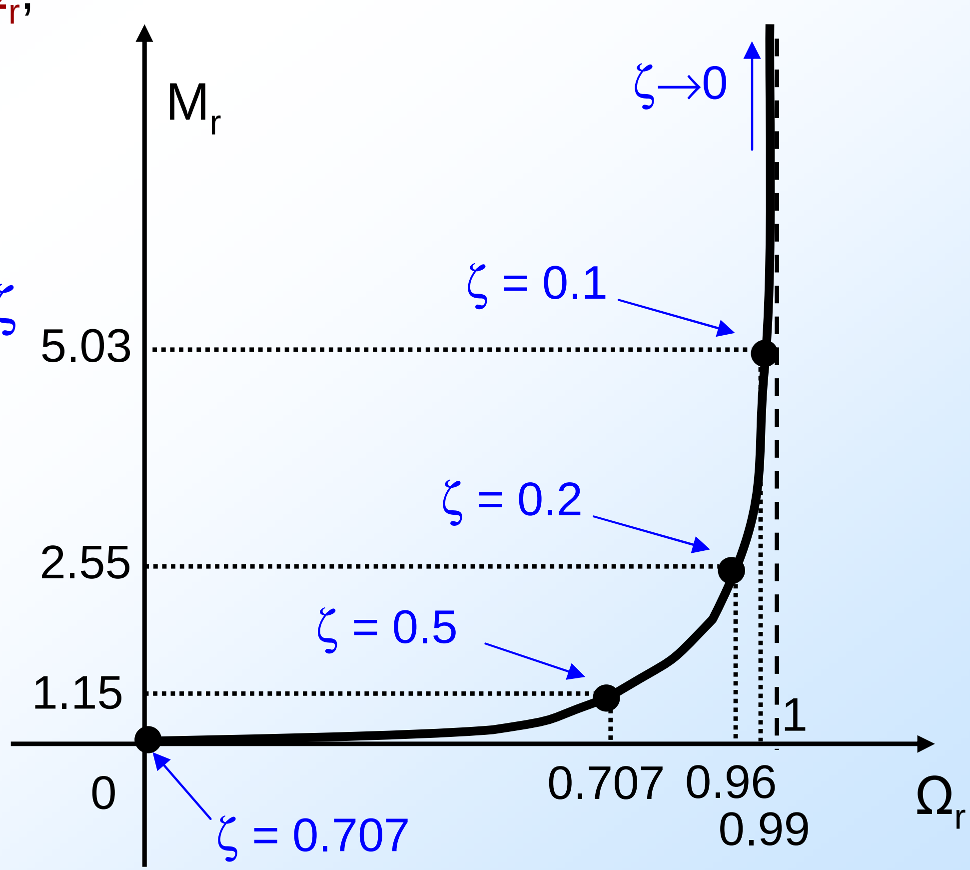
$$M_r=1\big/2\zeta\sqrt{1-\zeta^2} \quad \rightarrow \quad \text{küçük } \zeta \text{ için } M_r \approx 1/2\zeta$$

olarak bulunur.

Yukarıdaki ifadeler yardımıyla M_r ile Ω_r arasında aşağıdaki bağıntı bulunabilir.

$$M_r=1\big/\sqrt{1-\Omega_r^4}$$

Rezonans noktalarının M_r-Ω_r düzleminde ζ ile değişimi yandaki şekilde gösterilmiştir.



Sorularınız